

新高考地区 ☒ 文理科地区 ☒

2024新高考数学 真题全刷

含2023高考真题 在线刷题 免费批改

基础2000题

清优辅考 组编



清华大学出版社



2024新高考数学真题全刷

基础2000题

清优辅考 组编

清华大学出版社

2024 新高考数学真题全刷：基础 2000 题

清优辅考 组编

清华大学出版社

北 京

清华大学出版社

编委会

王建民 薛文叙 李志军 徐丁点
陈 飞 王 杰 朱 波 曹潇君

清华大学出版社

清华大学出版社

清华大学出版社

如果你无法从无尽的模拟题海中脱身，
那么刷精选的高考真题是不错的选择。

清华大学出版社

清华大学出版社

前言

如果说高考是一场马拉松比赛,那么真题就是领跑员“兔子”。跟着“兔子”不迷路,跟着“兔子”跑得快,要想在高考这场马拉松比赛中实现自己的目标,那你就得抓住这些“兔子”。

你好,“兔子全刷”欢迎你!

诚然,“兔子全刷”里全是“兔子”,但不是说我们建议你只抓“兔子”,平时模拟题就全然不顾。高中数学的学习,刷题非常必要,高三阶段的复习更是一个反复练习的过程,这个过程中提高能力是关键,不必刻意追求刷的是什么题。刷题就好比吃饭,模拟题是饭,真题是菜,你若长期只吃饭不吃菜,会营养不良;只吃菜不吃饭,更会大脑退化。答案你已知晓,要均衡搭配。此时,你可能会问:“那为什么还出‘真题全刷’呢?”

此刻,估计你也能自答了。因为“兔子”是高考这场马拉松比赛的领跑员,它很重要。既然很重要,那就有必要研究它,如果通过研究这些“兔子”能从中精选出有代表性的,那么一方面要抓的“兔子”数量少了,可以节省考生的时间;另一方面“兔子”配速更精准了,在它的带动下你更有可能突破,从而跑出更好成绩。

言归正传,2024 数学“真题全刷”有哪些特点呢?

第一,很全。高考数学真题万余道,年份跨度四十余载,但本书选材时穷尽了这万余题,并成功从中精选出了各个板块极具代表性的那些。书中经常会出现相似度特别高的相邻题,然而这些题都是高考真实考过的,通过这些题的题源年份你就可以看得出来。对于排列在一起的同年份同题号的真题,书中标出了文理,以示区分。而且,书中的题型很全,基本考虑到了各个考点各种可能出现的考查形式。

第二,很新。高考数学真题没有新旧之分,但随着高考不断改革,很多题型和考点发生了较大变化,例如 2003 年,导数开始应用在函数问题中,向量法引入到立体几何中等。考虑到这些改革和变化,尤其是新高考的题型,2024 数学“真题全刷”中绝大多数是 2000 年之后的真题,还涵盖了 2023 年高考数学真题,而且,对历年真题的选取规则做了优化并全部重新甄选,可以看到书中所选的真题发生较大变化,新选入的真题也更具代表性。

第三,贴心。在《基础 2000 题》*和《艺考 1500 题》书中开始刷题前,会有预备知识部分。预备知识大多是初中知识,但可能有些同学已经遗忘或本就没掌握好,而这些知识却都是隐藏在高考数学中容易被忽视的小知识点,且是很多题目的解题关键所在。所以,非常有必要在开始刷题前,先把这些重要的预备知识巩固好。预备知识里的题目均节选于历年高考真题,但它们没有被列入全书真题的排序中。如果考生基础尚可,预备知识可直接跳过。考生在刷题过程中,若涉及这部分知识点而解题受阻时,可随时返回查看。

第四,分类。2024 数学“真题全刷”除了在真题选取上做了重大革新外,在真题分类上也大下功夫。以《基础 2000 题》为例,其不再需要涂色,大部分章节已按常见题型在每节中进一步做了分类,并给出了各类题型的解题方法,涉及的重要公式也有证明。配合每节开篇详细的核心笔记,这种分类(章→节→类型)能让同学们直观感受各类高考题型,透彻理解和掌握各种解题方法,并得到有针对性的充分训练。

第五,通用。2024 数学“真题全刷”新高考地区适用,文理科地区也适用,书中在有新高考地区或文理科地区不需要掌握的章节或单个题中均已标出,方便选择使用。编者对文理科题目的差异性有较深理解,对各地区是否需要掌握有较准考量。例如《基础 2000 题》中的【1706】和【1707】,看似题目很相近,但

【1707】为理科题和新高考题,而所需列举量较小的【1706】为文科题。

第六,详解。2024 数学“真题全刷”的答案详解更为翔实,比如“立体几何”一章的解析做到了题题有图。一方面,详解保持了规范性,促进同学们养成良好的规范答题习惯,而在复杂题的解析中会增加一些承上启下的解题点拨(用~~~~标注),让学生知其然更知其所以然,“一路东风送到底”。另一方面,为了丰富解题方法的多样性,详解中尽可能地增加了一题多解,引导同学们从多个角度来理解。而为了照顾文科生在立体几何解题方法中的特殊性,更是单独整理出一节“文科专用”,方便文科生集中掌握,促进临场发挥。

第七,视频。2024 数学“真题全刷”给全部真题都配了免费视频讲解,目的是让考生能通过文字解析和视频讲解短时间内自己解决问题,然后更多的回归课堂,形成正反馈。这些免费视频由“真题全刷”编委会中的诸位教师亲自录制,在 B 站(哔哩哔哩)平台中搜“清华大学出版社高考室”即可找到(封底有二维码,扫码即可观看)。视频不是照本宣科式地念解析,更多的是解题思路和解题技巧的讲解,以及更多解题方法的呈现。

第八,在线刷题。2024“真题全刷”除纸质书外,还配套研发了在线刷题系统,购买正版图书即可全权使用。在“清优辅考”公众号里,点击“在线刷题”菜单栏即可前往。在线刷题系统有错题统计功能,方便错题收集。希望在

* 为行文简洁,本书中以《基础 2000 题》《决胜 800 题》《艺考 1500 题》作为《2024 新高考数学真题全刷:基础 2000 题》《2024 新高考数学真题全刷:决胜 800 题》《2024 新高考数学真题全刷:艺考 1500 题》的简称使用。

线刷题能节省备考时间,提高复习效率。

另外,2024 数学“真题全刷”采用了大字号,做题更护眼。

高中数学课本上的内容都看懂了,课本上例题也能自己完成后,考生即可开始使用“真题全刷”。《基础 2000 题》重视基础,目的是让考生能查漏补缺;建议考生刷两遍以上,第一遍刷完后,将错题整理出来,第二遍刷的时候以这些错题为主。如果你有冲击高考数学 120 分以上的需求,建议配套使用《决胜 800 题》,该书是布满高难度题、高技巧题的修炼场。《艺考 1500 题》则为艺考生量身打造,而刷《基础 2000 题》仍感觉困难的普通考生,也可尝试使用《艺考 1500 题》。

同时,为满足广大教师的需求,本系列书中特别增加了一本《教师用书》。

“真题全刷”一贯不变的初衷是:如果你不能从无尽的模拟题海中脱身,那么刷有限的

精选真题是不错的选择。精诚所至,金石为开,期待“真题全刷”有朝一日能成为你学习高中数学时的案头书。衷心希望“真题全刷”能给予广大考生切实的帮助,愿所有考生都能考上心仪的大学。

高考有你,一路有我,清华大学出版社与你在一起。若你有关于“真题全刷”的建议和意见,可在微信公众号“清优辅考”上直接留言,也可加入高考 QQ 交流群:488277383,我们非常期待!

编 者

2023 年 6 月



清优辅考

清华大学出版社

清华大学出版社

本书前8面为蓝色防伪页。

单翻起一面,透过光可以看到

清华大学出版社防伪水印。

学累了,翻翻这里调节一下。

目 录

预备知识	1
------------	---

第 1 章 集合与逻辑用语	25
---------------------	----

1.1 集合的含义与表示	27
1.2 集合的基本关系与运算(1): 交集、并集、补集	27
1.3 集合的基本关系与运算(2): 基本关系	28
1.4 集合的基本关系与运算(3): 韦恩(Venn)图	29
1.5 集合的基本关系与运算(4): 不等式	30
1.6 含参集合	31
1.7 点集	32
1.8 全称量词与存在量词(1): 命题的否定	32
1.9 全称量词与存在量词(2): 真假判断	33
1.10 四种命题(1): 表述 (新高考不考)	34
1.11 四种命题(2): 真假判断 (新高考不考)	34
1.12 联结词(新高考不考)	35
1.13 充分条件与必要条件	35

第 2 章 函数	37
----------------	----

2.1 计算	39
--------------	----

2.2 函数的定义域	40
2.3 分段函数与函数计算	42
2.4 函数的单调性	43
2.5 指对幂比较大小	45
2.6 函数的奇偶性	47
2.7 函数的对称性与周期性及其 应用	51
2.8 函数性质的综合问题	53
2.9 函数的图像	55
2.10 函数与方程	61

第 3 章 导数	65
----------------	----

3.1 计算	67
3.2 切线	68
3.3 单调性与最值	70
3.4 单调性与极值	74
3.5 图像	76
3.6 零点问题	80

第 4 章 三角函数	81
------------------	----

4.1 三角函数定义及象限符号	83
4.2 同角三角函数关系	84
4.3 诱导公式	86
4.4 和差公式	87
4.5 二倍角公式	89
4.6 恒等综合	90
4.7 图像及基础性质	93

4.8	图像变换	96	8.4	求通项公式	171
4.9	最值及范围问题	99	8.5	数列求和	174
4.10	三角函数周期	102	第9章 不等式	179	
4.11	三角函数单调性	104	9.1	不等关系与不等式的性质	181
4.12	三角函数对称性	107	9.2	一元二次不等式	183
4.13	综合问题	110	9.3	分式不等式与高次不等式	184
第5章 解三角形	113		9.4	基本不等式及其应用	186
5.1	正弦定理	115	9.5	线性规划(新高考不考)	189
5.2	余弦定理	117	第10章 立体几何	193	
5.3	边角互化	120	10.1	空间中的位置关系	195
5.4	三角形面积	124	10.2	空间几何体的表面积及 体积	198
5.5	图形	127	10.3	三视图(新高考不考)	200
5.6	最值及范围问题	129	10.4	球体	205
5.7	射影定理与角平分线定理	131	10.5	平行关系	214
5.8	综合问题	133	10.6	垂直关系	219
第6章 平面向量	135		10.7	小题综合	227
6.1	线性运算与基本定理	137	10.8	角度及距离计算	233
6.2	坐标运算	139	10.9	文科专用	244
6.3	数量积	141	第11章 直线与圆	249	
6.4	平面向量的应用	146	11.1	直线的方程	251
第7章 复数	149		11.2	圆的方程	253
7.1	复数的概念及分类	151	11.3	位置关系	255
7.2	计算基础	151	11.4	圆的弦长	257
7.3	共轭	152	11.5	圆的切线	259
7.4	方程(1): 一个未知数	153	11.6	圆中角度与面积	261
7.5	方程(2): 两个未知数	154	第12章 圆锥曲线	263	
7.6	进阶: 速算	154	12.1	椭圆的定义与方程	265
7.7	几何形式	156	12.2	椭圆的几何性质	266
7.8	综合	158	12.3	双曲线的定义与方程	267
第8章 数列	159		12.4	双曲线的渐近线	269
8.1	等差数列	161	12.5	双曲线的性质	273
8.2	等比数列	165	12.6	方程求离心率	275
8.3	差比综合问题	169			

12.7 渐近线与离心率互求	276	第 16 章 数学建模与数学文化	361
12.8 定义求离心率	277	16.1 数列模型	363
12.9 焦点三角形求离心率	280	16.2 基本函数模型	364
12.10 离心率的范围	282	16.3 几何模型	367
12.11 抛物线的定义与方程	283	16.4 统计概率	371
12.12 抛物线的性质	285	16.5 不等式	372
12.13 抛物线的焦点弦长与 面积	287	16.6 思维推理	374
第 13 章 统计	289	16.7 新定义	376
13.1 三种抽样方法	291	第 17 章 算法(新高考不考)	379
13.2 数据的数字特征	293	17.1 条件结构:分段函数	381
13.3 数据统计图	298	17.2 循环结构(1):单循环	381
13.4 频率分布直方图	303	17.3 循环结构(2):双循环	384
13.5 线性回归方程	310	第 18 章 定积分(理科专用)	385
13.6 独立性检验	316	18.1 定积分计算	387
第 14 章 排列组合与二项式定理 (文科不考)	321	18.2 图形面积计算	387
14.1 排列组合	323	第 19 章 极坐标与参数方程 (新高考不考)	389
14.2 二项式定理	329	19.1 极坐标	391
第 15 章 概率	331	19.2 参数方程	395
15.1 概率与概率模型	333	19.3 最值问题	400
15.2 事件的独立性与条件概率 ...	339	19.4 综合问题	403
15.3 离散型随机变量及其分布列 (文科不考)	344	第 20 章 不等式选讲(新高考不考)	405
15.4 概率的应用	355	20.1 绝对值不等式	407
		20.2 均值不等式	411
		20.3 柯西不等式	413

第2章 函数

函数在高考数学中占比大,有直接考查和间接考查,通常有2~3道题,总分为10~15分,以选择题和填空题的形式出现,且其难度并不确定。本章收录的是基础题和中档题。函数思想贯穿数学始终,要能理解和掌握函数及其思想,可进一步促进其他模块的学习与进步。

对勾函数: $f(x) = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$;

定义域: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

值域: $(-\infty, -2\sqrt{ab}) \cup (2\sqrt{ab}, +\infty)$;

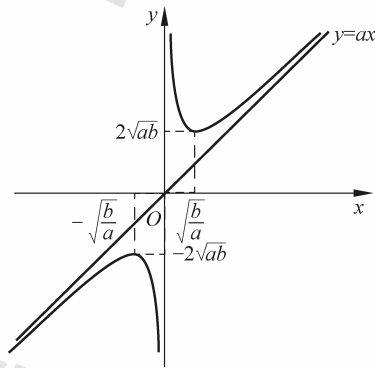
单调性: 递增区间为 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$ 和 $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$;

递减区间为 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ 和 $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$;

极值: $f_{\text{极大值}}(-\sqrt{\frac{b}{a}}) = -2\sqrt{ab}$, $f_{\text{极小值}}(\sqrt{\frac{b}{a}}) = 2\sqrt{ab}$;

奇偶性: 奇函数;

渐近线: $x=0$ 和 $y=ax$ 。



刷题散点图

让我们用数学的思想来备战高考数学,如统计中的散点图可展示出数据的分布和聚合情况,甚至可以得到趋势线公式。大道至简,请在刷题后完成属于你的本章刷题散点图,直接用你刷题的黑笔在题号上标出即可,做对画√,做错画×。

完成后,根据题号的分布和聚合情况,合理安排你的二刷甚至三刷。

2.1	67	68	69	70	71	72	153	154	155	156	157	158	
	73	74	75	76	77	78	159	160	161	162	163	164	
	79	80	81	82	83		165	166	167	168	169	170	
2.2							171	172	173	174			
	84	85	86	87	88	89	2.7	175	176	177	178	179	180
	90	91	92	93	94	95		181	182	183	184	185	186
	96	97	98	99	100	101		187	188	189	190	191	
2.3							2.8	192	193	194	195	196	197
	102	103	104	105	106	107		198	199	200	201	202	203
	108	109	110					204	205	206			
2.4							2.9	207	208	209	210	211	212
	111	112	113	114	115	116		213	214	215	216	217	218
	117	118	119	120	121	122		219	220	221	222	223	224
	123	124	125					225	226	227	228		
2.5							2.10	229	230	231	232	233	234
	126	127	128	129	130	131		235	236	237	238	239	240
	132	133	134	135	136	137		241	242	243	244	245	246
	138	139	140	141	142	143		247	248	249	250		
	144	145	146										
2.6													
	147	148	149	150	151	152							

2.1 计算

核心笔记

指数运算公式:

$$\begin{aligned}
 (1) a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; (2) a^m \div a^n = a^{m-n}; (3) (a^m)^n = a^{mn}; (4) a^m \cdot b^m = (ab)^m; \\
 (5) a^{-n} &= \frac{1}{a^n}; (6) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; \\
 (7) a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m}; (8) a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.
 \end{aligned}$$

对数运算公式(a, M, N 均为正数, $a \neq 1$):

$$\begin{aligned}
 (1) \log_a M + \log_a N &= \log_a MN; \\
 (2) \log_a M - \log_a N &= \log_a \frac{M}{N}; (3) a^{\log_a N} = N; \\
 (4) \log_a M^m &= m \log_a M, \log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M = \log_a M^{\frac{1}{n}}, \log_{a^n} M^m = \frac{m}{n} \log_a M.
 \end{aligned}$$

类型一: 指数对数综合运算

方法: 熟悉各个公式顺向与逆向, 根据具体结构使用合适公式计算就行。

【67】(2015·四川·12·))

 $\lg 0.01 + \log_2 16$ 的值是_____。

【68】(2016·上海·))

 若 $\log_2(x+1)=3$, 则 $x=$ _____。

【69】(2014·陕西·12·))

 已知 $4^a=2, \lg x=a$, 则 $x=$ _____。

【70】(2022·浙江·7·))

 已知 $2^a=5, \log_8 3=b$, 则 $4^{a-3b}=($ _____)。

 A. 25 B. 5 C. $\frac{25}{9}$ D. $\frac{5}{3}$

【71】(2012·上海·))

 方程 $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ 的解为_____。

【72】(2015·上海·8·))

 方程 $\log_2(9^{x-1}-5) = \log_2(3^{x-1}-2) + 2$ 的解为_____。

【73】(2013·浙江·3·))

 已知 x, y 为正实数, 则()。

A. $2^{\lg x + \lg y} = 2^{\lg x} + 2^{\lg y}$

B. $2^{\lg(x+y)} = 2^{\lg x} \cdot 2^{\lg y}$

C. $2^{\lg x \cdot \lg y} = 2^{\lg x} + 2^{\lg y}$

D. $2^{\lg(xy)} = 2^{\lg x} \cdot 2^{\lg y}$

【74】(2010·四川·3·))

 $2\log_5 10 + \log_5 0.25 = ($ _____)。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

【75】(2015·安徽·11·))

 计算: $\lg \frac{5}{2} + 2\lg 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$ _____。

【76】(2014·安徽·11·))

 $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} + \log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{4}{5} =$ _____。

【77】(2011·四川·13·))

 计算: $\left(\lg \frac{1}{4} - \lg 25\right) \div 100^{-\frac{1}{2}} =$ _____。

类型二: 换底公式

方法: 熟悉换底公式及其变形, 根据代数特征合理使用公式。

$$\text{换底公式: } \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \Leftrightarrow \frac{\log_b N}{\log_a N} =$$

$$\log_b a \Leftrightarrow \log_b a \cdot \log_a N = \log_b N.$$

$$\text{特例: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

推论： $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \cdots \cdot \log_y z = \log_a z$ ；

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} = \frac{\log_c N}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_b a \cdot \log_c N = \log_b N \cdot \log_c a.$$

【78】(2020·新课标全国一·8·★★)

设 $a \log_3 4 = 2$, 则 $4^{-a} = (\quad)$ 。

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

【79】(2012·安徽·3·★)

$\log_2 9 \times \log_3 4 = (\quad)$ 。

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

【80】(2013·陕西·3·★)

设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数, 则下列等式中恒成立的是 $(\quad)$ 。

- A. $\log_a b \cdot \log_c b = \log_c a$
B. $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$
C. $\log_a (bc) = \log_a b \cdot \log_a c$
D. $\log_a (b+c) = \log_a b + \log_a c$

【81】(2014·四川·7·★★)

已知 $b > 0, \log_5 b = a, \lg b = c, 5^d = 10$, 则下列等式一定成立的是 $(\quad)$ 。

- A. $d = ac$ B. $a = cd$
C. $c = ad$ D. $d = a + c$

【82】(2021·天津·7·★★)

若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (\quad)$ 。

- A. -1 B. $\lg 7$
C. 1 D. $\log_7 10$

【83】(2010·辽宁·10·★★★)

设 $2^a = 5^b = m$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$, 则 $m = (\quad)$ 。

- A. $\sqrt{10}$ B. 10 C. 20 D. 100

2.2 函数的定义域

核心笔记

定义域的求法：(通常需要从函数解析式结构入手, 以保证解析式有意义)

(1) 若 $f(x)$ 是整式, 则 $x \in \mathbf{R}$;

(2) 若 $f(x)$ 是分式, 即 $f(x) = \frac{1}{g(x)}$,

则 $g(x) \neq 0$;

(3) 若 $f(x)$ 是奇次根式, 即 $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ (其中 $n \in \mathbf{N}^*$), 则 $g(x) \in \mathbf{R}$;

若 $f(x)$ 是偶次根式, 即 $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ (其中 $n \in \mathbf{N}^*$), 则 $g(x) \geq 0$;

(4) 若 $f(x) = x^0$, 则 $x \neq 0$; 若 $f(x) = 0^x$, 则 $x > 0$;

(5) 若 $f(x) = \log_a x$ (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则 $x > 0$ 。

类型一：具象型函数

方法：观察判断函数整体结构与局部结构, 写出相应不等式, 而后解不等式取交集即可。

【84】(2022·北京·11·★)

函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【85】(2015·重庆·3·★)

函数 $f(x) = \log_2(x^2 + 2x - 3)$ 的定义域是 $(\quad)$ 。

- A. $[-3, 1]$
B. $(-3, 1)$
C. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

D. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ **【86】** (2019 · 江苏 · 4 ·)函数 $y = \sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是_____。**【87】** (2018 · 江苏 · 5 ·)函数 $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 1}$ 的定义域为_____。**【88】** (2004 · 重庆 · 1 ·)函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是()。

- A. $[1, +\infty)$ B. $(\frac{2}{3}, +\infty)$
 C. $[\frac{2}{3}, 1]$ D. $(\frac{2}{3}, 1]$

【89】 (2022 · 上海春季 · 13 ·)下列函数定义域为 $\mathbf{R}$ 的是()。

- A. $y = x^{-\frac{1}{2}}$ B. $y = x^{-1}$
 C. $y = x^{\frac{1}{3}}$ D. $y = x^{\frac{1}{2}}$

【90】 (2013 · 山东 · 5 ·)函数 $f(x) = \sqrt{1-2^x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 的定义域为()。

- A. $(-3, 0]$
 B. $(-3, 1]$
 C. $(-\infty, -3) \cup (-3, 0]$
 D. $(-\infty, -3) \cup (-3, 1]$

【91】 (2020 · 北京 · 11 ·)函数 $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x$ 的定义域为_____。**【92】** (2004 · 湖南 · 1 ·)函数 $y = \lg(1 - \frac{1}{x})$ 的定义域为()。A. $\{x | x < 0\}$ B. $\{x | x > 1\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$ **【93】** (2013 · 重庆 · 3 ·)函数 $y = \frac{1}{\log_2(x-2)}$ 的定义域为()。

- A. $(-\infty, 2)$
 B. $(2, +\infty)$
 C. $(2, 3) \cup (3, +\infty)$
 D. $(2, 4) \cup (4, +\infty)$

【94】 (2014 · 山东 · 3 ·)函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$ 的定义域为()。

- A. $(0, \frac{1}{2})$
 B. $(2, +\infty)$
 C. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$
 D. $(0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$

【95】 (2015 · 湖北 · 6 ·)函数 $f(x) = \sqrt{4-|x|} + \lg \frac{x^2-5x+6}{x-3}$ 的定义域为()。

- A. $(2, 3)$ B. $(2, 4]$
 C. $(2, 3) \cup (3, 4]$ D. $(-1, 3) \cup (3, 6]$

【96】 (2009 · 江西 · 2 ·)函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域是_____。**【97】** (2005 · 湖北 · 13 ·)函数 $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} \lg \sqrt{4-x}$ 的定义域是_____。

【98】(2008·安徽·13·★★)

函数 $y = \frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域是_____。

类型二：抽象型函数

方法：在同一对应法则 f 之下，所有代数式的范围相同(具有相同意义)。

【99】(2013·大纲·4·★★)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$ ，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为()。

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, -\frac{1}{2})$
C. $(-1, 0)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

【100】(2008·江西·3·★★)

若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是()。

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 1)$
C. $[0, 1) \cup (1, 4]$ D. $(0, 1)$

【101】(2006·湖北·4·★★)

设 $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$ ，则 $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{2}{x})$ 的定义域为()。

- A. $(-4, 0) \cup (0, 4)$
B. $(-4, -1) \cup (1, 4)$
C. $(-2, -1) \cup (1, 2)$
D. $(-4, -2) \cup (2, 4)$

2.3 分段函数与函数计算

核心笔记

1. 求分段函数值首先需要确定所求函数值对应的自变量的所属区间，然后代入该

段表达式求值。

2. 给定函数值求变量问题，先考虑每一段函数的函数值，若能判断所给函数值所属函数，则直接构建方程解方程即可；若无法确定所给函数值的所属函数，则分类讨论变量所属区间并代入相应函数解析式进而解方程，再判断所求解是否满足假设前提，满足保留，不满足则舍去。

类型一：求函数值

方法：(1) 确定所求值的自变量的所属区间，然后按该段表达式求值；

(2) 由内到外，内层的 y 充当外层的 x 。

【102】(2015·新课标全国二·5·★★)

设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1, \\ 2^{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$$

则 $f(-2) + f(\log_2 12) = ()$ 。

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

【103】(2015·陕西·4·★★)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 2^x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{则}$$

$f(f(-2)) = ()$ 。

- A. -1 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

【104】(2012·江西·3·★★)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ \lg x, & x > 1, \end{cases} \quad \text{则}$$

$f[f(10)] = ()$ 。

- A. $\lg 101$ B. 2 C. 1 D. 0

【105】(2012·陕西·11·)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 0, \end{cases} \text{ 则}$$

$$f[f(-4)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

类型二：由函数值求参数

方法：对于参数引起的变量不确定需要对变量所属区间一一讨论。

【106】(2021·浙江·12·)

$$\text{已知 } a \in \mathbf{R}, \text{ 函数 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x > 2, \\ |x - 3| + a, & x \leq 2. \end{cases} \text{ 若 } f(f(\sqrt{6})) = 3,$$

$$\text{则 } a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【107】(2015·山东·10·)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} 3x - b, & x < 1, \\ 2^x, & x \geq 1, \end{cases} \text{ 若}$$

$$f\left(f\left(\frac{5}{6}\right)\right) = 4, \text{ 则 } b = (\quad).$$

$$\text{A. } 1 \quad \text{B. } \frac{7}{8} \quad \text{C. } \frac{3}{4} \quad \text{D. } \frac{1}{2}$$

【108】(2015·新课标全国一·10·)

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1, \\ -\log_2(x+1), & x > 1, \end{cases}$$

且 $f(a) = -3$, 则 $f(6-a) = (\quad)$.

$$\text{A. } -\frac{7}{4} \quad \text{B. } -\frac{5}{4} \quad \text{C. } -\frac{3}{4} \quad \text{D. } -\frac{1}{4}$$

【109】(2017·山东·9·)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 2(x-1), & x \geq 1, \end{cases} \text{ 若 } f(a) =$$

$$f(a+1), \text{ 则 } f\left(\frac{1}{a}\right) = (\quad).$$

$$\text{A. } 2 \quad \text{B. } 4 \quad \text{C. } 6 \quad \text{D. } 8$$

【110】(2011·江苏·11·)

$$\text{已知实数 } a \neq 0, \text{ 函数 } f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 1, \\ -x - 2a, & x \geq 1, \end{cases} \text{ 若 } f(1-a) = f(1+a), \text{ 则 } a \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

2.4 函数的单调性

核心笔记

1. 函数单调性的判断方法：

(1) 图像法：分段函数单调性用图像法更直观；

(2) 性质法：初等函数模型直接使用函数性质判断即可；

(3) 复合法：复合函数单调性的判断专属，首先要分清内外层函数，再分别找出内外层函数的极值点(外层函数极值点要和内层函数相等求解转为内层变量)，其次在数轴上把内层极值点和通过外层极值点转化而来的所有数标识出来，接着判断每一段区间上内层的单调性，还要判断在相应区间上内层的值域，再说明内层函数产生的范围使得外层函数具备怎样的单调性，最后再使用“同增异减”来复合判断函数的单调性；

(4) 求导法：通过对函数求导，在定义域上解得导数为正的区间即为函数的递增区间，导数为负的区间即为函数的递减区间。

2. 单调性的四则运算：增+增=增；减+减=减；增-减=增；减-增=减。

类型一：性质法判断单调性

方法：熟识所学初等函数的性质。

【111】(2021·新课标全国甲·4·))

下列函数是增函数的是()。

A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

【112】(2019·北京·3·))

下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是()。

A. $y = x^{\frac{1}{2}}$ B. $y = 2^{-x}$

C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = \frac{1}{x}$

【113】(2014·北京·2·))

下列函数中，在 $(0, +\infty)$ 上是增函数的是()。

A. $y = \sqrt{x+1}$ B. $y = (x-1)^2$

C. $f(x) = 2^{-x}$ D. $y = \log_{0.5}(x+1)$

【114】(2010·北京·6·))

给定函数：① $y = x^{\frac{1}{2}}$ ；② $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ ；
③ $y = |x-1|$ ；④ $y = 2^{x+1}$ ，其中在区间 $(0, 1)$ 上单调递减的函数序号是()。

A. ①② B. ②③

C. ③④ D. ①④

类型二：复合法判断复合函数单调性

方法：分清内外层函数，确定内层函数单调性并对其产生的范围判断外层函数单调性，进而使用“同增异减”进行判断。

【115】(2014·天津·4·))

函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$ 的单调递增区间是()。

A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$

C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2)$

【116】(2017·新课标全国二·8·))

函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是()。

A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, 1)$

C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

【117】(2023·新高考全国一·4·))

设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是()。

A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$

C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

【118】(2023·新课标全国甲·11·))

已知函数 $f(x) = e^{-(x-1)^2}$ 。记 $a =$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ ，则()。

A. $b > c > a$ B. $b > a > c$

C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

类型三：函数单调性的应用

方法：熟识函数单调性的定义及其变形。

(1) 对任意的 $x_1 \neq x_2$ ，且 $x_1, x_2 \in D$ ，则：

若 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ 或 $[f(x_2) -$

 $f(x_1)](x_2 - x_1) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 D 上单调递减；

若 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 或 $[f(x_2) -$

 $f(x_1)](x_2 - x_1) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 D 上单调递增。(2) 如果 $f(x)$ 在 D 上单调递增，若

$f(x_1) > f(x_2)$ ，则 $x_1 > x_2$ 且 $x_1, x_2 \in D$ ；

如果 $f(x)$ 在 D 上单调递减，若 $f(x_1) >$

$f(x_2)$ ，则 $x_1 < x_2$ 且 $x_1, x_2 \in D$ 。

【119】(2009·福建·5·J)

下列函数中,满足“对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ”的是()。

- A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = (x-1)^2$
C. $f(x) = e^x$ D. $f(x) = \ln(x+1)$

【120】(2009·陕西·10·J)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1 \neq x_2$, 且 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 则()。

- A. $f(3) < f(2) < f(4)$
B. $f(1) < f(2) < f(3)$
C. $f(2) < f(1) < f(3)$
D. $f(3) < f(1) < f(0)$

【121】(2008·辽宁·9·J)

已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的增函数, 则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是()。

- A. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
C. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

【122】(2007·福建·7·J)

已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f(\frac{1}{x}) > f(1)$ 的 x 的取值范围是()。

- A. $(-\infty, 1)$
B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

【123】(2015·山东·14·J)

已知函数 $f(x) = a^x + b (a > 0, a \neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1, 0]$, 则 $a + b =$ _____。

【124】(2006·北京·5·J)

已知 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x \leq 1, \\ \log_a x, & x > 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数, 那么 a 的取值范围是()。

- A. $(0, 1)$ B. $(0, \frac{1}{3})$
C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$ D. $[\frac{1}{7}, 1)$

【125】(2022·浙江·14·J)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2+2, & x \leq 1, \\ x+\frac{1}{x}-1, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(\frac{1}{2})) =$ _____; 若当 $x \in [a, b]$ 时, $1 \leq f(x) \leq 3$, 则 $b-a$ 的最大值是 _____。

2.5 指对幂比较大小

核心笔记

1. 观察代数式结构归纳出函数, 结合函数单调性进一步比较大小。

2. 寻求中间量过度比较大小:

(1) 比较 a, b 大小可先判断 a, b 和 0 之间的大小关系;

(2) 若 $a > 0, b > 0$, 则接着判断 a, b 和 1 的大小关系;

(3) 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则可以继续选择 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ 这类数字进一步判断。

类型一：构造函数比较大小

方法：观察并调整代数结构归纳函数，使用函数单调性比较大小。

【126】(2011·重庆·6·)

设 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}, c = \log_3 \frac{4}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系是()。

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

【127】(2015·山东·3·)

设 $a = 0.6^{0.6}, b = 0.6^{1.5}, c = 1.5^{0.6}$, 则 a, b, c 的大小关系是()。

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

【128】(2016·新课标全国三·6·)

已知 $a = 2^{\frac{4}{3}}, b = 4^{\frac{2}{5}}, c = 25^{\frac{1}{3}}$, 则()。

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【129】(2016·新课标全国一·8·)

若 $a > b > 0, 0 < c < 1$, 则()。

- A. $\log_a c < \log_b c$ B. $\log_c a < \log_c b$
C. $a^c < b^c$ D. $c^a > c^b$

【130】(2023·天津·3·)

若 $a = 1.01^{0.5}, b = 1.01^{0.6}, c = 0.6^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小关系为()。

- A. $c > a > b$ B. $c > b > a$
C. $a > b > c$ D. $b > a > c$

【131】(2005·全国三·6·)

若 $a = \frac{\ln 2}{2}, b = \frac{\ln 3}{3}, c = \frac{\ln 5}{5}$, 则()。

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

类型二：简单寻求中间量+函数单调性比较大小

方法：(1) 观察并调整代数结构归纳函数，使用函数单调性比较大小；

(2) 寻求中间量过渡比较大小，诸如 $0, 1, 2, \dots$ 。

【132】(2019·新课标全国一·3·)

已知 $a = \log_2 0.2, b = 2^{0.2}, c = 0.2^{0.3}$, 则()。

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

【133】(2012·天津·4·)

已知 $a = 2^{1.2}, b = 2^{0.8}, c = 2 \log_5 2$, 则 a, b, c 的大小关系为()。

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

【134】(2020·天津·6·)

设 $a = 3^{0.7}, b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}, c = \log_{0.7} 0.8$, 则 a, b, c 的大小关系为()。

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【135】(2006·天津·4·)

设 $P = \log_2 3, Q = \log_3 2, R = \log_2 (\log_3 2)$, 则()。

- A. $R < Q < P$ B. $P < R < Q$
C. $Q < R < P$ D. $R < P < Q$

【136】(2018·天津·5·)

已知 $a = \log_2 e, b = \ln 2, c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为()。

c 的大小关系为()。

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

【137】(2014·安徽·5·)

设 $a = \log_3 7$, $b = 2^{1.1}$, $c = 0.8^{3.1}$, 则()。

- A. $b < a < c$ B. $c < a < b$
C. $c < b < a$ D. $a < c < b$

【138】(2007·天津·4·)

设 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}$, $c = 2^{\frac{1}{3}}$, 则()。

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

【139】(2018·天津·5·)

已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则

a, b, c 的大小关系为()。

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

类型三：估值过渡量比较大小

方法：寻求中间量过渡比较大小，诸如 0，

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \dots$ ，要求能把中间两个写成指

数或者对数形式，比如 $\frac{1}{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\log_2 \frac{1}{2}}$ 。

【140】(2014·天津·4·)

设 $a = \log_2 \pi$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \pi$, $c = \pi^{-2}$, 则()。

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

【141】(2019·天津·5·)

已知 $a = \log_2 7$, $b = \log_3 8$, $c = 0.3^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为()。

- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【142】(2021·新高考全国二·7·)

若 $a = \log_5 2$, $b = \log_8 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则()。

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$
C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

【143】(2020·新课标全国三·10·)

设 $a = \log_3 2$, $b = \log_5 3$, $c = \frac{2}{3}$, 则()。

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【144】(2019·天津·6·)

已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_{0.5} 0.2$, $c = 0.5^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为()。

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【145】(2013·新课标全国二·8·)

设 $a = \log_3 2$, $b = \log_5 2$, $c = \log_2 3$, 则()。

- A. $a > c > b$ B. $b > c > a$
C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【146】(2011·天津·7·)

若 $a = 5^{\log_2 3.4}$, $b = 5^{\log_4 3.6}$, $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$,

则()。

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

2.6 函数的奇偶性

核心笔记

1. 函数的奇偶性定义

一般地，图像关于原点对称的函数叫作

奇函数。在奇函数 $f(x)$ 中, $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的绝对值相等, 符号相反, 即 $f(-x) = -f(x)$ (变形 $f(-x) + f(x) = 0$ 或 $\frac{f(-x)}{f(x)} = -1$)。

图像关于 y 轴对称的函数叫作偶函数。在偶函数 $f(x)$ 中, $f(x)$ 和 $f(-x)$ 相等, 即 $f(-x) = f(x)$ (变形 $f(-x) - f(x) = 0$ 或 $\frac{f(-x)}{f(x)} = 1$)。偶函数满足 $f(x) = f(|x|) = f(-x)$ 。

判断奇偶对称的前提是判断定义域是否关于原点对称。若定义域关于原点不对称, 则函数非奇非偶; 定义域包含 0 的奇函数必过原点。

2. 常见函数奇偶的判断(假设以下所有函数定义域都关于原点对称)

$$y = x^n (n \text{ 为奇数}) \quad \text{奇函数};$$

$$y = x^n (n \text{ 为偶数}) \quad \text{偶函数};$$

$$y = \sin kx (k \neq 0) \quad \text{奇函数};$$

$$y = \cos kx (k \neq 0) \quad \text{偶函数};$$

$$y = \tan kx (k \neq 0) \quad \text{奇函数};$$

$$y = a^x + a^{-x} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \quad \text{偶函数};$$

$$y = a^x - a^{-x} \text{ 和 } y = a^{-x} - a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \quad \text{奇函数};$$

$$y = \frac{a^x \pm 1}{a^x \mp 1} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \text{ 和 } y = \frac{1 \pm a^x}{1 \mp a^x}$$

$$(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \quad \text{奇函数};$$

$$y = \log_a \frac{b \pm cx}{b \mp cx} (b \neq 0, c \neq 0) \text{ 和 } y =$$

$$\log_a (\sqrt{1+b^2x^2} \pm bx) (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, b \neq 0) \quad \text{奇函数};$$

$$y = \ln(e^{ax} + 1) - \frac{ax}{2} \quad \text{偶函数}。$$

3. 函数奇偶的运算

奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数;

偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数;

奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数;

奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数;

偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数;

奇函数 $\pm$ 偶函数 = 非奇非偶函数。

类型一：函数奇偶性的判断

方法：(1) 先判断函数的定义域, 定义域关于原点对称是判断函数奇偶性的先决条件;

(2) $f(-x) = -f(x)$ (奇函数), $f(-x) = f(x)$ (偶函数), 也可使用奇偶的变形判断, 如 $f(-x) + f(x) = 0$ (奇函数), $f(-x) - f(x) = 0$ (偶函数);

(3) 记忆常见初等函数模型掌握其性质, 并结合奇偶四则运算, 也可快速判断出奇偶性。

【147】(2012·广东·4·)

下列函数为偶函数的是()。

A. $y = \sin x$

B. $y = x^3$

C. $y = e^x$

D. $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$

【148】(2015·福建·3·)

下列函数为奇函数的是()。

A. $y = \sqrt{x}$

B. $y = |\sin x|$

C. $y = \cos x$

D. $y = e^x - e^{-x}$

【149】(2015·北京·3·)

下列函数中为偶函数的是()。

A. $y = x^2 \sin x$

B. $y = x^2 \cos x$

C. $y = |\ln x|$

D. $y = 2^{-x}$

【150】(2015·广东·3·)

下列函数中,既不是奇函数,也不是偶函数的是()。

- A. $y = x + \sin 2x$ B. $y = x^2 - \cos x$
C. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ D. $y = x^2 + \sin x$

【151】(2015·广东·3·)

下列函数中,既不是奇函数,也不是偶函数的是()。

- A. $y = \sqrt{1+x^2}$ B. $y = x + \frac{1}{x}$
C. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ D. $y = x + e^x$

【152】(2010·广东·3·)

若函数 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ 与 $g(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 则()。

- A. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数
B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数
C. $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数
D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数

【153】(2022·北京·4·)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$, 则对任意的实数 x , 有()。

- A. $f(-x) + f(x) = 0$
B. $f(-x) - f(x) = 0$
C. $f(-x) + f(x) = 1$
D. $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$

【154】(2009·全国二·3·)

函数 $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$ 的图像()。

- A. 关于原点对称
B. 关于直线 $y = -x$ 对称

C. 关于 y 轴对称

D. 关于直线 $y = x$ 对称

类型二：由奇偶性求参数

方法：(1) 若 $f(x)$ 具有奇偶性, 则其定义域必然关于原点对称, 且其图像特征也是关于原点或是 y 轴对称的。可以使用定义域的对称求参数, 或是使用特殊点, 比如零点也是对称的。

(2) 可以通过 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) = f(x)$ 形成方程, 使用待定系数法求解参数。

(3) 可以结合奇偶四则运算剥离含参函数并确定其奇偶, 再使用(1)或(2)。

【155】(2012·重庆·12·)

若 $f(x) = (x+a)(x-4)$ 是偶函数, 则实数 $a =$ 。

【156】(2011·辽宁·6·)

若函数 $f(x) = \frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数, 则 $a =$ ()。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

【157】(2023·新课标全国·甲·13·)

若 $y = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ 。

【158】(2006·全国一·13·)

已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$ 。若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ 。

【159】(2015·山东·8·)

若函数 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - a}$ 是奇函数, 则使 $f(x) > 3$ 成立的 x 的取值范围为()。

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$
C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【160】(2023·新课标全国乙·4·★★)

已知 $f(x) = \frac{x e^x}{e^{ax} - 1}$ 是偶函数, 则 $a =$

()。

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【161】(2010·江苏·5·★★)

设函数 $f(x) = x(e^x + a e^{-x}) (x \in \mathbf{R})$ 是偶函数, 则实数 $a =$ 。

【162】(2021·新高考全国一·13·★★)

已知函数 $f(x) = x^3(a 2^x - 2^{-x}) (x \in \mathbf{R})$ 是偶函数, 则实数 $a =$ 。

【163】(2023·新高考全国二·4·★★)

若 $f(x) = (x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则

$a =$ ()。

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【164】(2015·新课标全国一·13·★★)

若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 是偶函数, 则实数 $a =$ 。

【165】(2014·湖南·15·★★★)

若 $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax$ 是偶函数, 则实数 $a =$ 。

类型三：利用奇偶性求函数解析式与函数值

方法：(1) 设所求区间量, 根据对称性通过所设变量表示对称区间变量, 代入对称区间变量所在解析式, 再结合奇偶性化简得所求解析式;

(2) 利用对称性求得所求变量对称量函数值, 再由对称性求得所求变量函数值;

(3) 结合平移知识可以把具有中心对称或者轴对称的函数问题转化为具有奇偶性的函数进行求解; 或者通过调整函数结构转为利用函数奇偶性求解问题。

【166】(2019·新课标全国二·6·★★)

设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ()。

A. $e^{-x} - 1$ B. $e^{-x} + 1$
C. $-e^{-x} - 1$ D. $-e^{-x} + 1$

【167】(2017·新课标全国二·14·★★)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = 2x^3 + x^2$, 则 $f(2) =$ 。

【168】(2019·新课标全国二·14·★★)

已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -e^{ax}$ 。若 $f(\ln 2) = 8$, 则 $a =$ 。

【169】(2021·新课标全国乙·4·★★)

设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()。

A. $f(x-1) - 1$ B. $f(x-1) + 1$
C. $f(x+1) - 1$ D. $f(x+1) + 1$

【170】(2011·广东·12·★★)

设函数 $f(x) = x^3 \cos x + 1$, 若 $f(a) = 11$, 则 $f(-a) =$ 。

【171】(2013·湖南·4·★★)

已知 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 且 $f(-1) + g(1) = 2$, $f(1) + g(-1) = 4$, 则 $g(1)$ 等于 ()。

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【172】(2011·湖北·3·★★)

若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x) + g(x) = e^x$, 则 $g(x) =$ ()。

A. $e^x - e^{-x}$ B. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
C. $\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ D. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

【173】(2008·安徽·11·))

若函数 $f(x), g(x)$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数、偶函数, 且满足 $f(x) - g(x) = e^x$, 则有()。

- A. $f(2) < f(3) < g(0)$
 B. $g(0) < f(3) < f(2)$
 C. $f(2) < g(0) < f(3)$
 D. $g(0) < f(2) < f(3)$

【174】(2023·新高考全国一·11·))

(多选题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则()。

- A. $f(0) = 0$
 B. $f(1) = 0$
 C. $f(x)$ 是偶函数
 D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

2.7 函数的对称性与周期性及其应用

核心笔记

函数的对称性

函数的奇偶性是函数特殊的对称性, 偶函数关于 y 轴对称, 奇函数关于原点对称, 若将具有奇偶性的函数进行上下左右平移, 虽然有可能不具有奇偶性, 但其对称中心和对称轴依然保留, 依然具有对称性。函数的对称中心和对称轴的判断还需结合平移伸缩综合判断, 其中涉及常数分离、先局部后整体等方法。

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(b-x)$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{a+b}{2}$ 。

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = -f(b-x)$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的对称中心 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 。

(3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = c - f(b-x)$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 。

函数的周期性

1. 定义: 一般地, 对于函数 $f(x)$, 如果存在非零实数 T , 对任意的 $x \in D$, 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数, T 为这个函数的周期。

2. 常见函数周期的判断

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) + f(x+b) = c$ (a, b, c 为常数), 则 $T = 2|a-b|$ 。

特例: ① 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $T = 2|a|$;

② 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(x) + c$, 则 $T = 2|a|$ 。

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) \cdot f(x+b) = c$ (a, b, c 为常数), 则 $T = 2|a-b|$ 。

特例: ① 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$ (a 为常数), 则 $T = 2|a|$;

② 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$ (a 为常数), 则 $T = 2|a|$ 。

(3) 若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 和点 $(b, 0)$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, $T = 2|a-b|$ 。

(4) 若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和直线 $x=b$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, $T=2|a-b|$ 。

(5) 若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 和直线 $x=b$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, $T=4|a-b|$ 。

类型一：求函数值

方法：(1) 判断函数的周期性, 核心笔记里给出了常见函数的周期判断;

(2) 利用周期性将所求变量调整至已知解析式的区间上, 进而代入求解即可。

【175】(2019·上海·6·))

已知函数 $f(x)$ 周期为 1, 且当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = -\log_2 x$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____。

【176】(2014·四川·13·))

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的函数, 当 $x \in [-1, 1)$ 时, $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$ 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____。

【177】(2018·江苏·9·))

函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x) (x \in \mathbf{R})$, 且在区间 $(-2, 2]$ 上, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ \left|x + \frac{1}{2}\right|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(15))$ 的值为_____。

类型二：判断周期性并求函数值

方法：判断函数的周期性, 并由变量间的

函数值关系确定已知函数值和未知函数值间的关系。

【178】(2021·新课标全国甲·12·))

设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(1+x) = f(-x)$ 。若 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, 则

$f\left(\frac{5}{3}\right) =$ _____。

A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

【179】(2008·四川·9·))

函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cdot f(x+2) = 13$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(99) =$ _____。

A. 13 B. 2 C. $\frac{13}{2}$ D. $\frac{2}{13}$

【180】(2006·安徽·15·))

函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$, 若 $f(1) = -5$, 则 $f(f(5)) =$ _____。

【181】(2006·山东·5·))

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为_____。

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

类型三：周期性和奇偶性综合问题求函数值

方法：(1) 利用周期性和奇偶性将所求变量调整至已知解析式的区间上, 进而代入求解即可;

(2) 结合定义深度理解周期定义并求周期, 能利用两条对称轴、两个对称中心或一个对称中心与一条对称轴求周期。

【182】(2012·浙江·16·))

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的

偶函数,当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x + 1$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____。

【183】 (2011 · 大纲 · 10 ·)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x(1-x)$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) =$ ()。

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【184】 (2008 · 湖北 · 6 ·)

已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数, 且 $f(x+4) = f(x)$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) = 2x^2$, 则 $f(7) =$ ()。

A. -2 B. 2 C. -98 D. 98

【185】 (2010 · 安徽 · 4 ·)

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 5 的奇函数, 且满足 $f(1) = 1, f(2) = 2$, 则 $f(3) - f(4) =$ ()。

A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

【186】 (2016 · 四川 · 14 ·)

若函数 $f(x)$ 是定义 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = 4^x$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) + f(2) =$ _____。

【187】 (2014 · 安徽 · 14 ·)

若函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是周期为 4 的奇函数, 且在 $[0, 2]$ 上的解析式为

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \sin \pi x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

则 $f\left(\frac{29}{4}\right) + f\left(\frac{41}{6}\right) =$ _____。

【188】 (2014 · 新课标全国二 · 15 ·)

已知偶函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$

对称, 若 $f(3) = 3$, 则 $f(-1) =$ _____。

【189】 (2017 · 山东 · 14 ·)

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+4) = f(x-2)$ 。若当 $x \in [-3, 0]$ 时, $f(x) = 6^{-x}$, 则 $f(919) =$ _____。

【190】 (2018 · 新课标全国二 · 11 ·)

已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$ 。若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + \dots + f(50) =$ ()。

A. -50 B. 0 C. 2 D. 50

【191】 (2012 · 山东 · 8 ·)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6) = f(x)$, 当 $-3 \leq x < -1$ 时, $f(x) = -(x+2)^2$, 当 $-1 \leq x < 3$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2012) =$ ()。

A. 335 B. 338 C. 1678 D. 2012

2.8 函数性质的综合问题

核心笔记

1. 熟识初等函数的性质且能在多项式函数中逐块判断单调性与奇偶性, 并对多项式函数的单调性与奇偶性做进一步判断。

2. 奇函数关于原点对称的两个区间单调性一致, 偶函数关于原点对称的两个区间单调性相反。

类型一：单调性综合类问题

方法：(1) 熟识初等函数的单调性且要结合单调性四则运算进一步判断多项式函数单调性；

(2) 复合函数单调性的判断要领是“同增异减”。

【192】(2016·北京·5·★★)

已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x > y > 0$, 则()。

- A. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0$
 B. $\sin x - \sin y > 0$
 C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y < 0$
 D. $\ln x + \ln y > 0$

【193】(2019·新课标全国二·6·★★)

若 $a > b$, 则()。

- A. $\ln(a-b) > 0$ B. $3^a < 3^b$
 C. $a^3 - b^3 > 0$ D. $|a| > |b|$

【194】(2020·新课标全国二·11·★★)

若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则()。

- A. $\ln(y-x+1) > 0$ B. $\ln(y-x+1) < 0$
 C. $\ln|x-y| > 0$ D. $\ln|x-y| < 0$

【195】(2019·北京·13·★★)

设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数)。若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____; 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是 _____。

类型二：单调性与奇偶性的综合判断

方法：(1) 熟识初等函数的单调性且要结合单调性四则运算进一步判断多项式函数的单调性；

(2) 熟识初等函数的奇偶性且要结合奇偶性四则运算进一步判断多项式函数的奇偶性。

【196】(2012·陕西·2·★★)

下列函数中, 既是奇函数又是增函数的是()。

- A. $y = x + 1$ B. $y = -x^3$

C. $y = \frac{1}{x}$

D. $y = x|x|$

【197】(2020·新课标全国二·10·★★)

设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ ()。

- A. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 B. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减
 C. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 D. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

【198】(2015·湖南·5·★★)

设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是()。

- A. 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 上是增函数
 B. 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 上是减函数
 C. 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 上是增函数
 D. 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 上是减函数

【199】(2020·新课标全国二·9·★★)

设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$, 则 $f(x)$ ()。

- A. 是偶函数, 且在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上是增函数
 B. 是奇函数, 且在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上是减函数
 C. 是偶函数, 且在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上是增函数
 D. 是奇函数, 且在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上是减函数

类型三：函数与不等式

方法：结合单调性与奇偶性能将函数值间的不等关系转为自变量间的不等关系。

【200】(2017·新课标全国一·5·★★)

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且为奇函数。若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是()。

- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$
C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

【201】(2010·新课标全国·9·))

设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4 (x \geq 0)$, 则 $\{x | f(x-2) > 0\} = ()$ 。

- A. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$
B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$
C. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$
D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$

【202】(2005·重庆·3·))

若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(2) = 0$, 则使得 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是()。

- A. $(-\infty, 2)$
B. $(2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
D. $(-2, 2)$

【203】(2014·新课标全国二·15·))

已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $f(2) = 0$ 。若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围是_____。

【204】(2016·天津·6·))

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增。若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是()。

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$
C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

【205】(2008·全国一·9·))

设奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的

解集为()。

- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

【206】(2020·新高考全国一·8·))

若定义在 $\mathbf{R}$ 上奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是()。

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$
B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

2.9 函数的图像

核心笔记

一、初等函数的图像与性质

1. 幂函数的图像与性质

幂函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$x \neq 0$
值域	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$y \neq 0$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性 ($x > 0$)	单调递增	单调递增	单调递增	单调递增	单调递减
公共点	(1, 1)				

幂函数 $y=x^a$ 在第一象限的重要结论:

(1) 恒过点 $(1, 1)$;

(2) 当 $x \in (0, 1)$ 时, a 越大, 函数值越小; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, a 越大, 函数值越大;

(3) 在直线 $x=1$ 的右侧, 图像由上至下对应的指数 a 由大到小;

(4) 在 y 轴和直线 $x=1$ 之间, 图像由上至下对应的指数 α 由小到大。

2. 指数函数的图像与性质

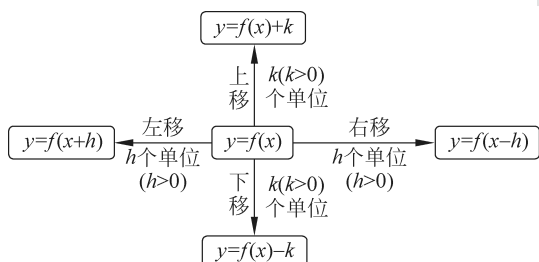
函数	$y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$)	
	$0<a<1$	$a>1$
图像		
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$(0, +\infty)$	
性质	过定点 $(0,1)$	
	减函数	增函数

3. 对数函数的图像与性质

函数	$y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$)	
	$a>1$	$0<a<1$
图像		
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$\mathbf{R}$	
性质	过定点 $(1,0)$	
	当 $x>1$ 时, $y>0$; 当 $0<x<1$ 时, $y<0$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增	当 $x>1$ 时, $y<0$; 当 $0<x<1$ 时, $y>0$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减

二、函数图像的变换与对称

(1) 平移变换



(2) 对称变换

① $y=f(x)$ 和 $y=-f(x)$ 关于 x 轴对称;

② $y=f(x)$ 和 $y=f(-x)$ 关于 y 轴对称;

③ $y=f(x)$ 和 $y=-f(-x)$ 关于原点对称;

④ $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 和 $y=\log_a x$ 关于直线 $y=x$ 对称。

(3) 翻折变换

① $y=f(x) \xrightarrow[\text{将 } x \text{ 轴下方图像翻折上去}]{\text{保留 } x \text{ 轴及上方图像}} y=|f(x)|$;

② $y=f(x) \xrightarrow[\text{关于 } y \text{ 轴对称的图像}]{\text{保留 } y \text{ 轴及右边图像, 并作其}} y=f(|x|)$ 。

(4) 伸缩变换

① $y=f(x)$

$a>1$, 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍, 纵坐标不变

$0<a<1$, 横坐标伸长为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍, 纵坐标不变

$y=f(ax)$;

② $y=f(x)$

$a>1$, 纵坐标伸长为原来的 a 倍, 横坐标不变

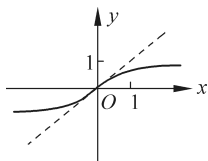
$0<a<1$, 纵坐标缩短为原来的 a 倍, 横坐标不变

$y=af(x)$ 。

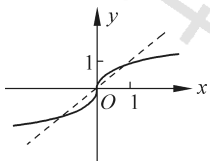
类型一：初等函数的图像综合判断

方法：熟识初等函数的图像和性质并加以应用。

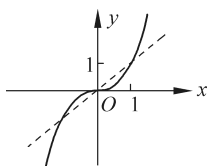
【207】(2011·陕西·4·)

函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像是()。

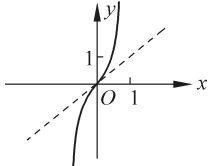
A.



B.



C.



D.

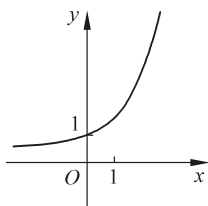
【208】(2004·湖北·5·)

若函数 $y=a^x+b-1$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图像经过第二、第三、第四象限, 则一定有()。

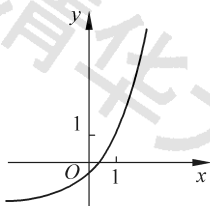
A. $0<a<1$ 且 $b>0$ B. $a>1$ 且 $b>0$ C. $0<a<1$ 且 $b<0$ D. $a>1$ 且 $b<0$

【209】(2012·四川·5·)

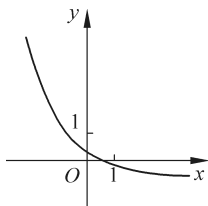
函数 $y=a^x-\frac{1}{a}$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图像可能是()。



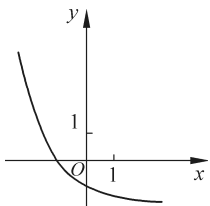
A.



B.

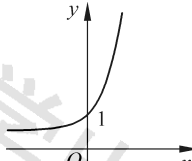


C.

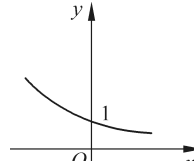


D.

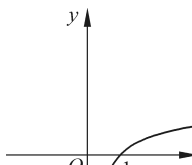
【210】(2010·四川·2·)

函数 $y=\log_2 x$ 的图像大致是()。

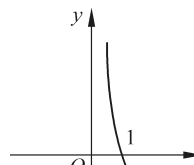
A.



B.



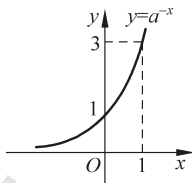
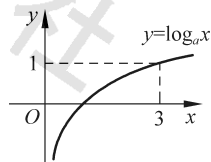
C.



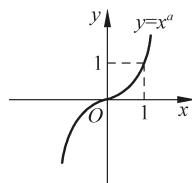
D.

【211】(2014·福建·8·)

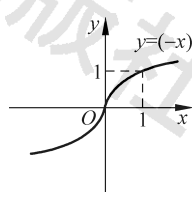
若函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图像如下图所示, 则下列函数正确的是()。



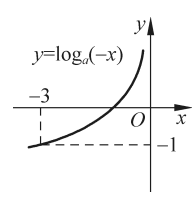
A.



B.



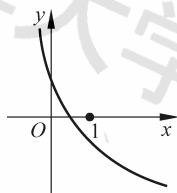
C.



D.

【212】(2014·山东·6·)

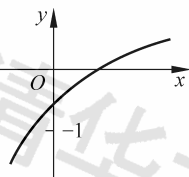
已知函数 $y = \log_a(x+c)$ (a, c 为常数, 其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像如图所示, 则下列结论成立的是()。



- A. $a > 1, c > 1$
 B. $a > 1, 0 < c < 1$
 C. $0 < a < 1, c > 1$
 D. $0 < a < 1, 0 < c < 1$

【213】(2008·山东·12·)

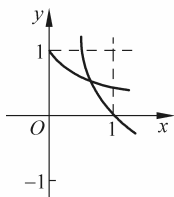
已知函数 $y = \log_a(2^x + b - 1)$ (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像如图所示, 则 a, b 满足的关系是()。



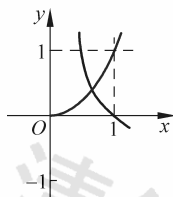
- A. $0 < a^{-1} < b < 1$
 B. $0 < b < a^{-1} < 1$
 C. $0 < b^{-1} < a < 1$
 D. $0 < a^{-1} < b^{-1} < 1$

【214】(2014·浙江·8·)

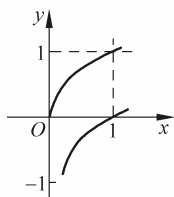
在同一坐标系中, 函数 $f(x) = x^a$ ($x > 0$), $g(x) = \log_a x$ 的图像可能是()。



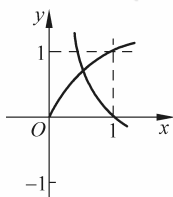
A.



B.



C.

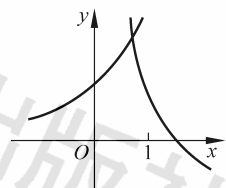


D.

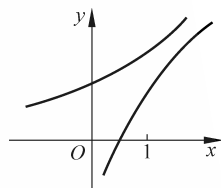
【215】(2019·浙江·6·)

在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y =$

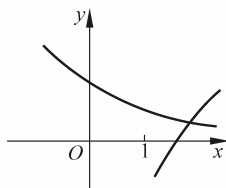
$\log_a\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像可能是()。



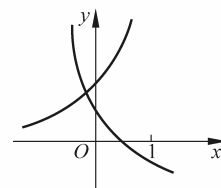
A.



B.



C.



D.

【216】(2012·四川·4·)

为了得到函数 $y = 2^{x-3} - 1$ 的图像, 只需把函数 $y = 2^x$ 上所有点()。

- A. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
 B. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
 C. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 D. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

【217】(2011·重庆·5·)

下列区间中, 函数 $f(x) = |\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的是()。

- A. $(-\infty, 1]$ B. $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$
 C. $\left[0, \frac{3}{2}\right)$ D. $[1, 2)$

类型二：函数的图像综合判断

方法：(1) 判断函数的定义域、单调性、奇

偶性、对称性以及零点等特殊点；

(2) 对比多个图像的不同之处进行判断。

【218】(2022·新课标全国乙·8·))

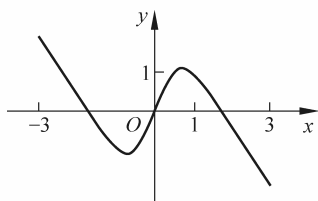
如图所示是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3, 3]$ 的大致图像, 则该函数是()。

A. $\frac{-x^3+3x}{x^2+1}$

B. $y = \frac{x^3-x}{x^2+1}$

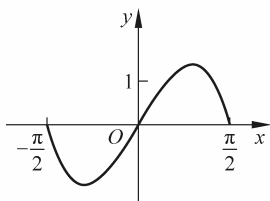
C. $y = \frac{2x \cos x}{x^2+1}$

D. $y = \frac{2 \sin x}{x^2+1}$

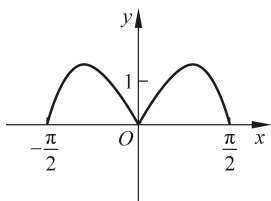


【219】(2022·新课标全国甲·5·))

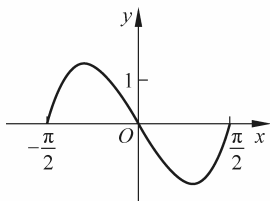
函数 $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图像大致为()。



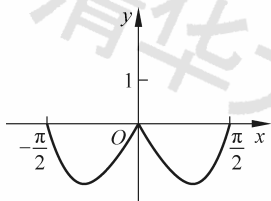
A.



B.



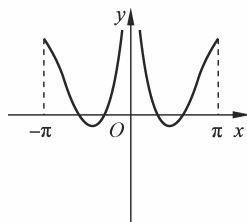
C.



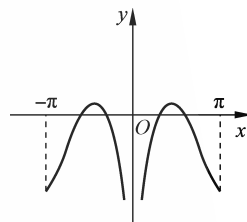
D.

【220】(2015·浙江·5·))

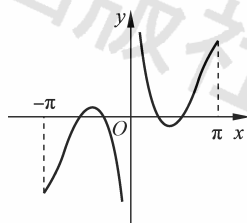
函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图像可能为()。



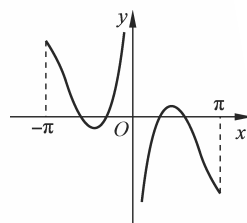
A.



B.



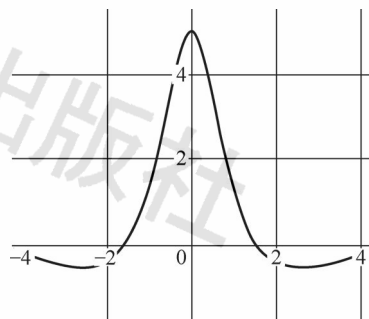
C.



D.

【221】(2023·天津·4·))

函数 $f(x)$ 的图像如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为()。



A. $\frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2+2}$

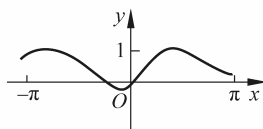
B. $\frac{5 \sin x}{x^2+1}$

C. $\frac{5(e^2 + e^{-x})}{x^2+2}$

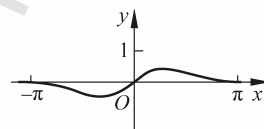
D. $\frac{5 \cos x}{x^2+1}$

【222】(2019·新课标全国一·5·))

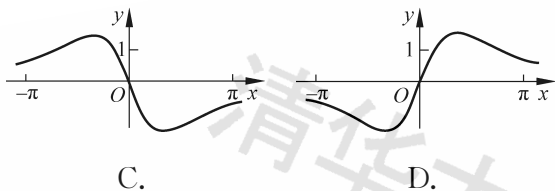
函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图像大致为()。



A.

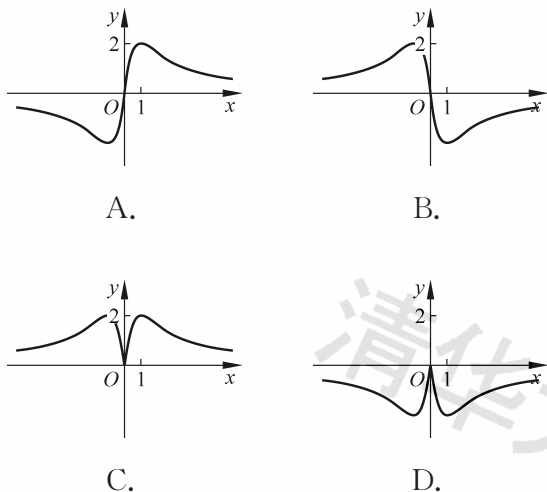


B.



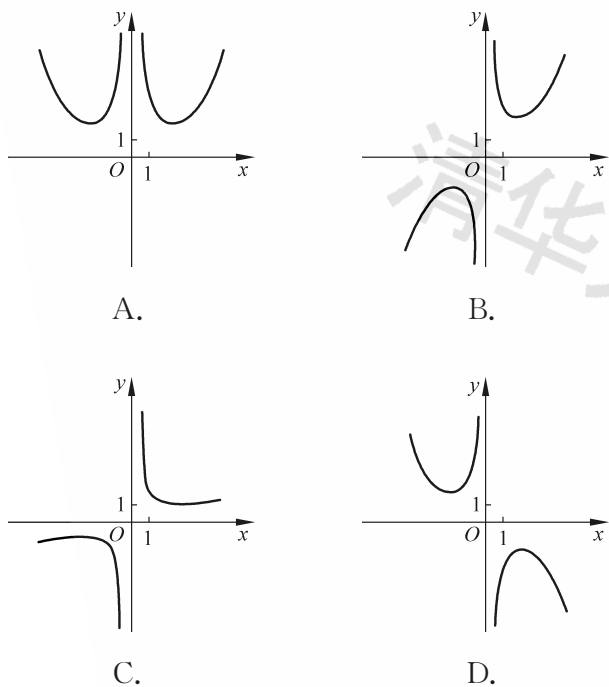
【223】(2020·天津·3·★★★)

函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图像大致为()。



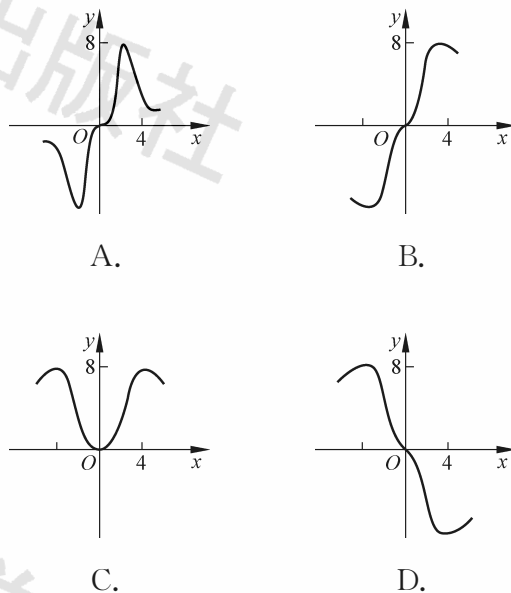
【224】(2018·新课标全国二·3·★★★)

函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为()。



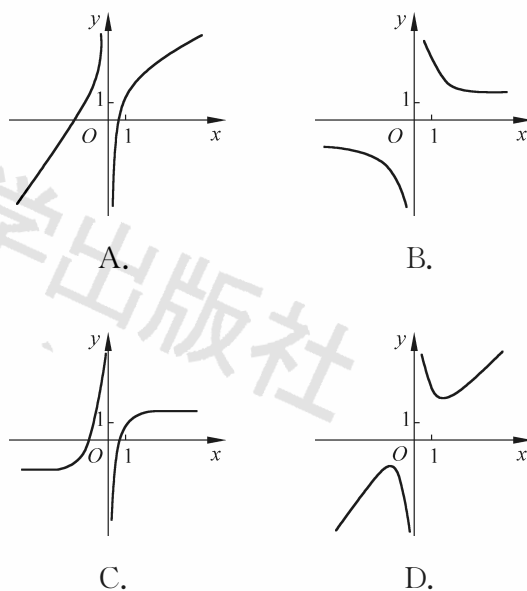
【225】(2019·新课标全国三·7·★★★)

函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 上的图像大致为()。



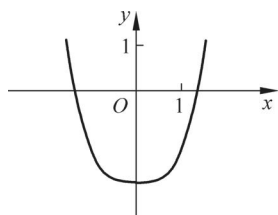
【226】(2017·新课标全国三·7·★★★)

函数 $y = 1 + x + \frac{\sin x}{x^2}$ 的部分图像大致为()。

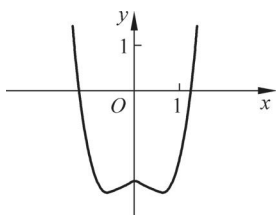


【227】(2018·新课标全国三·7·33)

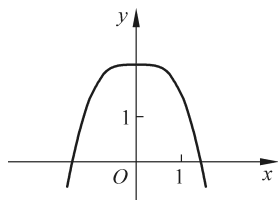
函数 $y = -x^4 + x^2 + 2$ 的图像大致为()。



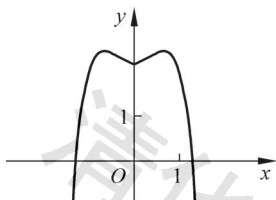
A.



B.



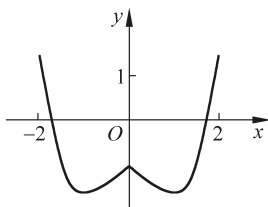
C.



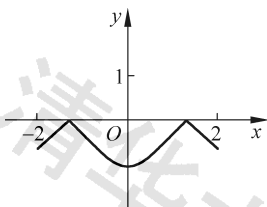
D.

【228】(2016·新课标全国一·7·33)

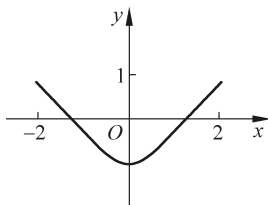
函数 $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 在 $[-2, 2]$ 上的图像大致为()。



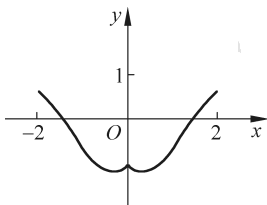
A.



B.



C.



D.

2.10 函数与方程

核心笔记

1. 函数零点与方程的根的转化

方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴有交点。

2. 零点存在定理

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点, 即至少存在一个 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, 这个 c 也是方程 $f(x) = 0$ 的根。

注意: 应用零点存在定理说明零点唯一存在的时候函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上应满足连续且单调, 且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么函数在 (a, b) 上存在唯一的 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, 这个 c 也是方程 $f(x) = 0$ 的唯一根。

类型一: 利用零点存在定理判断零点所在区间

方法: 判断函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且单调以及 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上有唯一零点。

【229】(2010·天津·2·3)

函数 $f(x) = 2^x + 3x$ 的零点所在的一个区间是()。

- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$
C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

【230】(2014·上海春季·19·)

设 x_0 为函数 $f(x)=2^x+x-2$ 的零点, 则 $x_0 \in$ ()。

- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$
C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

【231】(2010·天津·4·)

函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是()。

- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$
C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

【232】(2011·新课标全国·10·)

在下列区间中, 函数 $f(x)=e^x+4x-3$ 的零点所在的区间为()。

- A. $(-\frac{1}{4}, 0)$ B. $(0, \frac{1}{4})$
C. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

【233】(2007·山东·11·)

设函数 $y=x^3$ 与 $y=(\frac{1}{2})^{x-2}$ 的图像的交点为 (x_0, y_0) , 则 x_0 所在区间是()。

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

【234】(2014·北京·6·)

已知函数 $f(x)=\frac{6}{x}-\log_2 x$, 在下列区间

内, 包含 $f(x)$ 零点的区间是()。

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(2, 4)$ D. $(4, +\infty)$

【235】(2013·重庆·6·)

若 $a < b < c$, 则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间()。

- A. (a, b) 和 (b, c) 内
B. $(-\infty, a)$ 和 (a, b) 内
C. (b, c) 和 $(c, +\infty)$ 内
D. $(-\infty, a)$ 和 $(c, +\infty)$ 内

类型二：判断零点个数

方法：(1) 初等函数或是由初等函数组合而成的简单函数画图数零点；

(2) 将零点问题转为直线和曲线相交问题, 画图数交点；

(3) 令函数等于 0, 将零点个数问题转化为方程的根的个数问题。

【236】(2012·北京·5·)

函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-(\frac{1}{2})^x$ 的零点个数为()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【237】(2013·湖南·6·🔥)

函数 $f(x) = \ln x$ 的图像与函数 $g(x) = x^2 - 4x + 4$ 的图像的交点个数为()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【238】(2013·湖南5·🔥)

函数 $f(x) = 2\ln x$ 的图像与 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ 的图像的交点个数为()。

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【239】(2011·陕西·6·🔥)

方程 $|x| = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内()。

- A. 没有根 B. 有且仅有一个根
C. 有且仅有两个根 D. 有无穷多个根

【240】(2013·天津·7·🔥)

已知函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 的零点个数为()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【241】(2015·江苏·13·🔥🔥)

已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1, \end{cases}$ 则方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 实根的个数为_____。

【242】(2012·湖北·9·🔥)

函数 $f(x) = x \cos x^2$ 在区间 $[0, 4]$ 上的零点个数为()。

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【243】(2014·福建·15·🔥🔥)

函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ 2x - 6 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数是_____。

类型三：由零点个数求解参数

方法：(1) 半参数分离：将函数零点问题转化为曲线和绕定点旋转的直线相交问题；或转化为曲线和斜率为定值且在 y 轴截距不定的相交问题，注意借助导数计算临界状态相切。

(2) 全参数分离：将函数零点问题转化为曲线和水平直线相交问题。

【244】(2015·湖南·14·🔥)

若函数 $f(x) = |2^x - 2| - b$ 有两个零点，
则实数 b 的取值范围是_____。

【245】(2004·湖南·16·🔥🔥)

若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|$ ($a > 0$
且 $a \neq 1$) 的图像有两个公共点，则 a 的取
值范围是_____。

【246】(2011·北京·13·🔥🔥)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2, \\ (x-1)^3, & x < 2, \end{cases}$ 若关

于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根，
则数 k 的取值范围是_____。

【247】(2019·天津·8·🔥🔥🔥)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1, \end{cases}$ 若关

于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有
两个互异的实数解，则 a 的取值范围

为()。

- A. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$
C. $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right) \cup \{1\}$ D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \cup \{1\}$

【248】(2011·辽宁·16·🔥🔥🔥)

已知函数 $f(x) = e^x - 2x + a$ 有零点，则 a
的取值范围是_____。

【249】(2015·湖南·15·🔥🔥🔥)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a, \\ x^2, & x > a, \end{cases}$ 若存在实
数 b ，使得函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零
点，则 a 的取值范围是_____。

【250】(2018·浙江·15·🔥🔥🔥)

已知 $\lambda \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq \lambda, \\ x^2-4x+3, & x < \lambda, \end{cases}$

当 $\lambda = 2$ 时，不等式 $f(x) < 0$ 的解集
是_____，若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，
则 λ 的取值范围是_____。

清华大学出版社

答案详解

全书真题免费视频讲解



B 站(哔哩哔哩)

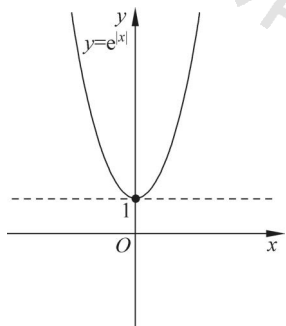


微信公众号

清华大学出版社

清华大学出版社

真。故选 A。



1.13 充分条件与必要条件

【57】A。

提示：方法一（定义法）： $\begin{cases} p \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q, \\ r \not\Rightarrow p \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} p \Rightarrow q, \\ q \not\Rightarrow p \end{cases}$ 。

方法二（集合法）： $P \subsetneq R, R \subseteq S, S \subseteq Q$ ，则 $P \subsetneq Q$ ，故 p 是 q 的充分不必要条件。故选 A。

【58】B。

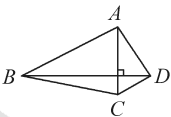
提示：设 p 为“便宜”， q 为“好货”，依据题意， $p \Rightarrow \neg q$ 等价于其逆否命题 $q \Rightarrow \neg p$ ，即“不便宜”是“好货”的必要条件。故选 B。

【59】A。

提示： $\begin{cases} q \Rightarrow \neg p \\ \neg p \not\Rightarrow q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \not\Rightarrow p \end{cases}$ ，即 p 是 $\neg q$ 的充分不必要条件。故选 A。

【60】A。

提示：令 p ：“四边形 $ABCD$ 是菱形”， q ：“ $AC \perp BD$ ”。由菱形性质可知 $p \Rightarrow q$ ，但由菱形定义“对角线相互垂直的平行四边形”得 $p \not\Leftarrow q$ 。如图所示，对角线 $AC \perp BD$ ，但四边形 $ABCD$ 不是菱形，故 p 是 q 的充分不必要条件。故选 A。



【61】A。

提示：命题 $p: x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5) > 0 \Rightarrow x < -4$ 或 $x > 5$ ，即 $x \in (-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$ ；命题 $q: \frac{1-x^2}{|x|-2} < 0$ ，此不等式含有分母、绝对值，要去分母就需分类讨论：①当 $|x|-2 > 0$ 时， $1-x^2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ；②当 $|x|-2 < 0$ 时， $1-x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$ ，即 $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ 。可见，集合 $P \subsetneq Q$ ，故命题 p 是 q 的充分不必要条件。故选 A。

【62】B。

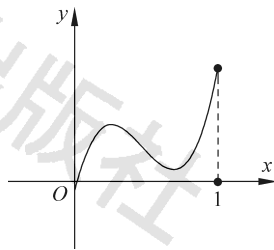
提示： $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow (a-b) \cdot c = 0 \Rightarrow$ （由于 a, b, c 是非零向量，此时需分类讨论）当 $a-b=0$ 时， $a=b$ ；当 $a-b \neq 0$ 时， $(a-b) \perp c$ 。

$a=b \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow (a-b) \cdot c = 0$ ，即“ $a \cdot c = b \cdot c$ ” $\nRightarrow$ “ $a=b$ ”，“ $a=b$ ” $\Rightarrow$ “ $a \cdot c = b \cdot c$ ”，故选 B。

注意：不可在 $a \cdot c = b \cdot c$ 两边同时除以 c ，我们没有学向量的除法哦！

【63】A。

提示：令 p ：“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”， q ：“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”，由函数单调性定义可知 $p \Rightarrow q$ 。如图所示，此时满足最大值为 $f(1)$ ，但 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是单调递增，即 $p \not\Leftarrow q$ ，故 p 是 q 的充分不必要条件。故选 A。



【64】D。

提示：线面垂直的判定定理。故选 D。

【65】B。

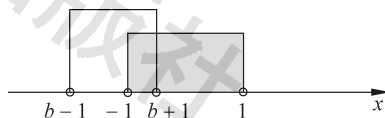
提示：理解“ $\frac{a}{|a|}$ ”的含义，即此向量为单位向量，模为 1。

题中 $\frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}$ ，两向量相等除了大小（模）相等，还需方向相同。故选 B。

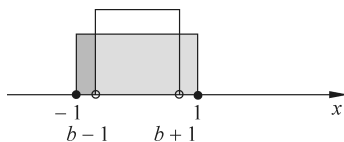
【66】D。

提示： $A = \{x | -1 < x < 1\}$ ，当 $a = 1$ 时， $B = \{x | b-1 < x < b+1\}$ ，要使 $A \cap B \neq \emptyset$ ，以下三种情况均可。

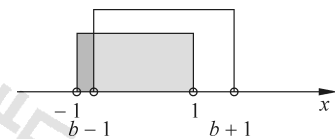
① $b-1 < -1 < b+1 < 1 \Rightarrow -2 < b < 0$ 。



② $-1 \leq b-1 < b+1 \leq 1 \Rightarrow b = 0$ 。



③ $-1 < b-1 < 1 < b+1 \Rightarrow 0 < b < 2$ 。



综上所述， $b \in (-2, 2)$ ，即找 $(-2, 2)$ 的子集即可。故选 D。

第2章 函数

2.1 计算

类型一：指数对数综合运算

【67】2。

提示： $\lg 0.01 = \lg 10^{-2} = -2$ ，而 $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ ，则原

式 $= -2 + 4 = 2$ 。

【68】7。

提示：因为 $\log_2 8 = 3$ ，所以 $\log_2 (x+1) = 3 = \log_2 8$ ，即 $x+1=8$ ，解得 $x=7$ 。

或由 $a^{\log_a N} = N$ 得 $2^{\log_2 (x+1)} = x+1 = 2^3$ ，解得 $x=7$ 。

【69】 $\sqrt{10}$ 。

提示：由 $4^a = 2^{2a} = 2$ 可得 $2a = 1$ ，所以 $a = \frac{1}{2}$ 。又 $\lg x = a = \frac{1}{2} = \lg 10^{\frac{1}{2}}$ ，进而可得 $x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 。

或是通过 $\lg x = a$ 可得 $10^{\lg x} = 10^a = 10^{\frac{1}{2}}$ ，得 $x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 。

【70】C。

提示：因为 $2^a = 5$ ， $\log_8 3 = b$ ，所以 $4^a = (2^a)^2 = 25$ ， $8^b = 2^{3b} = (4^{3b})^{\frac{1}{2}} = 3$ ，则 $4^{a-3b} = \frac{4^a}{4^{3b}} = \frac{25}{3} = \frac{25}{9}$ 。故选 C。

【71】 $x = \log_2 3$ 。

提示：通过观察得 $4^x - 2^{x+1} - 3 = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 = (2^x - 3)(2^x + 1) = 0$ ，因为 $2^x + 1 > 0$ ，故 $2^x - 3 = 0$ ，即 $2^x = 3$ ，两边取对数得 $x = \log_2 3$ 。

【72】2。

提示：由题意知 $\log_2 (3^{x-1} - 2) + 2 = \log_2 (3^{x-1} - 2) + \log_2 4 = \log_2 [4(3^{x-1} - 2)] = \log_2 (9^{x-1} - 5)$ ，即 $4(3^{x-1} - 2) = (3^2)^{x-1} - 5 = (3^{x-1})^2 - 5$ ，则 $4(3^{x-1} - 2) = (3^{x-1})^2 - 5 \Leftrightarrow (3^{x-1})^2 - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = (3^{x-1} - 1)(3^{x-1} - 3) = 0$ ，所以 $3^{x-1} - 1 = 0$ 或 $3^{x-1} - 3 = 0$ ，解得 $x = 1$ 或 $x = 2$ 。

你以为这样就结束了么？那你还是太年轻了，指数为正还记得吗？当 $x = 1$ 时， $3^{x-1} - 2 < 0$ ， $9^{x-1} - 5 < 0$ 不合题意，而 $x = 2$ 是可以满足 $3^{x-1} - 2 > 0$ ， $9^{x-1} - 5 > 0$ 的，故 $x = 2$ 。

【73】D。

提示：由 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 和 $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ 可得 $2^{\lg x} \cdot 2^{\lg y} = 2^{\lg x + \lg y} = 2^{\lg(xy)}$ 。故选 D。

【74】C。

提示：同底对数相加没问题，但系数不一致，那就从调整系数开始，盘题……

$2 \log_5 10 + \log_5 0.25 = 2 \log_5 10 + \log_5 0.5^2 = 2 \log_5 10 + 2 \log_5 0.5 = 2 [\log_5 (10 \times 0.5)] = 2 \log_5 5 = 2$ ，也可以 $2 \log_5 10 + \log_5 0.25 = \log_5 10^2 + \log_5 0.25 = \log_5 (10^2 \times 0.25) = \log_5 25 = 2$ 。故选 C。

不论是哪种方法操作都要保持系数一致和底数一致。

【75】-1。

提示：通过观察 $\lg \frac{5}{2} + 2 \lg 2$ 是同底对数相加没问题，但系数不一样，那就调整系数一致， $\lg \frac{5}{2} + 2 \lg 2 = \lg \frac{5}{2} + \lg 2^2 = \lg \left(\frac{5}{2} \times 2^2 \right) = \lg 10 = 1$ ，而 $\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2$ ，进而原式 $= 1 - 2 = -1$ 。

【76】 $\frac{27}{8}$ 。

提示： $\left(\frac{16}{81} \right)^{-\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{2}{3} \right)^4 \right]^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-3} = \frac{27}{8}$ ，而

$\log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{4}{5} = \log_3 \left(\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \right) = \log_3 1 = 0$ ，所以原式 $= \frac{27}{8}$ 。

【77】-20。

提示：由观察得 $\lg \frac{1}{4}$ 与 $\lg 25$ 底数系数相同，直接上公式

$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ ，得 $\lg \frac{1}{4} - \lg 25 = \lg \frac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2$ ，而 $100^{-\frac{1}{2}} = 10^{2 \times (-\frac{1}{2})} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ ，则原式 $= -2 \div \frac{1}{10} = -20$ 。

类型二：换底公式

【78】B。

提示：由 $a \log_3 4 = 2$ 可得 $a = \frac{2}{\log_3 4} = \frac{2}{\log_3 2^2} = \frac{2}{2 \log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$ （此处使用了 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ），所以 $4^{-a} = 2^{-2a} = (2^a)^{-2} = (2^{\log_2 3})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ 。故选 B。

【79】D。

提示： $\log_2 9 \times \log_3 4 = \log_2 3^2 \times \log_3 2^2 = 2 \log_2 3 \times 2 \log_3 2 = 4 \log_2 3 \times \log_3 2 = 4$ 。故选 D。

或由 $\log_b a \cdot \log_c N = \log_b N \cdot \log_c a$ 得 $\log_2 9 \times \log_3 4 = \log_2 4 \times \log_3 9 = 2 \times 2 = 4$ 。

【80】B。

提示：这道题考查的是换底公式的变形，也就是说我们不仅要每一个公式熟悉，也要对其变形熟悉。

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_c a \log_a b = \log_c b$ 。故选 B。

【81】B。

提示：由 $5^d = 10$ 取对数得 $d = \log_5 10$ 。此时通过观察得 c, a 真数相同，而真数相同的对数作比可以使用换底公式

的变形，故由 $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \Leftrightarrow \frac{\log_b N}{\log_a N} = \log_b a$ 得 $\frac{a}{c} = \frac{\log_5 b}{\lg b} = \log_5 10 = d$ ，即 $a = cd$ 。故选 B。

或由 $\log_5 b = a$ 得 $5^a = b$ ，又 $5^d = 10$ ， $\lg b = c$ ，故 $(5^d)^c = 10^{\lg b} = b$ ，即 $5^{dc} = b = 5^a$ ，故 $a = cd$ 。

【82】C。

提示：由题意知 $2^a = 5^b = 10$ ，取对数得 $a = \log_2 10$ ， $b = \log_5 10$ ，那么 $\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_2 10} = \lg 2$ ， $\frac{1}{b} = \frac{1}{\log_5 10} = \lg 5$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$ 。故选 C。

【83】A。

提示：由题意知 $2^a = 5^b = m$ ，取对数得 $a = \log_2 m, b = \log_5 m, m > 0$ ，那么 $\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_2 m} = \log_m 2, \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_5 m} = \log_m 5$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_m 2 + \log_m 5 = \log_m 10 = 2$ ，所以 $\log_m 10 = \log_m m^2$ ，或由 $a^{\log_a N} = N$ 得 $m^{\log_m 10} = m^2 = 10$ ，所以 $m^2 = 10$ ，故 $m = \sqrt{10}$ 。故选 A。

2.2 函数的定义域

类型一：具象型函数

【84】 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ 。

提示：由题意知 $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$ 所以 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ 。

【85】D。

提示：又是一个对数哦，真数为正走起，得 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) > 0$ ，解得 $x > 1$ 或 $x < -3$ ，即 $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ 。故选 D。

【86】 $[-1, 7]$ 。

提示：这是一个二次根式，则只需 $7+6x-x^2 \geq 0$ ，即 $x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7) \leq 0$ 。解得 $-1 \leq x \leq 7$ ，即 $x \in [-1, 7]$ 。

【87】 $[2, +\infty)$ 。

提示：观察可得这依然是个二次根式，则只需 $\log_2 x - 1 \geq 0$ ，即 $\log_2 x \geq 1 = \log_2 2$ ，则 $x \geq 2$ ，但结束了吗？必然没有，我们不能忘记对数自带真数为正的光环，即 $x > 0$ ，得 $x \in [2, +\infty)$ 。

解到这里虽然通过真数为正对答案没影响，但我们仍需要考虑，或许下一次就影响了呢。

【88】D。

提示：又是一个二次根式，则需 $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \geq 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$ ，还有真数 $3x-2 > 0$ 哦！

因为 $0 < \frac{1}{2} < 1$ ，所以解对数不等式要注意变号，即 $0 < 3x-2 \leq 1$ ，解得 $\frac{2}{3} < x \leq 1$ ，即 $x \in (\frac{2}{3}, 1]$ 。故选 D。

【89】C。

提示：A: $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，其定义域为 $(0, +\infty)$ 。

B: $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ ，其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 。

D: $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ，其定义域为 $[0, +\infty)$ 。

C: $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ ，其定义域为 $\mathbf{R}$ 。故选 C。

【90】A。

提示：这道题既出现了偶次根式又出现了分式，则 $1-2^x \geq 0, x+3 > 0$ ，解得 $-3 < x \leq 0$ ，即 $x \in (-3, 0]$ 。故选 A。

【91】 $(0, +\infty)$ 。

提示：由分式分母不为 0 可得 $x+1 \neq 0$ ，再由真数为正得 $x > 0$ ，解得 $x > 0$ ，故 $x \in (0, +\infty)$ 。

【92】D。

提示：由真数为正和分母不为 0 得 $1 - \frac{1}{x} > 0, x \neq 0$ ，解得 $x > 1$ 或 $x < 0$ ，即 $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 。故选 D。

【93】C。

提示：由分式分母不为 0 和真数为正可得 $\log_2(x-2) \neq 0 = \log_2 1, x-2 > 0$ ，解得 $x > 2$ 且 $x-2 \neq 1$ ，即 $x > 2$ 且 $x \neq 3$ ，故 $x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$ 。故选 C。

【94】C。

提示：由分母不为 0、偶次根式非负及真数为正得 $(\log_2 x)^2 - 1 = (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) > 0, x > 0$ ，解 $(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) > 0$ 得 $\log_2 x > 1$ 或 $\log_2 x < -1$ ，即 $x > 2$ 或 $x < \frac{1}{2}$ 。又 $x > 0$ ，所以 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2$ ，即 $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ 。故选 C。

【95】C。

提示：由偶次根式非负得 $4 - |x| \geq 0$ ，由真数为正和分母不为 0 得 $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = x - 2 > 0, x - 3 \neq 0$ 。

分别解得 $-4 \leq x \leq 4, x > 2, x \neq 3$ ，取交集得 $2 < x < 3$ 或 $3 < x \leq 4$ ，即 $x \in (2, 3) \cup (3, 4]$ 。故选 C。

【96】 $(-1, 1)$ 。

提示：由偶次根式非负和分母不为 0 得 $-x^2 - 3x + 4 > 0$ ，即 $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) < 0$ ，解得 $-4 < x < 1$ 。

再由真数为正得 $x+1 > 0$ ，即 $x > -1$ ，取交集得 $-1 < x < 1$ ，即 $x \in (-1, 1)$ 。

【97】 $[2, 3) \cup (3, 4)$ 。

提示：由偶次根式非负和真数为正得 $x-2 \geq 0, 4-x > 0$ ，解得 $2 \leq x < 4$ 。再由分母不为 0，得 $x-3 \neq 0$ 。取交集得 $2 \leq x < 3$ 或 $3 < x < 4$ ，即 $x \in [2, 3) \cup (3, 4)$ 。

【98】 $[3, +\infty)$ 。

提示：由偶次根式非负得 $|x-2| - 1 \geq 0$ ，解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq 1$ 。再由分母不为 0 和真数为正得 $\log_2(x-1) \neq 0 = \log_2 1, x-1 > 0$ ，解得 $x \neq 2$ 且 $x > 1$ 。取交集得 $x \geq 3$ ，即 $x \in [3, +\infty)$ 。

类型二：抽象型函数

【99】B。

提示：遵循在同一对应法则 f 之下，所有代数式范围相同可得 $-1 < 2x+1 < 0$ ，解得 $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ 。故选 B。

要注意前后 x 的区别，前后都是同一个字母来表示，但不代表它们是一样的，好比叫同一个名字的若干人彼此是不一样的。

【100】B。

提示：遵循在同一对应法则 f 之下，所有代数式范围相同可得 $0 \leq 2x \leq 2$ ，解得 $0 \leq x \leq 1$ 。再由分母 $x-1 \neq 0$ 得 $x \neq 1$ ，取交集得 $0 \leq x < 1$ ，即 $x \in [0, 1)$ 。故选 B。

【101】B。

提示：对于 $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$ ，由真数为正和分母不为 0 得

$\frac{2+x}{2-x} > 0, 2-x \neq 0$, 解得 $-2 < x < 2$ 。遵循在同一对应法则 f 之下, 所有代数式范围相同可得 $-2 < \frac{x}{2} < 2, -2 < \frac{2}{x} < 2$, 解得 $-4 < x < -1$ 或 $1 < x < 4$ 。故选 B。

2.3 分段函数与函数计算

类型一：求函数值

【102】C。

提示： $f(-2) = 1 + \log_2(2+2) = 1+2=3$, 而 $1 = \log_2 2 < \log_2 12$, 所以 $f(\log_2 12) = 2^{\log_2 12 - 1} = 2^{\log_2 12 - \log_2 2} = 2^{\log_2 6} = 6$, 则 $f(-2) + f(\log_2 12) = 9$ 。故选 C。

【103】C。

提示：对于这一类复合求值问题我们的手法是从内到外求值。 $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, 则 $f[f(-2)] = f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ 。故选 C。

【104】B。

提示：求函数值问题是由内到外, 先求 $f(10) = \lg 10 = 1$, 则 $f[f(10)] = f(1) = 1^2 + 1 = 2$ 。故选 B。

【105】4。

提示：同上题, 先求 $f(-4)$, $f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$, 则 $f[f(-4)] = f(16) = \sqrt{16} = 4$ 。

类型二：由函数值求参数

【106】2。

提示：因为 $\sqrt{6} > 2$, 所以 $f(\sqrt{6}) = (\sqrt{6})^2 - 4 = 2$, 那么 $f[f(-\sqrt{6})] = f(2) = |2-3| + a = a+1 = 3$, 解得 $a = 2$ 。

【107】D。

提示：由题意知 $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \frac{5}{6} - b = \frac{5}{2} - b$, 这道题不同于上一道题, 因为不确定 $\frac{5}{2} - b$ 属于哪一段定义域, 所以需要分类讨论了。

① 当 $\frac{5}{2} - b < 1$, 即 $\frac{3}{2} < b$ 时, $f\left[f\left(\frac{5}{6}\right)\right] = f\left(\frac{5}{2} - b\right) = 3 \times \left(\frac{5}{2} - b\right) - b = \frac{15}{2} - 4b = 4$, 解得 $b = \frac{7}{8}$ 不满足 $\frac{3}{2} < b$, 故舍去。

② 当 $\frac{5}{2} - b \geq 1$, 即 $b \leq \frac{3}{2}$ 时, $f\left[f\left(\frac{5}{6}\right)\right] = f\left(\frac{5}{2} - b\right) = 2^{\frac{5}{2} - b} = 4 = 2^2$, 即 $\frac{5}{2} - b = 2$, 解得 $b = \frac{1}{2}$ 满足 $b \leq \frac{3}{2}$ 。

综上, $b = \frac{1}{2}$ 。故选 D。

【108】A。

提示：虽然 $f(a) = -3$, 但 a 不确定, 所以依然需要分类讨论。

① 当 $a \leq 1$ 时, $f(a) = 2^{a-1} - 2 = -3$, 即 $2^{a-1} = -1$, 显然没

有解。

② 当 $a > 1$ 时, $f(a) = -\log_2(a+1) = -3$, 即 $\log_2(a+1) = 3 = \log_2 8 \Rightarrow a+1 = 8$, 则 $a = 7$ 满足 $a > 1$ 。

综上 $a = 7$ 。所以 $f(6-a) = f(6-7) = f(-1) = 2^{-1-1} - 2 = -\frac{7}{4}$ 。故选 A。

【109】C。

提示：此题比较有意思, 通过对两个函数进行判断可知均为增函数, 也就是说 a 和 $a+1$ 不可能同属一个区间, 因为单调函数一一对应, 所以有 $0 < a < 1 \leq a+1$, 故 $f(a) = \sqrt{a}$, $f(a+1) = 2(a+1-1) = 2a$, 所以由 $f(a) = f(a+1)$ 得 $\sqrt{a} = 2a$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, 于是 $f\left(\frac{1}{a}\right) = f(4) = 2(4-1) = 6$ 。故选 C。

【110】 $-\frac{3}{4}$ 。

提示：同上一道题, 两个函数均是单调函数, 但不同于上一道题的地方是因为 a 的正负不定导致了两个变量大小不确定, 故而需要分类讨论：

① 当 $a > 0$ 时, $1-a < 1 < 1+a$, 则 $f(1-a) = 2(1-a) + a = -(1+a) - 2a = f(1+a)$, 解得 $a = -\frac{3}{2}$, 不满足 $a > 0$, 故舍去。

② 当 $a < 0$ 时, $1+a < 1 < 1-a$, 则 $f(1+a) = 2(1+a) + a = -(1-a) - 2a = f(1-a)$, 解得 $a = -\frac{3}{4}$, 满足 $a < 0$, 故 $a = -\frac{3}{4}$ 。

2.4 函数的单调性

类型一：性质法判断单调性

【111】D。

提示：A：正比例函数, 函数单调递增, 故 A 错误。

B：指数函数, 因为底数 $\frac{2}{3} \in (0, 1)$, 所以函数单调递减, 故 B 错误。

C：这是二次函数也是幂函数, 不是单调函数, 故 C 错误。

D： $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ 是幂函数, 指数 $\frac{1}{3} \in (0, 1)$, 函数单调递增, 故 D 正确。故选 D。

【112】A。

提示：A： $y = x^{\frac{1}{2}}$, 因为指数 $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, 所以 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 A 正确。

B： $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 因为底数 $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, 所以 $y = 2^{-x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 B 错误。

C： $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, 因为底数 $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, 所以 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 错误。

D： $y = \frac{1}{x}$ 是反比例函数也是幂函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递

减,故 D 错误。故选 A。

【113】A。

提示: B: $y=(x-1)^2$ 是二次函数,其图像开口朝上,对称轴 $x=1$,当 $x \in (0,1)$ 时,函数单调递减,当 $x \in (1,+\infty)$ 时,函数单调递增,故 B 错误。

C: $f(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是指数函数,底数 $\frac{1}{2} \in (0,1)$,所以函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,故 C 错误。

D: $y=\log_{0.5}(x+1)$ 是把指数函数 $y=\log_{0.5}x$ 向左平移了一个单位的函数,而底数 $\frac{1}{2} \in (0,1)$,所以 $y=\log_{0.5}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,故 $y=\log_{0.5}(x+1)$ 也在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,故 D 错误。

A: $y=\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 是把函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 向左平移了一个单位的函数,而指数 $\frac{1}{2} \in (0,+\infty)$,所以 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 $y=\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 也在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 A 正确。故选 A。

【114】B。

提示: 由前几题可知: ① $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增; ② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减; ③ $y=|x-1|=\begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减; ④ $y=2^{x+1}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增。所以,在区间 $(0,1)$ 上单调递减的函数序号是②③。故选 B。

类型二: 复合法判断复合函数单调性

【115】D。

提示: 由题意知 $x^2-4>0$,即 $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ 。内层函数 $t=x^2-4$ 在 $x \in (-\infty,-2)$ 上单调递减,在 $x \in (2,+\infty)$ 上单调递增且 $t=x^2-4 \in (0,+\infty)$ 。而外层函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 在 $t \in (0,+\infty)$ 上单调递减,结合复合函数“同增异减”可得 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$ 在 $x \in (-\infty,-2)$ 上单调递增,在 $x \in (2,+\infty)$ 上单调递减。故选 D。

【116】D。

提示: 方法一: $x^2-2x-8>0$,即 $x \in (-\infty,-2) \cup (4,+\infty)$ 。内层函数 $t=x^2-2x-8$ 在 $x \in (-\infty,-2)$ 上单调递减,在 $x \in (4,+\infty)$ 上单调递增且 $t=x^2-2x-8 \in (0,+\infty)$ 。而外层函数 $y=\ln t$ 在 $t \in (0,+\infty)$ 上单调递增,结合复合函数“同增异减”可得 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 在 $x \in (-\infty,-2)$ 上单调递减,在 $x \in (4,+\infty)$ 上单调递增。故选 D。

方法二: 本题也可由外到内判断,因为外层函数单调递增,求原函数的单调递增区间,可结合同增异减即求内层函数在定义域上的递增区间。 $x \in (-\infty,-2) \cup (4,+\infty)$,且内层函数 $t=x^2-2x-8$ 在 $x \in (4,+\infty)$ 上单调递增。故选 D。

【117】D。

提示: 这是一道复合函数含参单调性问题,注意分清内外

层,令 $t=x(x-a)$,则 $y=2^t$ 在 R 上单调递增,而 $y=2^{x(x-a)}$ 在 $(0,1)$ 单调递减,根据“同增异减”可得 $t=x(x-a)$

在 $(0,1)$ 单调递减,所以 $\frac{a}{2} \geq 1$,即 $a \in [2,+\infty)$ 。故选 D。

【118】A。

提示: 因为 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(x)$,所以对称轴为 $x=1$ 。

(因为 $y=e^{-x^2}$ 是偶函数,将其向右平移 1 个单位可得 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$,故 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称。)

令 $t=-(x-1)^2$,其在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,而 $y=e^t$ 在 R 上单调递增,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减。

又 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \frac{\sqrt{6}}{2}$,而 $f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,且 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2 -$

$\frac{\sqrt{6}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$,所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) < f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

即 $b > c > a$ 。故选 A。

类型三: 函数单调性的应用

【119】A。

提示: 结合函数单调性定义可得让我们寻找在 $(0,+\infty)$ 上是减函数的选项。

A: $f(x)=\frac{1}{x}$ 是反比例函数也是幂函数,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,故 A 正确。

B: $y=(x-1)^2$ 是二次函数,其图像开口朝上,对称轴 $x=1$,当 $x \in (0,1)$ 时,函数单调递减,当 $x \in (1,+\infty)$ 时,函数单调递增;故 B 错误。

C: $f(x)=e^x$ 是指数函数,其中 $e \approx 2.71828\dots$,所以底数 $e \in (1,+\infty)$,因此 $f(x)=e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 C 错误。

D: $f(x)=\ln(x+1)$ 是把 $f(x)=\ln x$ 向左平移一个单位得到的函数,而 $f(x)=\ln x$ 是对数函数,且底数 $e \in (1,+\infty)$,所以 $f(x)=\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数,因此 $f(x)=\ln(x+1)$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的增函数,故 D 错误。故选 A。

【120】D。

提示: 由题可得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(3) < f(1) < f(0)$ 。故选 D。

【121】D。

提示: 由题意知 $2x-1 < \frac{1}{3}$ 且 $0 \leq 2x-1$ (此题限定了定义域,所以必须考虑变量在定义域上),解得 $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ 。故选 D。

【122】D。

提示: 由题意得 $\frac{1}{x} < 1, x \neq 0$,即 $\frac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow x(1-x) < 0$,解得 $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 。故选 D。

【123】 $-\frac{3}{2}$ 。

提示: 因为底数 a 不确定,所以函数单调性不明确,故此题

需要分类讨论。

① 当 $a > 1$ 时, $f(x) = a^x + b$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递增, 则 $f(-1) = -1, f(0) = 0$, 即 $\frac{1}{a} + b = -1, 1 + b = 0$, 解得 $b = -1, a \in \emptyset$ (舍去)。

② 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x) = a^x + b$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 则 $f(-1) = 0, f(0) = -1$, 即 $\frac{1}{a} + b = 0, 1 + b = -1$, 解得 $b = -2, a = \frac{1}{2}$, 且满足 $0 < a < 1$ 。故 $a + b = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ 。

【124】C。

提示: 这是个分段函数为背景的问题, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 则首先得这两个函数单调递减, 即 $3a - 1 < 0, 0 < a < 1$, 解得 $0 < a < \frac{1}{3}$, 算到这里结束了吗? 那必然没有, 年轻人要沉住气, 虽然有一样的选项, 但不一定是正确的, 为什么呢?

因为函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续递减, 也就是说从图像角度看, 每一个右侧点必须低于左侧点, 那么如何控制呢? 只需要在断点处进行考虑, 只需要断点左侧函数在断点处的函数值不小于断点右侧函数在断点处的函数值即可, 所以 $[(3a-1)x+4a]_{x=1} \geq (\log_a x)_{x=1}$, 即 $7a-1 \geq 0$, 再和前面的 $0 < a < \frac{1}{3}$ 取交集得 $a \in [\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$ 。故选 C。

【125】 $\frac{37}{28}; 3+\sqrt{3}$ 。

提示: $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{4}{7} - 1 = \frac{37}{28}$ 。

当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递增; 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 单调递增。

令 $f(x) = 3$, 解得 $x = 2 + \sqrt{3}$, 令 $f(x) = 1$, 解得 $x = \pm 1$, 所以 $b = 2 + \sqrt{3}, -1 \leq a \leq 1$, 因此 $2 + \sqrt{3} - 1 \leq b - a \leq 2 + \sqrt{3} - (-1)$, 即 $1 + \sqrt{3} \leq b - a \leq 3 + \sqrt{3}$, 所以 $(b-a)_{\max} = 3 + \sqrt{3}$ 。

2.5 指对幂比较大小

类型一: 构造函数比较大小

【126】B。

提示: 由题意知 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_{3^{-1}} 2^{-1} = \log_3 2, b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} = \log_{3^{-1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \log_3 \frac{3}{2}, c = \log_3 \frac{4}{3}$, 而函数 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $\frac{4}{3} < \frac{3}{2} < 2$, 故 $\log_3 \frac{4}{3} < \log_3 \frac{3}{2} < \log_3 2$, 即 $c < b < a$ 。故选 B。

【127】C。

提示: 通过观察 a, b , 构造函数 $y = 0.6^x$, 其在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故 $a = 0.6^{0.6} > 0.6^{1.5} = b$, 继续观察代数式的特征, 这里我们不仅要观察底数的共同点, 而且要观察指数的共同点。通过对指数的观察我们发现 a, c 的指数相同, 这里可以构造函数 $y = x^{0.6}$, 且其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a =$

$0.6^{0.6} < 1.5^{0.6} = c$, 综上可得 $b < a < c$ 。故选 C。

【128】A。

提示: 观察可得, a 与 b 通过结构变形可使底数一致, 进而构造函数比较大小, 即 $b = 4^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{4}{5}} < 2^{\frac{4}{3}} = a$ ($y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增), 而 $c = 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}$, 看着有些糟心, 跟 a 与 b 有点不搭, 真的不搭吗? 睁大钛合金眼再看看, 底数不能一致, 那就观察下指数有没有一致的可能, $a = 2^{\frac{4}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = (4)^{\frac{2}{3}}$, 这样就可以和 $c = 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}$ 愉快地比较大小了。通过观察构造函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。进而有 $c = 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} > 4^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = a$, 所以 $b < a < c$ 。故选 A。

【129】B。

提示: A: 通过观察不等号两边的式子可知真数相同而底数不同, 怎么构造呢? 换底公式还记得吗?

通过换底公式可得 $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}, \log_b c = \frac{1}{\log_c b}$, 通过观察两个代数式的特征可以构造函数 $y = \frac{1}{\log_c x}$, 内层对数函数 $t = \log_c x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且当 $x \in (0, 1)$ 时, $t > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t < 0$, 而外层 $y = \frac{1}{t}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上单调递减, 结合“同增异减”得 $y = \frac{1}{\log_c x}$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单调递增, 在 $x \in (1, +\infty)$ 上单调递减。若 $a > b > 0$ 不一定能得到 $\log_a c = \frac{1}{\log_c a} > \frac{1}{\log_c b} = \log_b c$, 因为函数不连续; 若 $a > 1 > b$, 则有 $\log_a c = \frac{1}{\log_c a} < 0 < \frac{1}{\log_c b} = \log_b c$, 故 A 不一定正确。

B: 观察构造函数 $y = \log_c x$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\log_c a < \log_c b$, 故 B 正确。

C: 观察构造函数 $y = x^c$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a^c > b^c$, 故 C 错误。

D: 观察构造函数 $y = c^x$, 其在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $c^a < c^b$, 故 D 错误。故选 B。

选项 A 的函数构造还是有些困难, 即便构造出来还得考虑函数是否连续, 考试的时候可以先行跳过 A, 先判断 B, C, D。若 B, C, D 判断出了那就不用管 A 了, 若 B, C, D 都错了, 反过来说 A 就正确了。

【130】D。

提示: 类比观察 a 与 b , 构造函数 $y = 1.01^x$, 其在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 故 $1.01^0 = 1 < 1.01^{0.5} < 1.01^{0.6}$, 而 $y = 0.6^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则 $0.6^{0.5} < 1 = 0.6^0$, 所以 $b > a > c$ 。故选 D。

【131】D。

提示: 由题意知 $a = \frac{\ln 2}{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}}, b = \frac{\ln 3}{3} = \ln 3^{\frac{1}{3}}, c = \frac{\ln 5}{5} = \ln 5^{\frac{1}{5}}$, 归纳构造函数 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 接着需要比较 $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$ 的大小, 先比较 $2^{\frac{1}{2}}$ 和 $3^{\frac{1}{3}}$ 的大小, 通过观

12 答案详解

察两个指数分母最小公倍数是 6, 进一步构造函数 $y = x^6$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $8 = (2^{\frac{1}{2}})^6 < (3^{\frac{1}{3}})^6 = 9$, 所以 $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$. 同理可得 $5^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$, 所以 $c = \frac{\ln 5}{5} = \ln 5^{\frac{1}{5}} < a = \frac{\ln 2}{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} < b = \frac{\ln 3}{3} = \ln 3^{\frac{1}{3}}$. 故选 D.

类型二: 简单寻求中间量+函数单调性比较大小

【132】B.

提示: 因为 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$.

显然 $b > 0, c > 0$ (指数函数值域为正), 那么我们只需要比较 b, c 大小就好了, 又 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$, 而 $y = 0.2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $0 < c = 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$.

综上 $a < c < b$. 故选 B.

【133】A.

提示: 观察 a, b 发现底数相同, 构造函数 $y = 2^x$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $a = 2^{1.2} > 2^{0.8} = b > 2^0 = 1$. 又 $y = \log_5 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $c = 2 \log_5 2 = \log_5 2^2 = \log_5 4 < \log_5 5 = 1$, 则 $a > b > c$. 故选 A.

【134】D.

提示: 因为 $y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8} = 3^{0.8} > 3^{0.7} = a > 3^0 = 1$, 而 $y = \log_{0.7} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $c = \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1$, 则 $c < a < b$. 故选 D.

指数比较大小通常先比较和 1 的关系, 因为 $a^0 = 1$ (其中 $a \neq 0$), 而对数间的比较需要考虑给真数赋值为底数或者 1 再和自身比较大小.

【135】A.

提示: 因为 $y = \log_3 x$ 和 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $0 < Q = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$, 则 $R = \log_2 (\log_3 2) < \log_2 1 < 0, P = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$, 故 $R < Q < P$. 故选 A.

【136】D.

提示: 观察发现 $a = \log_2 e, c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3$ 底数相同, 构造函数 $y = \log_2 x$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 而 $2 < e < 3$, 所以 $1 = \log_2 2 < a = \log_2 e < \log_2 3 = c$. 又 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $b = \ln 2 < \ln e = 1$, 则 $b < a < c$. 故选 D.

【137】B.

提示: 这组数有些头疼, 两两之间没共性, 那么我们只能对各自估范围了. 因为 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $1 = \log_3 3 < a = \log_3 7 < \log_3 9 = 2$. 因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $2 = 2^1 < b = 2^{1.1} < 2^2 = 4$. 因为 $y = 0.8^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $0 < c = 0.8^{3.1} < 0.8^0 = 1$. 所以, $c < a < b$. 故选 B.

【138】A.

提示: 这还是一道需要各自估范围的大小比较的题. 因为 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$. 很显然 b 和 c 都大于 0, 因为指数函数值域为正.

但是又不能一眼看出各自大小, 同样需要结合函数单调性各自估范围. 因为 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $0 < b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.2} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$. 因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $1 = 2^0 < c = 2^{\frac{1}{3}}$. 所以, $a < 0 < b < 1 < c$. 故选 A.

【139】D.

提示: $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5$, 所以 a, c 的底数相同, 构造函数 $y = \log_3 x$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5 > \log_3 \frac{7}{2} = a > \log_3 3 = 1$. 又 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $0 < b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$.

综上, $0 < b < 1 < a < c$, 即 $b < a < c$. 故选 D.

类型三: 估值过渡量比较大小

【140】C.

提示: 直面看两两没有共性, 那就各自估范围.

因为 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $1 = \log_2 2 < a = \log_2 \pi < \log_2 4 = 2$. 因为 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $b = \log_{\frac{1}{2}} \pi < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$. 因为 $y = \pi^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $0 < c = \pi^{-2} < \pi^0 = 1$. 所以, $b < 0 < c < 1 < a < 2$, 即 $b < c < a$. 故选 C.

【141】A.

提示: 两两没有共性, 各自估范围.

因为 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $2 = \log_2 4 < a = \log_2 7 < \log_2 8 = 3$. 因为 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $1 = \log_3 3 < b = \log_3 8 < \log_3 9 = 2$. 因为 $y = 0.3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $0 < c = 0.3^{0.3} < 0.3^0 = 1$. 所以, $0 < c < 1 < b < 2 < a < 3$. 故选 A.

【142】C.

提示: 继续各自估范围. 但是这个题中有个 $\frac{1}{2}$, 这就有意思了, 我们肯定需要把 $c = \frac{1}{2}$ 化成可以和 a, b 比较大小的形式, $c = \frac{1}{2} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \log_5 \sqrt{5} = \log_8 8^{\frac{1}{2}} = \log_8 \sqrt{8}$.

因为 $y = \log_5 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $0 = \log_5 1 < a = \log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$.

因为 $y = \log_8 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $b = \log_8 3 = \log_8 \sqrt{9} > \log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$. 因此, $a < \frac{1}{2} = c < b$. 故选 C.

【143】A.

提示: 这道题与上一道题是同一个类型, 给出的 $\frac{2}{3}$ 是个过渡变量, 毕竟 a, b 没法直接比较大小, 所以我们需要将 $c = \frac{2}{3}$

写成能和 a, b 比较大小的形式, $c = \frac{2}{3} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \log_5 5^{\frac{2}{3}}$.

但这里又带来了新的问题, $3^{\frac{2}{3}}$ 和 $2, 5^{\frac{2}{3}}$ 和 3 也是不可以直接比较大小. 怎么办? 继续上函数, 通过观察发现给每组三次方后利于计算并进一步比较大小. 因为 $y = x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $(\frac{2}{3})^3 = 9 > 8 = 2^3$, $(\frac{2}{5})^3 = 25 < 27 = 3^3$, $3^{\frac{2}{3}} > 2, 5^{\frac{2}{3}} < 3$, 所以 $a = \log_3 2 < \log_3 3^{\frac{2}{3}} = c = \frac{2}{3} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} < \log_5 3 = b$, 即 $a < c < b$. 故选 A.

【144】A.

提示: 这道题跟上一题一样两两无共性, 我们继续对每一个数估范围. 因为 $y = \log_5 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $0 = \log_5 1 < a = \log_5 2 < \log_5 5 = 1$. 因为 $y = \log_{0.5} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $1 = \log_{0.5} 0.5 < b = \log_{0.5} 0.2$. 因为 $y = 0.5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $c = 0.5^{0.2} < 0.5^0 = 1$. 估到这里我们不难判断出 b 最大, 就是 a 和 c 有些尴尬, 那我们需要更精确的估值, 既然 $a \in (0, 1), c \in (0, 1)$, 那么我们就取区间中点 $\frac{1}{2}$, 这里我们需要能把 $\frac{1}{2}$ 化成可以与 a 和 c 比较的形式. $\frac{1}{2} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \log_5 \sqrt{5} = 0.5^1$, 很显然 $\frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5} > \log_5 \sqrt{4} = \log_5 2 = a$, 而 $0.5^1 < 0.5^{0.2} = c$, 所以 $0 < a < 0.5 < c < 1 < b$. 故选 A.

【145】C.

提示: 三个数没有共性无法构造函数故需要各自估值了. 因为 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $0 = \log_3 1 < a = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$. 因为 $y = \log_5 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $0 = \log_5 1 < b = \log_5 2 < \log_5 5 = 1$. 有点尴尬, a, b 都属于区间 $(0, 1)$, 那怎么办呢? 取区间中点 $\frac{1}{2}$ 再和 a, b 比较.

而 $\frac{1}{2} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{3} = \log_3 5^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{5}$, 且 $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3}$, 所以 $0 = \log_5 1 < b = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3} < \log_3 2 = a < \log_3 3 = 1$. 又因为 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $c = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$, 则 $0 < b < \frac{1}{2} < a < 1 < c$, 即 $b < a < c$. 故选 C.

【146】C.

提示: 因为 $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3} = 5^{-\log_3 0.3} = 5^{\log_3 \frac{10}{3}}$, 此时 a, b, c 三个数的底数相同, 那么可以构造函数 $y = 5^x$, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 那么只需要比较三个指数 $\log_2 3, 4, \log_4 3, 6, \log_3 \frac{10}{3}$ 的大小. 这三个指数没有明显共性, 不太好直接比较大小, 那就各自估值. 因为 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $1 = \log_2 2 < \log_2 3, 4 < \log_2 4 = 2$. 因为 $y = \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\log_4 3, 6 < \log_4 4 = 1$. 因为 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $1 = \log_3 3 < \log_3 \frac{10}{3} < \log_3 9 = 2$.

嗯, 这…… $\log_2 3, 4, \log_3 \frac{10}{3}$ 都在区间 $(1, 2)$ 内那怎么办? 前面有讲, 我们继续取区间中点 $\frac{3}{2}$.

而 $\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2.828 < 3, 4, 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} \approx 5.196 > 3, 333 = \frac{10}{3}$, 所以 $\log_3 \frac{10}{3} < \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} < \log_2 3, 4$, 因此 $\log_4 3, 6 < 1 < \log_3 \frac{10}{3} < \frac{3}{2} < \log_2 3, 4$, 所以 $a = 5^{\log_2 3, 4} > c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3} > b = 5^{\log_4 3, 6}$, 即 $a > c > b$. 故选 C.

2.6 函数的奇偶性

类型一: 函数奇偶性的判断

【147】D.

提示: 通过分析, 这四个函数的定义域都是 $\mathbf{R}$, 满足定义域关于原点对称, 都可以判断奇偶.

A: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, 奇函数.

B: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 奇函数.

C: $f(-x) = e^{-x} \neq -e^x = -f(x)$, 且 $f(-x) = e^{-x} \neq e^x = f(x)$, 非奇非偶.

D: $f(-x) = \ln \sqrt{1+(-x)^2} = \ln \sqrt{1+x^2} = f(x)$, 偶函数. 故选 D.

我们应该且必须记住初等函数的性质, 用它们判断起奇偶性更快更便捷.

选项 A 是正弦函数奇函数, 选项 B 是奇次幂函数也是奇函数, 选项 C 是指数函数非奇非偶, 而选项 D 是含有偶次幂函数必然是偶函数.

【148】D.

提示: 通过判断定义域选项 A 定义域为 $[0, +\infty)$, 关于原点对称, 余下定义域都是 $\mathbf{R}$, 则选项 A 非奇非偶.

B: $f(-x) = |\sin(-x)| = |\sin x| = f(x)$, 偶函数.

C: $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, 偶函数.

D: $f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$, 奇函数. 故选 D.

核心笔记已经给大家整理出了常见函数的奇偶性结论, 善记且积累这些常见结论, 可以快捷选出结论.

【149】B.

提示: 通过分析这四个函数的定义域, 选项 C 定义域为 $(0, +\infty)$, 关于原点对称, 非奇非偶, 余下定义域都是 $\mathbf{R}$.

A: $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f(x)$, 奇函数.

B: $f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$, 偶函数.

D: $f(-x) = 2^{-(-x)} = 2^x \neq 2^{-x} = f(x)$, 同时 $f(-x) = e^{-x} \neq e^x = f(x)$, 非奇非偶. 故选 B.

对于选项 D, 这是个指数函数, 非奇非偶. 再次温馨提醒同学们加强基础知识记忆和注重平时积累.

【150】D.

提示:通过分析可得这四个函数的定义域都是 $\mathbf{R}$,满足定义域关于原点对称,都可以判断奇偶。

A: $f(-x) = (-x) + \sin(-2x) = -(x + \sin 2x) = -f(x)$, 奇函数。

B: $f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) = x^2 - \cos x = f(x)$, 偶函数。

C: $f(-x) = 2^{-x} + \frac{1}{2^{-x}} = \frac{1}{2^x} + 2^x = f(x)$, 偶函数。

A, B, C 均不符合选项,那么 D 自然是正确的。

选项 D 我们继续研究下,选项 D: $f(-x) \neq -f(x)$, 且 $f(-x) \neq f(x)$ 。

再单独看多项式中的每一项, $y = x^2$ 是偶函数, $y = \sin x$ 是奇函数,而奇函数 $\pm$ 偶函数 = 非奇非偶函数,那么我们可以用多元化手法进行奇偶性判断。故选 D。

【151】D.

提示:通过判断可知这四个函数定义域都关于原点对称。

A: $f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x)$, 偶函数。

或者通过观察自变量是偶次方,互为相反数的两个变量函数值一样,也是偶函数。

B: $f(-x) = \frac{1}{-x} + (-x) = -\left(\frac{1}{x} + x\right) = -f(x)$, 奇函数。

或 $y = x, y = \frac{1}{x}$ 一个正比例函数,一个反比例函数,都是奇函数,其和是奇函数。

C: $f(-x) = 2^{-x} + \frac{1}{2^{-x}} = \frac{1}{2^x} + 2^x = f(x)$, 偶函数。

这里我们可以总结结论: $g(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数,因为 $g(-x) = g(x)$ 。

A, B, C 均不符合选项,那么 D 自然是正确的。

选项 D 我们继续研究下,选项 D: $f(-x) \neq -f(x)$, 且 $f(-x) \neq f(x)$ 。

再单独看多项式中的每一项, $y = x$ 是奇函数, $y = e^x$ 是非奇非偶函数,其和必然是非奇非偶函数。故选 D。

【152】A.

提示:通过观察可知两个函数定义域都是 $\mathbf{R}$,定义域关于原点对称。

而 $f(-x) = 3^{-x} + 3^{-(x)} = 3^{-x} + 3^x = f(x)$, 偶函数; 或通过观察可得 $f(x) = t(x) + t(-x)$, (其中 $t(x) = 3^x$ 或 $t(x) = 3^{-x}$), 上一题我们已经总结了这条结论,在定义域对称的前提下这种函数是偶函数。

$g(-x) = 3^{-x} - 3^{-(x)} = 3^{-x} - 3^x = -(3^x - 3^{-x}) = -g(x)$, 奇函数; 或通过观察可得 $g(x) = t(x) - t(-x)$, (其中 $t(x) = 3^x$), 且满足 $g(-x) = -g(x)$, 在定义域对称的前提下这种函数是奇函数。故选 A。

【153】C.

提示: $f(-x) = \frac{1}{1+2^{-x}} = \frac{2^x}{2^x+1}$, $f(x) + f(-x) =$

$\frac{1}{2^x+1} + \frac{2^x}{2^x+1} = \frac{2^x+1}{2^x+1} = 1$ 。故选 C。

【154】A.

提示:通过观察选项可得这依然是判断函数的对称性问题,而对称性的特殊性就是判断函数的奇偶性。

先求定义域得 $-2 < x < 2$ 。其定义域关于原点对称,而

$f(-x) = \log_2 \frac{2-(-x)}{2+(-x)} = \log_2 \frac{2+x}{2-x} = \log_2 \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\log_2 \frac{2-x}{2+x} = -f(x)$, 或者 $f(-x) + f(x) = \log_2 \frac{2-x}{2+x} +$

$\log_2 \frac{2+x}{2-x} = \log_2 \left(\frac{2-x}{2+x} \cdot \frac{2+x}{2-x}\right) = 0$, 所以 $f(x)$ 是奇函数。

故选 A。

这里我们依然可以总结结论: 若 $y = \log_a \frac{b+cx}{b-cx}$ 或 $y =$

$\log_a \frac{b-cx}{b+cx}$, 则其为奇函数。这条结论在核心笔记中有体现。

这里简证下 $y = \log_a \frac{b+cx}{b-cx}$ 是奇函数:

通过判断定义域是关于原点对称的, $f(-x) = \log_a \frac{b-cx}{b+cx}$,

$f(x) = \log_a \frac{b+cx}{b-cx}$, 则 $f(-x) + f(x) = \log_a \frac{b-cx}{b+cx} +$

$\log_a \frac{b+cx}{b-cx} = \log_a \left(\frac{b-cx}{b+cx} \cdot \frac{b+cx}{b-cx}\right) = \log_a 1 = 0$, 即 $y =$

$\log_a \frac{b+cx}{b-cx}$ 是奇函数。

类型二: 由奇偶性求参数

【155】4.

提示: 方法一: 使用对称性来解决, 偶函数的零点也是关于 y 轴对称的, 通过计算得 $-a$ 和 4 是函数的两个零点, 遵循对称性, 则他俩互为相反数, 故 $a = 4$ 。

方法二: 使用待定系数法: $f(x) = (x+a)(x-4)$, $f(-x) = (-x+a)(-x-4) = (x-a)(x+4)$, 通过类比同类项系数或是作差为 0 都可得 $a = 4$ 。

方法三: 通过观察这是二次函数, 二次函数为偶函数, 其对称轴 $x = \frac{4-a}{2} = 0$, 依然可得 $a = 4$ 。

【156】A.

提示: 由题意知此函数是奇函数, 那么定义域必然是对称的。而此题定义域是 $x \neq -\frac{1}{2}, x \neq a$, 定义域对称能取的数

是成双成对, 不能取的数也是成双成对。故 $-\frac{1}{2} + a = 0$, 则

$a = \frac{1}{2}$ 。故选 A。

【157】2.

提示: $y = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (x-1)^2 + ax +$

$\cos x = x^2 + (a-2)x + 1 + \cos x$, 因为 $y = x^2 + 1 + \cos x$ 是偶函数, 故 $y = (a-2)x$ 必是偶函数, 则须 $a-2=0$, 即 $a=2$ 。

【158】 $\frac{1}{2}$.

提示: 方法一: 由题意知定义域为 $\mathbf{R}$, 且是奇函数, 则满足

$f(0)=0$, 即 $a=\frac{1}{2}$ 。

方法二: 可以使用 $f(-x)=-f(x)$ 待定系数法解 a , 也可取特值由 $f(-1)+f(1)=0$ 解得 $a=\frac{1}{2}$ 。

方法三: 可以使用上一题总结的结论 $y=\frac{-1}{a^x+1}+\frac{1}{2}$ 是奇函数, 比对可得 $a=\frac{1}{2}$ 。

【159】C。

提示: 由题意知函数定义域对称且 $x \neq \log_2 a$, 定义域要保持对称, 只能是 $\log_2 a=0$, 解得 $a=1$, 所以 $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}$ 。或者通过 $f(-x)=-f(x)$ 使用待定系数法也可求得 $a=1$, 再或者取特值 $x=1$, 由 $f(-1)+f(1)=0$ 解方程也可得 $a=1$ 。那么 $f(x)>3$, 即 $\frac{2^x+1}{2^x-1}>3 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 2^x-4}{2^x-1}<0 \Leftrightarrow (2^x-2)(2^x-1)<0 \Leftrightarrow 1<2^x<2$, 解得 $x \in (0, 1)$ 。故选 C。

【160】D。

提示: 方法一: 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x)=\frac{-xe^{-x}}{e^{-ax}-1}=\frac{-xe^x}{e^{(2-a)x}-e^{2x}}=\frac{xe^x}{e^{2x}-e^{(2-a)x}}=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}=f(x)$, 即 $e^{2x}-e^{(2-a)x}=e^{ax}-1$, 由待定系数法可得 $2x=ax$, $(2-a)x=0$, 所以 $a=2$ 。故选 D。

方法二: 取特值, 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(1)=f(-1)=\frac{e}{e^a-1}-\frac{e^{-1}}{e^{-a}-1}=\frac{e}{e^a-1}-\frac{e^{-a-1}}{1-e^a}=\frac{e-e^{-a-1}}{e^a-1}=0$, 则 $e-e^{-a-1}=0$, 即 $a-1=1$, 解得 $a=2$ 。故选 D。

【161】-1。

提示: 因为 $f(x)=x(e^x+ae^{-x})$, 其中 $y=x$ 是奇函数, 根据奇偶性四则运算得 $y=e^x+ae^{-x}$ 是奇函数。根据前面所学以及核心笔记奇偶模型可知 $a=-1$, 或者利用(定义域对称且包含 0)奇函数恒过原点, 即 $y=e^x+ae^{-x}$ 过原点, 计算可得 $a=-1$ 。

【162】1。

提示: 因为 $f(x)=x^3(a2^x-2^{-x})$, 其中 $y=x^3$ 是奇函数, 根据奇偶性四则运算得 $y=a2^x-2^{-x}$ 是奇函数。根据前面所学以及核心笔记奇偶模型可知 $a=1$, 或者利用(定义域对称且包含 0)奇函数恒过原点, 即 $y=a2^x-2^{-x}$ 过原点, 计算可得 $a=1$ 。

【163】B。

提示: 通过观察可得这是个代数式乘积, 分割进行判断, 令 $g(x)=\ln \frac{2x-1}{2x+1}$ ($x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$), 且 $g(-x)=\ln \frac{-2x-1}{-2x+1}=\ln \frac{2x+1}{2x-1}=\ln \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}=-\ln \frac{2x-1}{2x+1}=-g(x)$, 即 $g(x)$ 是奇函数(这个模型核心笔记中有收录哦)。结合奇偶的运算, 可得 $y=x+a$ 是奇函数, 即 $-x+a=-(x+a)$, 解得 $a=0$ 。故选 B。

【164】1。

提示: 做到这里有没有发现这几个题是同一种操作哦。同样的乘积函数, 通过剥离奇函数 $y=x$ 可得 $y=\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 是奇函数, 根据核心笔记奇偶模型可得 $a=1$ 。或者利用(定义域对称且包含 0)奇函数恒过原点, 即 $y=\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 过原点, 计算可得 $a=1$ 。

这里我们可以简证 $y=\log_a(\sqrt{1+b^2x^2} \pm bx)$ 是奇函数。不妨取 $y=\log_a(\sqrt{1+b^2x^2}+bx)$ 来证明。

简证: 易得 $x \in \mathbf{R}$, 且 $f(-x)+f(x)=\log_a(\sqrt{1+b^2x^2}-bx)+\log_a(\sqrt{1+b^2x^2}+bx)=\log_a[(\sqrt{1+b^2x^2}-bx) \cdot (\sqrt{1+b^2x^2}+bx)]=\log_a 1=0$ 。

【165】 $-\frac{3}{2}$ 。

提示: 由题意知 $f(x)-f(-x)=0$, 即 $f(x)=[\ln(e^{3x}+1)+ax]-[\ln(e^{-3x}+1)-ax]=\ln \frac{e^{3x}+1}{e^{-3x}+1}+2ax=\ln \frac{e^{3x}(e^{3x}+1)}{e^{3x}+1}+2ax=3x+2ax=0$, 故 $2a+3=0$, 即 $a=-\frac{3}{2}$ 。

这里我们可以总结出一个结论: $y=\ln(e^{ax}+1)-\frac{ax}{2}$ 是偶函数。这条核心笔记也有哦! 简证如下:

$f(x)-f(-x)=[\ln(e^{ax}+1)-\frac{ax}{2}]-[\ln(e^{-ax}+1)+\frac{ax}{2}]=\ln \frac{e^{ax}+1}{e^{-ax}+1}-ax=\ln \frac{e^{ax}(e^{ax}+1)}{e^{ax}+1}-ax=ax-ax=0$ 。

类型三: 利用奇偶性求函数解析式与函数值

【166】D。

提示: 方法一: 设 $x<0$, 则 $-x>0$, 则 $f(-x)=e^{-x}-1$, 所以 $f(x)=-f(-x)=-(e^{-x}-1)=-e^{-x}+1$ 。

方法二: 可以取特值检验。取 $x=1$, 则 $f(1)=-f(-1)=e-1$, 即 $f(-1)=1-e$, 经检验只有 D 满足。故选 D。

【167】12。

提示: 方法一: 求 $f(2)$, 但没有 $(0, +\infty)$ 的解析式, 那怎么办呢? 利用奇偶性。由题意知 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(2)=-f(-2)=-[2(-2)^3+(-2)^2]=12$ 。

方法二: 可以先由奇偶性求得 $(0, +\infty)$ 的解析式, 再求 $f(2)$ 。设 $x>0$, 则 $-x<0$, 则 $f(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$, 所以 $f(x)=-f(-x)=-(-2x^3+x^2)=2x^3-x^2$, 故 $f(2)=2 \times 2^3-2^2=12$ 。

【168】-3。

提示: 方法一: 由题意知 $f(\ln 2)=8$, 则 $f(-\ln 2)=-8$, 即 $f(-\ln 2)=-8=-e^{a(-\ln 2)}=-2^{-a}$, 即 $2^{-a}=8=2^3$, 则 $a=-3$ 。

方法二: 可以先由奇偶性求得 $(0, +\infty)$ 的解析式, 再表示出 $f(\ln 2)$, 进而求解关于 a 的方程。

设 $x > 0$, 则 $-x < 0$, 则 $f(-x) = -e^{-ax}$, 所以 $f(x) = -f(-x) = -(-e^{-ax}) = e^{-ax}$, 故 $f(\ln 2) = e^{-a \ln 2} = 2^{-a} = 8 = 2^3$, 即 $a = -3$.

【169】B.

提示: 由题意知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2-(x+1)}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1$, 这个函数结构看着是不是似曾相识?

如果还认不出, 那么我们再看一下 $y = \frac{2}{x}$, 是不是就对眼了? 这是反比例函数, 是奇函数!

我们将其向左平移 1 个单位可得 $y = \frac{2}{1+x}$, 再向下平移 1 个单位可得 $f(x) = \frac{2}{1+x} - 1$, 故 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 的对称中心是 $(-1, -1)$. 那么我们只要把 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 向右移动 1 个单位和向上移动 1 个单位, 对称中心又会变为 $(0, 0)$, $y = \frac{2}{x}$ 是奇函数, 将 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 向右移动 1 个单位和向上移动 1 个单位得 $y = f(x-1) + 1$. 故选 B.

【170】-9.

提示: 方法一: 通过对函数解析式分析知 $y = x^3$ 是奇函数, 而 $y = \cos x$ 是偶函数, 则 $g(x) = f(x) - 1 = x^3 \cos x$ 是奇函数, 且 $g(a) = f(a) - 1 = 10$, 则 $g(-a) = -[g(a)] = -[f(a) - 1] = -10$, 即 $f(-a) - 1 = -10$, 则 $f(-a) = -9$.
方法二: $y = x^3 \cos x$ 是奇函数, 而 $f(x) = x^3 \cos x + 1$ 是由 $y = x^3 \cos x$ 向上平移一个单位而得的, 故 $f(x) = x^3 \cos x + 1$ 的函数图像关于 $(0, 1)$ 中心对称, 则 $\frac{f(a) + f(-a)}{2} = 1$, 解得 $f(-a) = -9$.

【171】B.

提示: 由题意知 $f(-1) + f(1) = 0$, $g(-1) = g(1)$, 所以 $f(-1) + g(1) = g(1) - f(1) = 2$, $f(1) + g(-1) = f(1) + g(1) = 4$, 联立解方程组得 $g(1) = 3$. 故选 B.

【172】D.

提示: 由题意知 $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, 且 $f(x) + g(x) = e^x$, 利用奇偶性构建第二个方程 $f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) = e^{-x}$, 联立解方程组得 $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 故选 D.

【173】D.

提示: 由题意知 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$, 且 $f(x) - g(x) = e^x$, 利用奇偶性构建第二个方程 $f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) = e^{-x}$, 联立解方程组得 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

通过观察结合单调性四则运算可判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 故 $-1 = g(0) < 0 = f(0) < f(2) < f(3)$, 即 $g(0) < f(2) < f(3)$. 故选 D.

【174】ABC.

提示: 抽象函数求函数值问题可以考虑通过赋值来判断.

令 $x = y = 0$, 可得 $f(0) = 0$, 故 A 正确. 令 $x = y = 1$, 可得 $f(1) = 0$, 故 B 正确.

判断奇偶需要知道 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系, 在原式基础上通过赋值构造出 $f(x)$ 与 $f(-x)$, 进而判断奇偶, 令 $y = -1$, 可得 $f(-x) = f(x) + x^2 f(-1)$, 这里继续求 $f(-1)$, 继续赋值, 令 $x = y = -1$, 则 $0 = f(1) = f(-1) + f(-1)$, 即 $f(-1) = 0$, 进而有 $f(-x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是偶函数, 故 C 正确. 在满足选项 ABC 和条件的前提下 $f(x)$ 可以是常函数, 即 $f(x) = 0$, 显然没有极值点, 因此 D 错误. 故选 ABC.

2.7 函数的对称性与周期性及其应用

类型一: 求函数值

【175】1.

提示: 由题意知 $f(x+1) = f(x)$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}+1\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2 \frac{1}{2} = 1$.

【176】1.

提示: 由题意知 $f(x+2) = f(x)$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}+2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 1$.

【177】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

提示: 因为 $f(x+4) = f(x)$, 所以 $f(15) = f(-1+4 \times 4) = f(-1) = \left| -1 + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, 故 $f(f(15)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

类型二: 判断周期性并求函数值

【178】C.

提示: 由题意知 $f(x+1) = f(-x) = -f(x)$, 那么 $f(x+2) = -f(x+1) = f(x)$, 所以 $T = 2$, 故 $f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}+2\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. 故选 C.

【179】C.

提示: 由题意知 $f(x+2) \cdot f(x) = 13$, 则 $f(x+2) = \frac{13}{f(x)}$, 所以 $f(x+4) = \frac{13}{f(x+2)} = \frac{13}{\frac{13}{f(x)}} = f(x)$, 故 $T = 4$, 则 $f(99) = f(-1+4 \times 25) = f(-1)$.

尴尬了, 因为我们并不知道 $f(-1)$ 是多少.

通过观察 $f(x+2) \cdot f(x) = 13$, 可知差为 2 的两个变量的函数的值之积为 13, 而 $1 - (-1) = 2$, 故 $f(1) \cdot f(-1) =$

13, 所以 $f(-1) = \frac{13}{f(1)} = \frac{13}{2}$. 故选 C.

【180】 $-\frac{1}{5}$ 。

提示：由题意知 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$ ，所以 $f(x+4) = \frac{1}{f(x+2)} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = f(x)$ ，故 $T=4$ ，则 $f(5) = f(1+4) = f(1)$ 。

$f(1) = -5$ ，即 $f(f(5)) = f(-5) = f(-1-4) = f(-1)$ 。

尴尬同上题， $f(-1)$ 并未直接给出来，怎么办？

继续观察条件 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$ ，可得差为2的两个变量的

函数值互为倒数，所以 $f(f(5)) = f(-1) = \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{5}$ 。

【181】B。

提示：由题意知 $f(x+2) = -f(x)$ ，那么 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，所以 $T=4$ ，故 $f(6) = f(2+4) = f(2)$ 。

莫名其妙地再次尴尬，因为题目并没有直接给出 $f(2)$ 。

只能再次观察条件 $f(x+2) = -f(x)$ ，通过观察得自变量差为2时因变量的函数值互为相反数，则 $f(2) = -f(0)$ ，且 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(0) = 0$ ，所以 $f(6) = f(2) = -f(0) = 0$ 。故选B。

类型三：周期性和奇偶性综合问题求函数值

【182】 $\frac{3}{2}$ 。

提示：由题意知 $f(x+2) = f(x)$ ，则 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}+2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ，且 $f(x)$ 为偶函数，则 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ 。

【183】A。

提示：由题意知 $f(x+2) = f(x)$ ，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}-2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ，且 $f(x)$ 为奇函数，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}$ 。

故选A。

【184】A。

提示：由题意知 $f(x+4) = f(x)$ ，则 $f(7) = f(-1+8) = f(-1)$ ，且 $f(x)$ 为奇函数。

则 $f(7) = f(-1) = -f(1) = -2$ 。故选A。

【185】A。

提示：由题意知 $f(x+5) = f(x)$ ，且 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(3) = f(-2+5) = f(-2) = -f(2) = -2$ ， $f(4) = f(-1+5) = f(-1) = -f(1) = -1$ ，于是 $f(3) - f(4) = -2 - (-1) = -1$ 。故选A。

【186】-2。

提示：由题意知 $f(x+2) = f(x)$ ，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) =$

$f\left(-\frac{1}{2}-2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ， $f(2) = f(0)$ ，且 $f(x)$ 为奇函数，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = -2$ 。

$f(2) = f(0) = 0$ ，所以 $f\left(-\frac{5}{2}\right) + f(2) = -2 + 0 = -2$ 。

【187】 $\frac{5}{16}$ 。

提示：由题意知 $f(x+4) = f(x)$ ，则 $f\left(\frac{29}{4}\right) = f\left(-\frac{3}{4}+8\right) = f\left(-\frac{3}{4}\right)$ ， $f\left(\frac{41}{6}\right) = f\left(-\frac{7}{6}+8\right) = f\left(-\frac{7}{6}\right)$ ，且 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f\left(\frac{29}{4}\right) + f\left(\frac{41}{6}\right) = f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(-\frac{7}{6}\right) = -\left[f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{7}{6}\right)\right] = -\left[\left(\frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right) + \sin \frac{7}{6}\pi\right] = \frac{5}{16}$ 。

【188】3。

提示：由题意知 $f(x)$ 是偶函数，即对称轴为 $x=0$ ，且 $x=2$ 是对称轴，故周期是两条对称轴距离的2倍，即 $T=2|2-0|=4$ ，那么 $f(-1) = f(-1+4) = f(3) = 3$ 。

【189】6。

提示：方法一：由题意将 $x+2$ 代入 $f(x+4) = f(x-2)$ ，得 $f(x+6) = f(x)$ ，周期的定义告诉了我们函数值相等时自变量的差为定值，那么这个差就是周期，故 $T=6$ 。

所以， $f(919) = f(1+6 \times 153) = f(1)$ ，又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(1) = f(-1)$ ，于是 $f(919) = f(1) = f(-1) = 6^{-(-1)} = 6$ 。

方法二：也可以利用两条对称轴距离的2倍的绝对值为周期。因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x-2) = f(2-x)$ ，则 $f(x+4) = f(2-x)$ ，对称轴为 $x = \frac{(x+4)+(2-x)}{2} = 3$ ，

而偶函数本身对称轴为 $x=0$ ，故 $T=2|3-0|=6$ 。两条对称轴距离的2倍的绝对值是周期，但不一定是最小正周期，除非它俩相邻。

所以 $f(919) = f(1+6 \times 153) = f(1)$ ，又 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(1) = f(-1)$ ，于是 $f(919) = f(1) = f(-1) = 6^{-(-1)} = 6$ 。

【190】C。

提示：方法一：由题意知 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(1-x) = -f(x-1)$ ，所以 $f(x+1) = -f(x-1)$ ，即 $f(x+2) = -f(x)$ ，所以 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，于是 $T=4$ 。

而 $f(1) = 2$ ， $f(2) = f(1+1) = f(1-1) = f(0) = 0$ ， $f(3) = f(-1+4) = f(-1) = -f(1) = -2$ ， $f(4) = f(0) = 0$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$ ，那么 $f(1) + f(2) + \dots + f(50) = 12[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) = 2$ 。故选C。

方法二：也可以利用对称中心和对称轴距离的4倍的绝对值为周期。因为 $f(x-2) = f(2-x)$ ，对称轴为 $x = \frac{(1+x)+(1-x)}{2} = 1$ ，而奇函数本身对称中心为 $(0,0)$ ，故

$T=4|1-0|=4$ 。对称中心和对称轴距离的4倍的绝对值是周期,但不一定是最小正周期,除非它俩相邻。

而 $f(1)=2, f(2)=f(1+1)=f(1-1)=f(0)=0, f(3)=f(-1+4)=f(-1)=-f(1)=-2, f(4)=f(0)=0$, 也即 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$, 那么 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=12[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=2$ 。故选 C。

【191】B。

提示:由题意知 $f(x+6)=f(x)$, 即 $T=6$ 。

而 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=f(-3+6)=f(-3)=-1, f(4)=f(-2+6)=f(-2)=0, f(5)=f(-1+6)=f(-1)=-1, f(6)=f(0)=0$, 所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2012)=335[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)+f(2)=338$ 。

故选 B。

2.8 函数性质的综合问题

类型一:单调性综合类问题

【192】C。

提示:A:通过类比归纳构造函数 $y=\frac{1}{x}$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $x>y>0$, 所以 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$, 即 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$, 所以 A 错误。

B:归纳构造函数 $y=\sin x$, 但其在 $(0, +\infty)$ 上不单调, 故 B 不一定正确。

C:归纳构造函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $x>y>0$, 则 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^y$, 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^y<0$, 故 C 正确。

D: $\ln x+\ln y>0$, 即 $\ln x>-\ln y=\ln \frac{1}{y}$ 。归纳构造函数 $y=\ln x$, 其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $x>y>0$, 故不一定能得到 $x>\frac{1}{y}$, 所以 D 不一定正确。

综上, 故选 C。

【193】C。

提示:A: $\ln(a-b)>0=\ln 1$, 由于 $y=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $a-b>1$, 而 $a>b$ 是 $a-b>1$ 的必要不充分条件, 故 A 错误。

B:归纳构造函数 $y=3^x$, 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $a>b$, 则 $3^a>3^b$, 故 B 错误。

C:归纳构造函数 $y=x^3$, 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $a>b$, 则 $a^3>b^3$, 即 $a^3-b^3>0$, 故 C 正确。

D:归纳构造函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 其在 $(-\infty, 0)$

上单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 函数不单调, 且 a, b 和 0 的大小不确定, 故 D 不一定正确。

综上, 故选 C。

【194】A。

提示:由题意知 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$, 即 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$, 类比观察可构造函数 $f(x)=2^x-3^{-x}$ 。

而 $y=2^x, y=3^{-x}$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故 $f(x)=2^x-3^{-x}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数。因为 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$, 即 $f(x)<f(y)$, 所以 $x<y$ 。于是 $y-x>0$, 但 $y-x$ 和 1 的大小并不明确, 故 C, D 不一定正确。

但是 $y-x+1>1$, 且 $y=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\ln(y-x+1)>\ln 1=0$ 。故选 A。

【195】 $-1, (-\infty, 0]$ 。

提示:由题意知函数定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, 所以满足 $f(0)=0$, 即 $a+1=0$, 则 $a=-1$ 。

或者由 $f(-x)=-f(x)$ 使用待定系数法同样可求得 $a=-1$; 或者取特值 $f(-1)+f(1)=0$ 解方程得 $a=-1$, 再或者使用奇偶性这一节核心笔记结论 $y=a^x-a^{-x}$ 是奇函数类比系数也可得 $a=-1$ 。

由题意知 $f(x)=e^x+ae^{-x}=e^x+\frac{a}{e^x}$, 这是个复合函数问

题, 设 $t=e^x$, 其在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $y=t+\frac{a}{t}$ 。

①若 $a=0$, 则 $f(x)=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增满足题意。

②若 $a<0$, 则 $y=e^x, y=\frac{a}{e^x}$ 均在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则

$f(x)=e^x+ae^{-x}=e^x+\frac{a}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增满足题意。

③若 $a>0$, 内层函数 $t=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 而外层函数 $y=t+\frac{a}{t}$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增, 外层不单调, 故复合出来的函数必然不是单调函数, 不合题意。

综上, $a\leq 0$, 即 $a\in(-\infty, 0]$ 。

类型二:单调性与奇偶性的综合判断

【196】D。

提示:这个题我们可以从三个角度来分析:第一,挨个分析每个选项是否同时满足两个性质;第二,优先判断奇偶,从满足的选项中再淘满足单调性的选项;第三,优先判断单调性,再从满足的选项中淘出满足奇偶性的选项。

A:此函数是增函数,但不是奇函数。

B:此函数是奇函数,但不是递增函数。

C:此函数是奇函数,但不是增函数。

D: $y=x|x|=\begin{cases} x^2, & x\geq 0, \\ -x^2, & x<0, \end{cases}$ 此函数是奇函数,也是增函数。故选 D。

【197】A。

提示:由题意知 $y=x^3, y=-\frac{1}{x^3}$ 都是奇函数,且均为增函

数,故 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$ 既是奇函数,又是增函数。故选 A。

【198】A。

提示：由题意可得定义域 $x \in (-1, 1)$ ，且 $y = \ln(1+x)$ ， $y = -\ln(1-x)$ 均为增函数，故 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ 是增函数，直接排除 B、D。

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \text{ 而 } f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 是奇函数。故选 A。}$$

或常见函数模型记忆积累快速看出 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 是奇函数，这个函数模型在奇偶性这一节的核心笔记里有。

【199】D。

提示：由题意可得定义域为 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ，故

$$f(x) = \ln |2x+1| - \ln |2x-1| = \ln \left| \frac{2x+1}{2x-1} \right| = \begin{cases} \ln \frac{2x+1}{2x-1}, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \\ \ln \left(-\frac{2x+1}{2x-1}\right), & x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

C：当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时，令 $t = \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{(2x-1)+2}{2x-1} = \frac{2}{2x-1} + 1$ ，则该函数单调递减，且 $t \in (0, 1)$ ，而 $y = \ln t$ 在 $t \in (0, 1)$ 上单调递增，内外变化不一致，故 $f(x)$ 在 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 单调递减，故 C 错误。

B：当 $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时， $t = -\frac{2x+1}{2x-1} = -\frac{(2x-1)+2}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1} - 1$ ，则该函数单调递增，且 $t \in (0, +\infty)$ ，而 $y = \ln t$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上单调递增，内外变化一致，故 $f(x)$ 在 $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 单调递增，故 B 错误。

A：当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时，令 $t = \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{(2x-1)+2}{2x-1} = \frac{2}{2x-1} + 1$ ，则该函数单调递减，且 $t \in (1, +\infty)$ ，而 $y = \ln t$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递增，内外变化不一致，故 $f(x)$ 在 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 单调递减，故 A 错误。

通过单调性顺利排除掉 A、B、C，那么对于 D，我们验证一下其奇偶性。

因为 $f(x) = \ln |2x+1| - \ln |2x-1| = \ln \left| \frac{2x+1}{2x-1} \right|$ ，且定义域关于原点对称，而 $f(-x) = \ln \left| \frac{-2x+1}{-2x-1} \right| = \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| = \ln \left| \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{-1} \right| = -\ln \left| \frac{2x+1}{2x-1} \right| = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是奇函数。

故选 D。

类型三：函数与不等式

【200】D。

提示：由题意知 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(-1) = -f(1) = 1$ ，那么 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ ，即 $f(1) \leq f(x-2) \leq f(-1)$ 。又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，所以 $-1 \leq x-2 \leq 1$ ，即 $x \in [1, 3]$ 。故选 D。

【201】B。

提示：由题意得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(2) = 0$ 。因为 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减， $f(-2) = f(2) = 0$ ，那么 $f(x-2) > 0$ 只需 $x-2 < -2$ 或 $2 < x-2$ ，解得 $x < 0$ 或 $x > 4$ 。故选 B。

【202】D。

提示：由题意知 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(-2) = f(2) = 0$ ，又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，那么 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x) < 0$ ，则需 $x \in (-2, 2)$ 。故选 D。

【203】 $(-1, 3)$ 。

提示：由题意知 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(-2) = f(2) = 0$ ，又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数，那么 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，所以 $f(x-1) > 0$ ，则需 $-2 < x-1 < 2$ ，即 $x \in (-1, 3)$ 。

【204】C。

提示：由题意知 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$ ，又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，那么 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数。因为 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$ ，那么 $-\sqrt{2} < 2^{|a-1|} < \sqrt{2}$ ，又 $-\sqrt{2} < 0 < 2^{|a-1|}$ 恒成立。

故只需 $2^{|a-1|} < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ ，即 $|a-1| < \frac{1}{2}$ ，解得 $a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 。故选 C。

【205】D。

提示： $f(x)$ 是奇函数，故 $f(-1) = f(1) = 0$ ，且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，那么 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增。而 $f(x) - f(-x) = 2f(x)$ ，当 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ 时， $f(x) < 0$ ；当 $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ 时， $f(x) > 0$ ，故 $\frac{f(x)-f(-x)}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < 0$ ，即 $\begin{cases} x < 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0, \\ f(x) < 0 \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} x < 0, \\ -1 < x < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1 \end{cases}$ ，化简可得 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 。故选 D。

【206】D。

提示：由题意知 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(-2) = f(2) = 0$ ，且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，那么 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也单调递减。所以，当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时， $f(x) > 0$ ；当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时， $f(x) < 0$ 。

而 $xf(x-1) \geq 0$ ，则 $\begin{cases} x \geq 0, \\ f(x-1) \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 0, \\ f(x-1) \leq 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 0 \leq x, \\ 0 \leq x-1 \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 0, \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \end{cases}$ ，化简得 $x \in [-1, 0] \cup [0, 3]$ 。

[1,3]。故选 D。

2.9 函数的图像

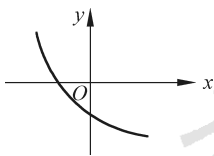
类型一：初等函数的图像综合判断

【207】B。

提示：该函数是幂函数， $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，且满足 $f(-x)=-f(x)$ ，是奇函数。同时指数大于 0，故该函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $0<\frac{1}{3}<1$ ，所以该函数增幅缓慢。当 $x\in(0,1)$ 时， $x<\sqrt[3]{x}$ ，而当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $x>\sqrt[3]{x}$ 。故选 B。

【208】C。

提示：根据题意我们可以大致画出该函数图像，由图像判断相关系数特征。



单调性与底数 a 有关，所以 $0<a<1$ ，且该函数图像与 y 轴交于 y 轴负半轴，所以 $a^0+b-1<0$ ，即 $b<0$ 。故选 C。

【209】D。

提示：底数不确定的话我们需要分类讨论：

① 当 $0<a<1$ 时， $\frac{1}{a}>1$ ，则 $a^0-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{a}<0$ ，此时函数递减，且与 y 轴交于 y 轴负半轴，D 正确。

② 当 $a>1$ 时， $0<\frac{1}{a}<1$ ，则 $1>a^0-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{a}>0$ ，此时函数递增，且与 y 轴交于 y 轴正半轴，其交点在 0 和 1 之间，故 A、B 错误。故选 D。

【210】C。

提示：对数函数定义域为 $(0,+\infty)$ ，其图像在 y 轴右侧，底数大于 1，函数单调递增，恒过 $(1,0)$ 。故选 C。

【211】B。

提示：对函数图像分析其单调递增，故 $1<a$ ，且函数过 $(3,1)$ ，即 $\log_a 3=1$ ，解得 $a=3$ 。

A: $y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 单调递减，错误。

B: $y=x^3$ ，其为增函数，且指数大于 1，增幅较大，正确。

C: $y=-x^3$ ，其为减函数，错误。

D: $y=\log_3(-x)$ ，其图像与 $y=\log_3 x$ 的图像关于 y 轴对称，故其在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，错误。

综上，故选 B。

【212】D。

提示：通过观察函数图像得其单调递减，故 $0<a<1$ 。又与 x 轴交于正半轴，且 $y=\log_a(x+c)$ 是由 $y=\log_a x$ 向左平移 c 个单位得到的，所以 $0<c<1$ 。故选 D。

【213】A。

提示：这是个复合函数，函数是单调递增的，且内层函数单调递增，故外层函数必然单调递增，所以 $1<a$ 。

通过观察可得 $-1<y_{x=0}<0$ ，即 $\log_a a^{-1}=-1<\log_a b<0=\log_a 1$ ，则 $0<a^{-1}<b<1$ 。故选 A。

【214】D。

提示：结合幂函数以及对数函数的性质综合判断。

A: 无论是对数函数还是幂函数都不可能过 $(0,1)$ ，故 A 错误。

B: 过 $(1,0)$ 的图像是对数函数，其单调递减，故 $0<a<1$ ，那么另一条就是幂函数的图像，其不仅递增，且其增幅比较大，故 $1<a$ 。而两个函数得到 a 的范围不一致，故 B 错误。

C: 过 $(1,0)$ 的图像是对数函数，其单调递增，故 $1<a$ ，那么另一条同样是幂函数的图像，其虽然递增，但其增幅比较小，故 $0<a<1$ 。而两个函数得到 a 的范围不一致，故 C 错误。

D: 过 $(1,0)$ 的图像依然是对数函数，其单调递减，故 $0<a<1$ ，那么另一条同样是幂函数的图像，其不仅递增，且其增幅比较小，故 $0<a<1$ 。而两个函数得到 a 的范围一致，故 D 正确。故选 D。

【215】D。

提示：结合指数函数以及对数函数的性质综合判断。

指数函数 $y=\frac{1}{a^x}$ 与 x 轴无交点，与 x 轴有交点的是 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 的函数图像。

A: $y=\frac{1}{a^x}$ 单调递增，故 $a\in(0,1)$ ，虽然 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$

单调性满足题意，但是 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是由 $y=\log_a x$ 向左平移 $\frac{1}{2}$ 的单位而来的，那么其与 x 轴的交点必在 0 和 1 之间，故 A 错误。

B: $y=\frac{1}{a^x}$ 单调递增，故 $a\in(0,1)$ ，而 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 单调递增，得 $a\in(1,+\infty)$ 。两个函数得到 a 的范围不一致，故 B 错误。

C: $y=\frac{1}{a^x}$ 单调递减，故 $a\in(1,+\infty)$ ，此时 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 单调性满足题意，但是 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是由 $y=\log_a x$ 向左平移 $\frac{1}{2}$ 的单位而来的，那么其与 x 轴的交点必在 0 和 1 之间，故 C 错误。

D: $y=\frac{1}{a^x}$ 单调递增，故 $a\in(0,1)$ ，此时 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 单调性满足题意，又 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是由 $y=\log_a x$ 向左平移 $\frac{1}{2}$ 的单位而来的，那么其与 x 轴的交点必在 0 和 1 之间，也满足题意，故 D 正确。故选 D。

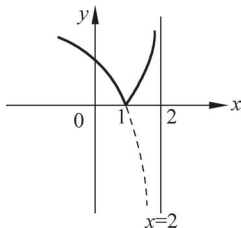
【216】A。

提示：结合平移变换原则“左加右减”“上加下减”，将 $y = 2^x$ 向右平移 3 个单位可得 $y = 2^{x-3}$ ，再将 $y = 2^{x-3}$ 向下平移 1 个单位可得 $y = 2^{x-3} - 1$ 。故选 A。

【217】D。

提示：这道题可以结合着平移、对称和翻折去处理。

$y = \ln(-x)$ 与 $y = \ln x$ 的图像关于 y 轴对称，将 $y = \ln(-x)$ 向右移 2 个单位可得 $y = \ln[-(x-2)] = \ln(2-x)$ 的图像，再将 $y = \ln[-(x-2)] = \ln(2-x)$ 在 x 轴下方的图像关于 x 轴翻折可得 $y = |\ln(2-x)|$ 。其图像大致如下：



通过图像可得该函数在 $[1, 2)$ 上单调递增。故选 D。

类型二：函数的图像综合判断

【218】A。

提示：B：当 $x = 1$ 时， $y = 0$ ，显然和图像不符，故排除 B。

C：当 $x > 0$ 时， $\frac{2x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2}{x + \frac{1}{x}} \leq 1$ ，因此 C 不满足。

D：由图像可知当 $x = 3$ 时， $y < 0$ ，而 D 不满足，因此排除 D。故选 A。

【219】A。

提示：结合选项来看需要判断函数的奇偶性以及函数正负。

令 $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ ，因为 $f(-x) = (3^{-x} - 3^x) \cdot \cos(-x) = -(3^x - 3^{-x}) \cos x = -f(x)$ ，所以 $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 是奇函数（或者通过奇偶性的乘积来判断， $y = 3^x - 3^{-x}$ 是奇函数， $y = \cos x$ 是偶函数，所以通过奇函数乘偶函数为奇函数同样可判断 $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 是奇函数），可排除选项 B、D。又当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $y = 3^x - 3^{-x}$ 单调递增，故 $y = 3^x - 3^{-x} > 3^0 - 3^0 = 0$ ， $y = \cos x > 0$ ，所以 $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos x > 0$ 。故选 A。

【220】D。

提示：通过分析 $y = (x - \frac{1}{x}) \cos x$ 可得 $y = x - \frac{1}{x}$ 是奇函数，而 $y = \cos x$ 是偶函数，故 $y = (x - \frac{1}{x}) \cos x$ 是奇函数，因此排除 A、B。对比 C、D，发现它们的不同之处在函数值的正负，只需要研究 $(0, \pi]$ 即可。当 $x = \pi$ 时， $y = \frac{1}{\pi} - \pi < 0$ 。于是排除了 C，故选 D。

【221】D。

提示：首先通过判断对称性可得 $f(x)$ 是偶函数，而选项 A、B 是奇函数，所以可以排除 A、B。

对于选项 C，因为 $e^x + e^{-x} > 0$ ， $x^2 + 2 > 0$ ，即 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $\frac{e^x + e^{-x}}{x^2 + 2} > 0$ 恒成立，所以排除 C。故选 D。

【222】D。

提示：通过分析 $y = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 可得 $y = x$ 是奇函数， $y = \cos x$ 是偶函数， $y = \sin x$ 是奇函数， $y = x^2$ 是偶函数，则 $y = \sin x + x$ 是奇函数， $y = \cos x + x^2$ 是偶函数，故 $y = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 是奇函数。因此排除 A。

对比 B、C、D，发现它们的不同之处在函数值的正负，只需要研究 $(0, \pi]$ 即可。当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时， $y > 0$ ，于是排除了 C。

接着对比 B、D，发现 $f(\pi)$ 不同，而 $f(\pi) = \frac{\pi}{\pi^2 - 1} > 0$ 。

继续排除了 B，故选 D。

【223】A。

提示：方法一：通过对 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 分析，该函数定义域为 $\mathbf{R}$ ，

$y = 4x$ 是奇函数， $y = x^2 + 1$ 是偶函数，故 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 是奇函数，故排除 C、D。

那么对比 A、B，发现它俩函数值正负有区别，只需研究 $(0, +\infty)$ 上的图像即可。当 $x > 0$ 时， $4x > 0$ ， $x^2 + 1 > 0$ ，故 $y = \frac{4x}{x^2 + 1} > 0 (x > 0)$ ，故 B 错误，A 正确。故选 A。

方法二：分析 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 得该函数定义域为 $\mathbf{R}$ ， $y = 4x$ 是奇函数， $y = x^2 + 1$ 是偶函数，故 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 是奇函数，故排除 C、D。

那么对比 A、B，发现它俩单调性不一致，我们可以从单调性的角度判断， $y = \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{4}{x + \frac{1}{x}}$ ，这是个复合函数，且是奇函数，所以我们只需要判断其在 $(0, +\infty)$ 上单调性即可。

令 $t = x + \frac{1}{x}$ ，其在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，且 $t = x + \frac{1}{x} > 0$ ，而 $y = \frac{4}{t}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减。A 满足，故选 A。

那么对比 A、B，发现它俩单调性不一致，我们可以从单调性的角度判断， $y = \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{4}{x + \frac{1}{x}}$ ，这是个复合函数，且是奇函数，所以我们只需要判断其在 $(0, +\infty)$ 上单调性即可。

令 $t = x + \frac{1}{x}$ ，其在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，且 $t = x + \frac{1}{x} > 0$ ，而 $y = \frac{4}{t}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减。A 满足，故选 A。

【224】B。

提示：分析 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 得该函数定义域为 $\mathbf{R}$ ， $y = e^x - e^{-x}$ 是奇函数， $y = x^2$ 是偶函数，故 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 是奇函数，故排除 A。

那么对比 B、C、D，发现它们函数值正负有区别且 $f(1)$ 处有不同。奇函数我们只需要判断在 $(0, +\infty)$ 上的性质即可。

通过分析, $y = e^x - e^{-x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 那么 $e^x - e^{-x} > 0, x^2 > 0$, 故 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2} > 0 (x > 0)$, 进一步排除 D。

观察 B, C, 我们发现两个图像的 $f(1)$ 有区别, 而 $f(1) = e - \frac{1}{e} > 2$, B 满足, C 不满足。故选 B。

【225】B。

提示: 通过对 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 分析, 该函数定义域为 $\mathbf{R}$, $y = 2x^3$ 是奇函数, $y = 2^x + 2^{-x}$ 是偶函数, 故 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 是奇函数, 故排除 C。

那么对比 A, B, D, 发现它们函数值正负有区别以及 $y_{x=4}$ 有区别。当 $x \in (0, 6]$ 时, $2x^3 > 0, 2^x + 2^{-x} > 0$, 故 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}} > 0$, 故 D 错误。

进一步观察 A, B, 我们发现两个图像的 $f(4)$ 有区别, 而 $f(4) = \frac{128}{16 + \frac{1}{16}} \approx 7.97$, B 满足, A 不满足。

故选 B。

【226】D。

提示: 方法一: 通过分析 $y = 1 + x + \frac{\sin x}{x^2}$ 可得 $y = x$ 是奇函数, $y = \sin x$ 是奇函数, $y = x^2$ 是偶函数, 则 $y = \frac{\sin x}{x^2}$ 是

奇函数, $y = x + \frac{\sin x}{x^2}$ 是奇函数。而 $y = 1 + x + \frac{\sin x}{x^2}$ 是将 $y = x + \frac{\sin x}{x^2}$ 向上平移一个单位得到的, 故 $y = 1 + x + \frac{\sin x}{x^2}$

的图像关于 $(0, 1)$ 成中心对称, 通过观察只有 D 满足, 故选 D。

方法二: 通过观察四个图像函数值正负有区别, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $y > 0$, 所以排除 A, C。

接着对比 B, D, 发现当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 图像有出入, 而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 所以继续排除 B。故选 D。

【227】D。

提示: 通过观察这四个图像发现 $y_{x=0}$ 有区别, 而 $y_{x=0} = 2 > 1$, 所以排除 A, B。

而 C, D 的不同在于有没有函数值大于 $y_{x=0}$, 而 $y_{x=\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3}{16} > y_{x=0}$, 所以接着排除了 C。故选 D。

【228】D。

提示: 通过观察四个图像可得 $y_{x=2}$ 有出入, 而 $1 > y_{x=2} = 8 - e^2 \approx 0.7 > 0$, 故排除 B。

再观察 A, C, D, 发现区别在 $y_{x=0}$ 是不是最小值, 而 $y_{x=0} = -1, y_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \sqrt{e} \approx -1.1 < -1$, 所以排除 C。

最后看 A, D, 区别在于极小值, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2x^2 - e^x, f'(x) = 4x - e^x, f'(0) = -1 < 0, f'(\frac{1}{2}) = 2 - \sqrt{e} > 0$ 。

设极小值为 x_0 , 则 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 更靠近 0。故选 D。

2.10 函数与方程

类型一: 利用零点存在定理判断零点所在区间

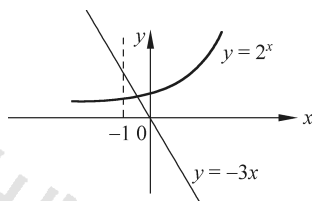
【229】B。

提示: 方法一: 通过分析 $f(x) = 2^x + 3x$ 可得 $y = 2^x, y = 3x$ 都是单调递增的, 故 $f(x) = 2^x + 3x$ 单调递增。

再结合选项找点说明函数值正负, $f(0) = 1 > 0$, 找到正函数值了, 自然需要找负函数值了, 函数单调递增, 接着往小于 0 的方向找, $f(-1) = -2.5 < 0$ 。因为函数在 $(-1, 0)$ 上单调递增且 $f(0) \cdot f(-1) < 0$, 所以零点在区间 $(-1, 0)$ 上。故选 B。

方法二: 可以数形结合将函数的零点转为曲线的交点问题。

令 $f(x) = 2^x + 3x = 0$, 得 $2^x = -3x$, 画出函数 $y = 2^x$ 和 $y = -3x$ 的图像判断交点所在区间。



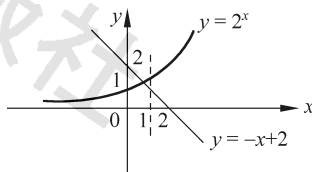
观察图像可得两条函数曲线的交点在 y 轴左侧, 那么零点所在区间是负区间, 排除 C, D。

经计算可得, 当 $x = 0$ 时, $2^x > -3x$, 而当 $x = -1$ 时, $2^x < -3x$, 则零点所属区间为 $(-1, 0)$ 。故选 B。

【230】C。

提示: 方法一: 通过分析 $f(x) = 2^x + x - 2$ 可得 $y = 2^x, y = x - 2$ 都是单调递增的, 故 $f(x) = 2^x + x - 2$ 单调递增。再结合选项找点说明函数值正负, $f(0) = -1 < 0$, 找到负函数值了, 自然需要找正函数值了, 函数单调递增, 接着往大于 0 的方向找, $f(1) = 1 > 0$ 。因为函数在 $(0, 1)$ 上单调递增且 $f(0) \cdot f(1) < 0$, 所以零点在区间 $(0, 1)$ 上。故选 C。

方法二: 可以数形结合将函数的零点转为曲线的交点问题。令 $f(x) = 2^x + x - 2 = 0$, 得 $2^x = -x + 2$, 画出函数 $y = 2^x$ 和 $y = -x + 2$ 的图像判断交点所在区间。



观察图像可得两条函数曲线的交点在 y 轴右侧, 那么零点所在区间是正区间, 排除 A, B。

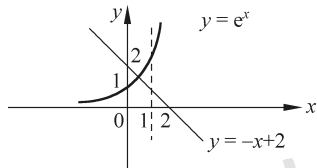
经计算可得, 当 $x = 0$ 时, $2^x < -x + 2$, 而当 $x = 1$ 时,

$2^x > -x + 2$. 则零点所属区间为 $(0, 1)$. 故选 C.

【231】C.

提示: 方法一: 通过分析 $f(x) = e^x + x - 2$ 可得 $y = e^x$, $y = x - 2$ 都是单调递增的, 故 $f(x) = e^x + x - 2$ 单调递增. 再结合选项找点说明函数值正负, $f(0) = -1 < 0$, 找到负函数值了, 自然需要找正函数值了, 函数单调递增, 接着往大于 0 的方向找, $f(1) = e - 1 > 0$. 因为函数在 $(0, 1)$ 上单调递增且 $f(0) \cdot f(1) < 0$, 所以零点在区间 $(0, 1)$ 上. 故选 C.

方法二: 可以数形结合将函数的零点转为曲线的交点问题. 令 $f(x) = e^x + x - 2 = 0$, 得 $e^x = -x + 2$, 画出函数 $y = e^x$ 和 $y = -x + 2$ 的图像判断交点所在区间.



观察图像可得两条函数曲线的交点在 y 轴右侧, 那么零点所在区间是正区间, 排除 A, B.

经计算可得, 当 $x = 0$ 时, $e^x < -x + 2$, 而当 $x = 1$ 时, $e^x > -x + 2$. 则零点所属区间为 $(0, 1)$. 故选 C.

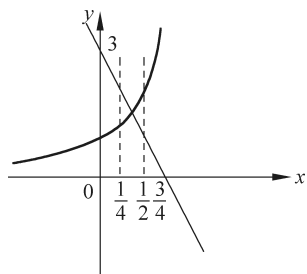
【232】C.

提示: 方法一: 通过分析 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 可得 $y = e^x$, $y = 4x - 3$ 都是单调递增的, 故 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 单调递增. 再结合选项找点说明函数值正负, $f(0) = -2 < 0$, 找到负函数值了, 自然需要找正函数值了, 函数单调递增, 接着往大于 0 的方向找, $f(\frac{1}{4}) = \sqrt[4]{e} - 2 < 0$. 又是负函数值, 继续向右找, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 1 > 0$.

因为函数在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 上单调递增且 $f(\frac{1}{4}) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$,

所以零点在区间 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 上. 故选 C.

方法二: 可以数形结合将函数的零点转为曲线的交点问题. 令 $f(x) = e^x + 4x - 3 = 0$, 得 $e^x = -4x + 3$, 画出函数 $y = e^x$ 和 $y = -4x + 3$ 的图像判断交点所在区间.



观察图像可得两条函数曲线的交点在 y 轴右侧, 那么零点所在区间是正区间, 排除 A.

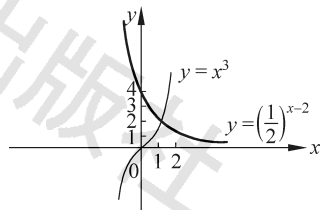
经计算可得, 当 $x = \frac{1}{4}$ 时, $e^x < -4x + 3$; 当 $x = \frac{1}{2}$ 时,

$e^x > -4x + 3$, 则零点所属区间为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

故选 C.

【233】B.

提示: 数形结合判断交点问题. 画出函数 $y = x^3$ 和 $y = (\frac{1}{2})^{x-2}$ 的图像判断交点所在区间.



观察图像可得两条函数曲线的交点在 y 轴右侧, 那么零点所在区间是正区间.

经计算可得, 当 $x = 1$ 时, $x^3 < (\frac{1}{2})^{x-2}$; 当 $x = 2$ 时, $x^3 >$

$(\frac{1}{2})^{x-2}$, 则零点所属区间为 $(1, 2)$.

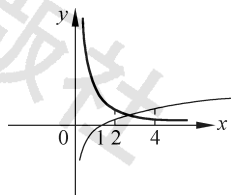
故选 B.

【234】C.

提示: 可以数形结合将函数的零点转为曲线的交点问题.

令 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x = 0$, 得 $\frac{6}{x} = \log_2 x$.

画出函数 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = \log_2 x$ 的图像判断交点所在区间.



观察图像可得两条函数曲线的交点在 y 轴右侧, 那么零点所在区间是正区间.

经计算可得, 当 $x = 2$ 时, $\frac{6}{x} > \log_2 x$; 当 $x = 4$ 时, $\frac{6}{x} < \log_2 x$, 则零点所属区间为 $(2, 4)$. 故选 C.

【235】A.

提示: 通过对函数 $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ 分析, 这是个二次函数, 且开口向上. 又 $a < b < c$, $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$, $f(b) = (b-c)(b-a) < 0$, $f(c) = (c-a)(c-b) > 0$, 由零点存在定理, 函数的两个零点分别位于区间 (a, b) 和 (b, c) 上. 故选 A.

类型二: 判断零点个数

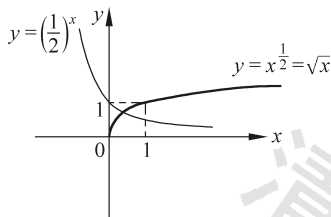
【236】B.

提示: 方法一: 通过分析 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$ 可得 $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = -(\frac{1}{2})^x$ 都是单调递增的, 故 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$ 单调递增. 再结合选项找点说明函数值正负,

$f(0) = -1 < 0$, 找到负函数值了, 自然需要找正函数值了, 函数单调递增, 接着往大于 0 的方向找, $f(1) = \frac{1}{2} > 0$. 因为函数在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 上单调递增且 $f(\frac{1}{4}) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$, 所以函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x$ 在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 上有唯一零点. 故选 B.

方法二: 可以数形结合将函数的零点转为曲线的交点问题. 令 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^x = 0$, 得 $x^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^x$.

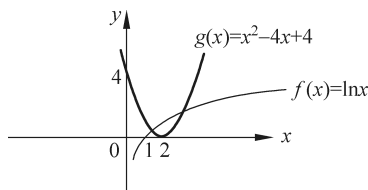
画出函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图像判断交点个数.



观察图像可得两条函数曲线有一个交点. 故选 B.

【237】C.

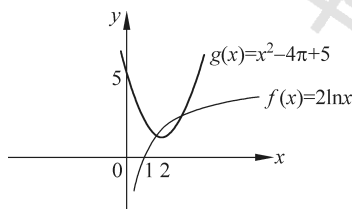
提示: 数形结合判断交点个数问题. 画出函数 $f(x) = \ln x$ 和 $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ 的图像判断交点个数.



观察图像可得两条函数曲线有 2 个交点. 故选 C.

【238】B.

提示: 数形结合判断交点个数问题. 画出函数 $f(x) = 2\ln x$ 和 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ 的图像判断交点个数.



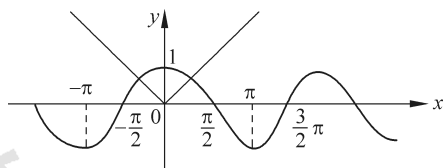
这个图像并不是直接画出来就可以的, 它俩到底有没有交点还需要一点小计算.

$f(2) = 2\ln 2 = \ln 4 > 1 = g(2)$, 观察图像可得两条函数曲线有 2 个交点. 故选 B.

【239】C.

提示: 通过对 $|x| = \cos x$ 观察得 $y = |x|$ 与 $y = \cos x$ 都是偶函数, 那么方程 $|x| = \cos x$ 的根的个数问题我们可转化为函数 $y = |x|$ 的图像和函数 $y = \cos x$ 的图像的交点个数

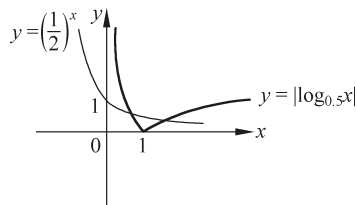
问题, 那就画图数交点个数.



由图知两条曲线有 2 个交点, 即方程 $|x| = \cos x$ 有 2 个根. 故选 C.

【240】B.

提示: 函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 的零点个数问题我们转为方程 $2^x |\log_{0.5} x| - 1 = 0$ 的根的个数问题. 对方程 $2^x |\log_{0.5} x| - 1 = 0$ 变形得 $|\log_{0.5} x| = (\frac{1}{2})^x$, 则问题接着转为函数 $y = |\log_{0.5} x|$ 的图像与函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图像的交点个数问题, 那就画图数交点.



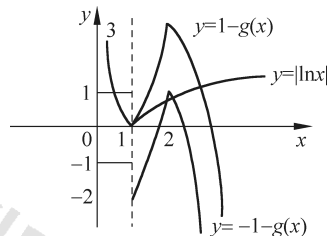
由图知两条曲线有 2 个交点, 即函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 有两个零点. 故选 B.

【241】4.

提示: 方程 $|f(x) + g(x)| = 1$ 的根为 $f(x) + g(x) = 1$ 和 $f(x) + g(x) = -1$ 的根, 即为 $f(x) = 1 - g(x)$ 和 $f(x) = -1 - g(x)$ 的根, 分别画出 $y = f(x) = |\ln x|$,

$$y = 1 - g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 3 - |x^2 - 4|, & x > 1, \end{cases}$$

$$y = -1 - g(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - |x^2 - 4|, & x > 1 \end{cases} \text{ 的图像.}$$



通过观察图像可得 $y = f(x)$ 与 $y = 1 - g(x)$ 的函数图像有 2 个交点, 同时 $y = f(x)$ 与 $y = -1 - g(x)$ 的图像也有 2 个交点, 故 $|f(x) + g(x)| = 1$ 的根有 4 个.

【242】C.

提示: 这个函数图像并不容易画出来, 那怎么办呢? 好在这个函数并不复杂, 可以直接令 $f(x) = x \cos x^2 = 0$, 转为求解方程的根, 而方程的根即为该函数零点个数.

由 $f(x) = x \cos x^2 = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $\cos x^2 = 0$, 解得 $x = 0$,

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}, \sqrt{\frac{7\pi}{2}}, \sqrt{\frac{9\pi}{2}}$, 该方程共有 6 个根, 即该函数有 6 个零点. 故选 C.

【243】2.

提示: 将函数的零点转为方程的根的个数问题, 通过计算或是使用零点存在定理得零点个数.

当 $x \leq 0$ 时, 令 $f(x) = 0$, 即 $x^2 - 2 = 0$, 解得 $x = -\sqrt{2}$; 当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = 0$, 即 $2x - 6 + \ln x = 0$, 这是一个超越方程, 遇到不可解方程问题, 我们进一步考虑使用零点存在定理说明零点的存在与否.

分析 $f(x) = 2x - 6 + \ln x$ 可得 $y = 2x - 6$ 与 $y = \ln x$ 都是增函数, 故 $f(x) = 2x - 6 + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 而 $f(1) = -4 < 0$, $f(3) = \ln 3 > 0$, 则存在 $x_0 \in (1, 3)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点.

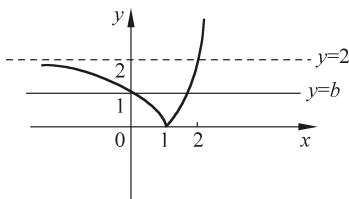
综上, $f(x)$ 有 2 个零点.

类型三: 由零点个数求解参数

【244】(0, 2).

提示: 函数 $f(x) = |2^x - 2| - b$ 有两个零点, 即 $y = |2^x - 2|$ 和 $y = b$ 的图像有 2 个交点.

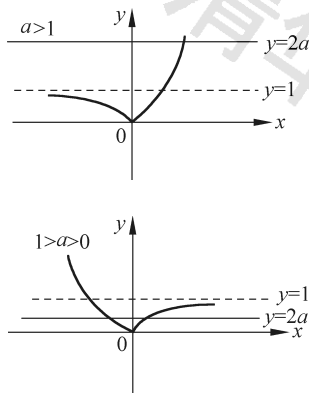
进一步通过画图判断 b 的范围.



由图像可得 $y = |2^x - 2|$ 和 $y = b$ 的图像要有 2 个交点, 则需 $0 < b < 2$, 故 $b \in (0, 2)$.

【245】 $(0, \frac{1}{2})$.

提示: 画图判断 a 的范围, 对于底数的不确定分类讨论.



通过分析图像可得:

当 $a > 1$ 时, $y = 2a$ 与 $y = |a^x - 1|$ 有一个交点;

当 $0 < a < 1$ 时, $y = 2a$ 与 $y = |a^x - 1|$ 要有两个交点, 则需

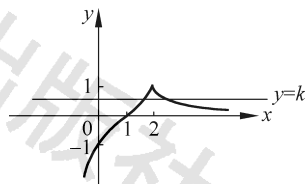
$0 < 2a < 1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$.

综上, $a \in (0, \frac{1}{2})$.

【246】(0, 1).

提示: 方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根, 即函数 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 的图像有两个交点.

那就画图判断 k 的取值范围.



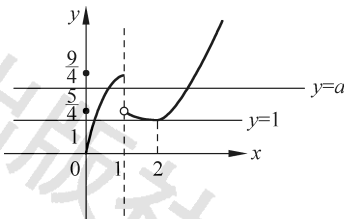
通过分析图像可得函数 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 的图像要有两个交点, 则需 $0 < k < 1$, 即 $k \in (0, 1)$.

【247】D.

提示: 方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ 有两个实数解, 即函数 $y =$

$$f(x) + \frac{1}{4}x = \begin{cases} 2\sqrt{x} + \frac{1}{4}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x, & x > 1 \end{cases} \quad \text{与 } y = a \text{ 的图像有}$$

两个交点, 那就画图判断 k 的取值范围.



通过分析图像可得函数 $y = f(x) + \frac{1}{4}x$ 与 $y = a$ 的图像要

有两个交点, 则需 $\frac{5}{4} \leq k \leq \frac{9}{4}$ 或 $k = 1$, 即 $k \in [\frac{5}{4}, \frac{9}{4}] \cup \{1\}$. 故选 D.

【248】 $(-\infty, 2\ln 2 - 2]$.

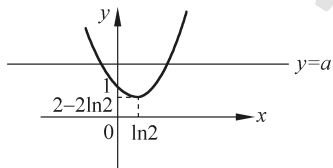
提示: 方法一: 函数 $f(x) = e^x - 2x + a$ 的零点转为函数 $g(x) = e^x$ 与 $y = 2x - a$ 的图像的交点, 临界状态时相切.

而 $g'(x) = e^x$, 设切点 $P(t, e^t)$, 令 $g'(t) = 2$ 解得 $t = \ln 2$, 将 $P(\ln 2, 2)$ 代入 $y = 2x - a$ 解得 $a = 2\ln 2 - 2$, 即相切时直线在 y 轴上的截距为 $2 - 2\ln 2$. 而 $g(x) = e^x$ 与 $y = 2x - a$ 有交点则需直线在 y 轴上的截距 $-a \geq 2 - 2\ln 2$, 化简得 $a \leq 2\ln 2 - 2$, 故 $a \in (-\infty, 2\ln 2 - 2]$.

方法二: 函数 $f(x) = e^x - 2x + a$ 的零点转为函数 $g(x) = e^x - 2x$ 与 $y = -a$ 的图像的交点, 而 $g(x)$ 的单调性是看不出来的, 那就求导吧! $g'(x) = e^x - 2$.

当 $x \in (-\infty, \ln 2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 且 $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$. $g(x)$ 的图像大致如图所示, 所以 $f(x) = e^x - 2x + a$

有零点,则需 $-a \geq 2-2\ln 2$,即化简得 $a \leq 2\ln 2-2$,故 $a \in (-\infty, 2\ln 2-2]$ 。

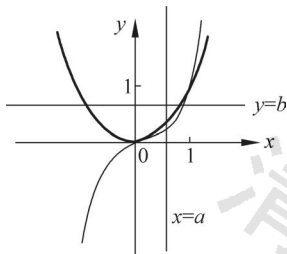


【249】 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 。

提示: $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点,即函数 $y = f(x)$ 与 $y = -b$ 的图像有两个交点。

通过画图以及 $f(x)$ 有两个零点判断 a 的范围。

通过平移直线 $x = a$ 来说明零点个数:



① 当 $a < 0$ 时, $y = f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上单调递增,在 $(a, 0)$ 上单调递减,在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,此时存在 $0 < b < a^2$, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = -b$ 的图像有两个交点。即 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点。

② 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,不存在 $b \in \mathbf{R}$,使得 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点。

③ 当 $1 < a$ 时,两个函数在 $x = a$ 处函数值不相等,即存在 $a^2 < b \leq a^3$, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = -b$ 的图像有两个交点,即 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点。

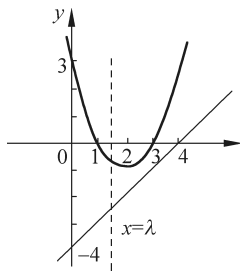
综上, $a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 。

【250】 $(1, 4), (1, 3] \cup (4, +\infty)$ 。

提示: 将函数的零点转为方程的根的个数问题,通过计算得零点个数。

当 $\lambda = 2$ 时,若 $x \geq 2$,令 $f(x) < 0$,即 $x - 4 < 0$,解得 $2 < x < 4$;若 $x < 2$,令 $f(x) < 0$,即 $x^2 - 4x + 3 < 0$,解得 $1 < x < 2$,故当 $\lambda = 2$ 时,由 $f(x) < 0$ 解得 $x \in (1, 4)$ 。

通过画图以及 $f(x)$ 有两个零点判断 λ 的范围,通过平移直线 $x = \lambda$ 来说明零点个数。



① 当 $\lambda \leq 1$ 时,抛物线 0 零点,直线 1 个,共 1 个,不合题意;

② 当 $1 < \lambda \leq 3$ 时,抛物线 1 个零点,直线 1 个,共 2 个;

③ 当 $3 < \lambda \leq 4$ 时,抛物线 2 个零点,直线 1 个,共 3 个;

④ 当 $4 < \lambda$ 时,抛物线 2 个零点,直线 0 个,共 2 个。

综上,若 $f(x)$ 有两个零点,则 $\lambda \in (1, 3] \cup (4, +\infty)$ 。

第3章 导数

3.1 计算

【251】e。

提示: 对 $f(x) = e^x \ln x$ 求导可得 $f'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} =$

$e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$, 则 $f'(1) = e$ 。

【252】3。

提示: 对 $f(x) = (2x + 1)e^x$ 求导可得 $f'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = e^x(2x + 3)$, 则 $f'(0) = 3$ 。总结出一个常见小结论: 若 $g(x) = e^x f(x)$, 则 $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)]$ 。

【253】B。

提示: 方法一: 对 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 求导可得 $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$, 则 $f'(1) = 4a + 2b = 2$ 。

$f'(-1) = -4a - 2b = -(4a + 2b) = -2$ 。故选 B。

方法二: 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数。

简证: $f(x)$ 是偶函数, 即 $f(-x) = f(x)$, 对等式两边求导可得 $-f'(-x) = f'(x)$, 即 $f'(-x) = -f'(x)$ 。

同样地, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数。

因为 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 是偶函数, 故 $f'(x)$ 是奇函数, 则 $f'(-1) = -f'(1) = -2$ 。

【254】B。

提示: 对 $f(x) = x \ln x$ 求导可得 $f'(x) = \ln x + 1$, 而 $f'(x_0) = \ln x_0 + 1 = 2$, 解方程得 $x_0 = e$ 。故选 B。

【255】3。

提示: 对 $f(x) = ax \ln x$ 求导可得 $f'(x) = a(\ln x + 1)$, 而 $f'(1) = a = 3$, 故 $a = 3$ 。

【256】D。

提示: 方法一: 多项式展开求导, $y = (x + 1)^2(x - 1) = x^3 + x^2 - x - 1$, 得 $y' = 3x^2 + 2x - 1$, 则 $y'_{x=1} = 4$ 。故选 D。

方法二: 使用四则运算求导, $y' = 2(x + 1)(x - 1) + (x + 1)^2 = 3x^2 + 2x - 1$, 则 $y'_{x=1} = 4$ 。故选 D。

【257】1。

提示: 对 $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$ 求导可得 $f'(x) = \frac{e^x(x+a-1)}{(x+a)^2}$, 而

$f'(1) = \frac{ae}{(1+a)^2} = \frac{e}{4}$, 解方程得 $a = 1$ 。

【258】1。

提示: 对 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin x$ 求导得 $f'(x) = -f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \cos x$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} +$

$\cos \frac{\pi}{4}$, 解得 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$, 则 $f(x) = (\sqrt{2} - 1) \cos x +$