

第 1 章 随机事件与概率

1.1 随机事件与概率概述



概率统计导引

1.1.1 随机现象

在现实世界发生的现象可谓千态万状,总体来说分为两类:必然现象和随机现象。必然现象在一定条件下必然出现。例如,月亮绕地球转,三角形的内角和为 180° ,异性电荷必相互吸引等。

随机现象情况较为复杂,在相同的条件下可能发生也可能不发生,当条件出现微小变化时,将会影响结果是否发生。例如,抛掷一枚硬币,出现的结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上;掷一枚骰子,出现的点数可能为偶数,也可能为奇数。

在重复观测了大量的同类随机现象后,我们发现随机现象具有两个特点:第一,随机现象具有随机性,在每次观测之前人们不能预知哪个结果出现;第二,大量重复实验或观察的结果往往会表现出一种完全确定的规律,即大量随机现象持有一种规律性。例如,抛掷一枚质地均匀的硬币,当投掷的次数较少时没有出现明显的规律性;但当投掷次数增多,正面出现的频率(正面出现的次数与抛掷总次数的比值)在 0.5 附近摆动。又如,用同一门炮向同一目标进行射击,当射击的次数较少时,弹着点并未出现较为明显的规律性;但当射击次数增加时,弹着点的分布具有规律性。这表明随机现象存在其固有的规律性,我们把随机现象这种在大量重复观测时所表现出来的量的规律性称为随机现象的统计规律性。

1.1.2 样本空间

在研究随机现象的过程中,为了揭示和探索随机现象的统计性规律,我们需要对随机现象进行大量重复的观测、记录或者试验。为了方便,将它们统称随机试验,简称为试验,并且用字母 E 表示。试验具有以下特性。

- (1) 可重复性。在同样的条件下试验可以大量重复进行。
- (2) 可知性。试验的结果可能是两个或多个,并且每次试验的结果都是确定的、可观测的。
- (3) 随机性。试验前无法预先知道每次试验的结果。

定义 1.1 试验 E 的一切可能基本结果组成的集合称为样本空间,记为 Ω 。 E 中的每个结果,即样本空间的元素称为样本点,用 ω 表示。

例 1.1 抛掷一枚硬币,观察正面 H 和反面 T 出现的情况(将这两个结果依次记作 ω_1

和 ω_2), 则试验的样本空间为

$$\Omega_1 = \{H, T\} = \{\omega_1, \omega_2\}$$

例 1.2 从一批产品中依次抽取 3 件, 记录抽取到正品 N 和残次品 D 的情况, 则试验的样本空间为

$$\Omega_2 = \{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD\}$$

例 1.3 一个盒子里有 6 个完全相同的球分别标以号码 $1, 2, \dots, 6$, 任意抽取一球, 则试验的样本空间为

$$\Omega_3 = \{1, 2, \dots, 6\}$$

1.1.3 随机事件的关系及运算

1. 随机事件

定义 1.2 一般我们称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件, 简称为事件, 用大写字母 A, B, C 等表示。在每次试验中, 当且仅当子集中的一个样本点 ω 发生时, 称事件发生。

由一个样本点组成的单点子集, 称为基本事件。样本空间 Ω 作为它自身的子集, 包含了所有的样本点, 每次试验总是发生, 称为必然事件。空集 $\emptyset$ 作为样本空间的子集, 不包含任何样本点, 每次试验都不发生, 称为不可能事件。

例 1.4 在例 1.3 中, 子集 $A = \{1\}$ 表示事件“抽中号码为 1 的球”, 子集 $B = \{3\}$ 表示“抽中号码为 3 的球”, A, B 都是基本事件。子集 $C = \{2, 4, 6\}$ 表示“抽中号码为偶数的球”, 子集 $D = \{1, 2, \dots, 6\}$ 表示“抽中号码小于 7 的球”, 子集 D 由 Ω 的全部样本点 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 组成, 为必然事件, 因此事件“抽中号码大于 6 的球”为不可能事件。

2. 事件间的关系

由于随机事件是样本空间的一个子集, 并且样本空间中可以定义多个事件, 每个事件之间都有自己的特点, 事件之间又可能存在一定的联系, 因此研究事件间的关系及运算, 有助于我们深刻掌握事件的实质, 并能够简化复杂事件的概率计算。因为事件是一个集合, 所以事件间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算进行处理。

设试验 E 的样本空间为 Ω , 其中 $A, B, A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是试验 E 的事件, 也是 Ω 的子集。

(1) 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 即属于 A 的每一个样本点一定也属于 B , 则称事件 B 包含事件 A (或事件 A 包含于事件 B), 记作 $A \subset B$ 。

在例 1.4 中, $A \subset D$ 。

另外, 如果 $B \subset A$ 且 $A \subset B$, 则称事件 A 与事件 B 相等 (或等价), 记作 $A = B$ 。

(2) 事件 A 和事件 B 所有样本点组成的新事件称为事件 A 与事件 B 的和 (或并), 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{\text{事件 } A \text{ 发生或事件 } B \text{ 发生}\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$ 。

在例 1.4 中, $A \cup B = \{1, 3\}$ 。

注:

① 对任一事件 A, B , 有 $A \cup \emptyset = A, A \cup \Omega = \Omega, A \cup A = A$ 。

② 事件的和可以推广到以下多个事件的情形。

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 中至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 中至少有一个发生}\}$$

(3) 事件 A 和事件 B 的相同样本点组成的新事件称为事件 A 与事件 B 的积(或交), 记作 $A \cap B$ (或 AB), 即 $A \cap B = \{\text{事件 } A \text{ 发生且事件 } B \text{ 发生}\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$ 。

在例 1.4 中, $A \cap D = \{1\}$ 。

注:

① $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap \Omega = A, A \cap A = A, A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$ 。

② 事件的积可以推广到以下多个事件的情形。

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 同时发生}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \dots \text{ 同时发生}\}$$

(4) 由在事件 A 而不在事件 B 的样本点组成的新事件称为事件 A 与事件 B 的差, 记作 $A - B$, 即 $A - B = \{\text{事件 } A \text{ 发生且事件 } B \text{ 不发生}\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 但 } \omega \notin B\}$ 。

在例 1.4 中, $D - A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

(5) 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 是互不相容的(或互斥的)。

在例 1.4 中, 事件 B 与事件 C 是互不相容的。

(6) 由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件, 即若 $A \cup B = \Omega, A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 是互逆的(或对立的), 并称其中的一个事件为另一个事件的逆事件(或对立事件), 记作 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$ 。

在例 1.4 中, 事件 C 的对立事件为 $\bar{C} = \{1, 3, 5\}$ 。

图 1.1(文氏图)直观地表示了上述各种事件关系及运算。

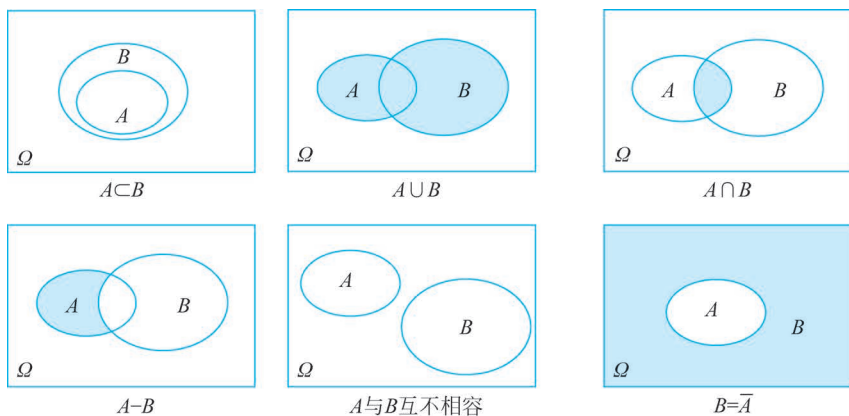


图 1.1 各种事件关系及运算

3. 事件间的运算

与集合的运算类似, 事件的运算有以下运算规律。

(1) 交换律。

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$$

(2) 结合律。

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (AB)C = A(BC)$$

(3) 分配律。

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup A_i),$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup A_i)$$

(4) 对偶律。

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(5) 其他规律。

$$A - B = A\bar{B} = A - AB$$

例 1.5 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 H 、反面 T 出现的情况, A_1 表示事件“第一次出现是 H ”, A_2 表示事件“三次出现同一面”, 请写出下列事件。

(1) $A_1 \cup A_2$ 。

(2) $A_1 \cap A_2$ 。

(3) $A_2 - A_1$ 。

(4) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$ 。

解: $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$, $A_2 = \{HHH, TTT\}$ 。

(1) $A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$ 。

(2) $A_1 \cap A_2 = \{HHH\}$ 。

(3) $A_2 - A_1 = \{TTT\}$ 。

(4) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 = \{THT, TTH, THH\}$ 。

1.1.4 事件域

事件域就是指样本空间 Ω 中的一些子集以及通过并、交、差、对立运算后得到的结果所组成的集合。

定义 1.3 设 Ω 为一样本空间, F 为 Ω 的某些子集所组成的集合类, 如果 F 满足:

(1) $\Omega \in F$ 。

(2) 若 $A \in F$, 则对立事件 $\bar{A} \in F$ 。

(3) 若 $A_n \in F (n=1, 2, \dots)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ 。

则称 F 为一个事件域, 又称为 σ 域或 σ 代数。

在概率论中, 又称 (Ω, F) 为可测空间, “可测”是指 F 中都是有概率可言的事件。

例 1.6 常见的事件域有以下几种。

(1) 若样本空间只含两个样本点 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, 记 $A = \{\omega_1\}$, $\bar{A} = \{\omega_2\}$, 则其事件域为 $F = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ 。

(2) 若样本空间含有 n 个样本点 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 则其事件域 F 是由空集 $\emptyset$ 、 n 个单元素集、 $\binom{n}{2}$ 个双元素集、 $\binom{n}{3}$ 个三元素集……和 Ω 组成的集合类, 这时 F 中共有 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ (个) 事件。

(3) 若样本空间含有可列个样本点 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$, 则其事件域 F 是由空集 $\emptyset$ 、可列个单元素集、可列个双元素集……可列个 n 元素集……和 Ω 组成的集合类, 这时 F 是由可列个的可列(仍为可列个)元素(事件)组成。

(4) 若样本空间 $\Omega = (-\infty, \infty) = R$, 这时事件域元素不能全部列出, 只能由一个基本集合进行逐步扩展。

运算过程为: 取基本集合类 $F = \text{“全体半直线组成的类”}$, 即

$$F = \{(-\infty, x) \mid -\infty < x < \infty\}$$

利用事件域的要求, 首先把有限的左闭右开区间扩展进来:

$$[a, b) = (-\infty, b) - (-\infty, a) \quad (\text{其中 } a, b \text{ 为任意实数})$$

再把闭区间、单点集、左开右闭区间、开区间扩展进来:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b + \frac{1}{n} \right)$$

$$\{b\} = [a, b] - [a, b)$$

$$(a, b] = [a, b] - \{a\}$$

$$(a, b) = [a, b) - \{a\}$$

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间。

- (1) 1 到 60 之间能被 6 整除的整数组成的集合。
- (2) 某次某个班级一次期中考试的平均成绩(以百分制计分)。
- (3) 抛掷一枚硬币, 直到背面朝上为止。
- (4) 某城市一天的用水量。

2. 设 A, B, C 为 3 个事件, 试用 A, B, C 表示下列事件。

- (1) A 发生, B 与 C 不发生。
- (2) A 与 B 都发生, 而 C 不发生。
- (3) A, B, C 中至少有一个要发生。
- (4) A, B, C 都发生。
- (5) A, B, C 都不发生。
- (6) A, B, C 中不多于一个发生。

(7) A, B, C 中不多于两个发生。

(8) A, B, C 中至少有两个发生。

3. 下列哪些事件是相等的?

(1) $A = \{2, 3\}$ 。

(2) $B = \{x | x \text{ 是一枚骰子的点数}\}$ 。

(3) $C = \{x | x^2 - 5x + 6\}$ 。

(4) $D = \{x | x \text{ 为抛出 6 枚硬币的反面数}\}$ 。

4. 样本空间为 $\Omega = \{1 \leq X \leq 4\}$, X 为随机变量, 事件 $A = \{1.5 < X \leq 3\}$, $B = \{2 \leq X < 3.5\}$, 写出下列各事件。

(1) $\overline{A}B$ 。

(2) $\overline{A} \cup B$ 。

(3) $\overline{A}\overline{B}$ 。

5. 设事件 A 表示“甲产品为次品, 乙产品为次品”, 求其对立事件 $\overline{A}$ 。

6. 证明下列事件的运算公式。

(1) $B = AB \cup \overline{A}B$ 。

(2) $A \cup B = B \cup \overline{A}B$ 。

7. 设 F 为一事件域, 若 $A_n \in F (n=1, 2, \dots)$, 试证:

(1) $\emptyset \in F$ 。

(2) 有限交 $\bigcap_{i=1}^n A_i \in F (n \geq 1)$ 。

(3) 有限并 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in F (n \geq 1)$ 。

(4) 可列交 $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$ 。

(5) 差运算 $A_1 - A_2 \in F$ 。

1.2 事件的概率

1.2.1 排列与组合

1. 计数原理

排列公式与组合公式都是取法公式, 即从 n 个元素中任意抽取 r 个元素, 主要区别在于如果不需要考虑抽取元素的顺序, 则用组合公式; 反之则用排列公式。排列公式与组合公式的推导都是基于加法原理和乘法原理。

1) 加法原理

完成一件事有 n 类方法 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若完成 A_1 过程有 k_1 种方法, 完成 A_2 过程有 k_2 种方法, $\dots$, 完成 A_n 过程有 k_n 种方法, 那么完成这件事有 $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ 种方法。

例如, 某趟动车组从蚌埠开到苏州, 中途只停靠南京、常州、无锡这 3 个站, 则需要为这趟车准备 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (种) 车票。



排列与组合

2) 乘法原理

若完成一件事需要分 n 步, 完成第 1 步 A_1 有 k_1 种方法, 完成第 2 步 A_2 有 k_2 种方法, …… , 完成第 n 步 A_n 有 k_n 种方法, 那么完成这件事有 $(k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n)$ 种方法。

例如, 书架上有 3 本历史书、8 本故事书, 要从书架上任取 1 本历史书和 1 本故事书共有 $3 \times 8 = 24$ (种) 取法。



乘法原理

2. 排列与组合

1) 排列

从 n 个元素中任意抽取 r 个元素进行排列, 若考虑顺序, 则有以下两种取法。

(1) 无放回选取: $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ 。

(2) 有放回选取: n^r 。

2) 组合

从 n 个元素中任意抽取 r 个元素组成一组, 若不考虑顺序, 则其种数为

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

注: 常用的组合公式如下。

(1) $C_n^r = C_n^{n-r}$ 。

(2) $C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$ 。

3) 可重复元素的排列

从 n 个不同的元素中可重复地选出 r 个元素排成一列, 共有 n^r 种方法。

4) 不尽相异的元素全排列

(1) 把 n 个元素分为 k 个部分, 各个部分分别含有 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 个元素, 即 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, 则不同的分法种数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

(2) 如果有 n 个元素, 有 n_1 个元素相同, 有 n_2 个元素相同, …… , 又有 n_k 个元素相同, 即 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$, 将这些元素全部取出来排成一排, 则排法种数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

1.2.2 概率的概念

对于随机事件来说, 它在一次试验中发生的可能性大小是未知的, 可能发生也可能不发生。因此, 我们若想知道某个随机事件在一次试验中发生的可能性大小, 应首先引入能够描述事件发生的频繁程度的频率, 进而引入能够表征随机事件发生可能性大小的数, 即概率。

定义 1.4 将随机试验在相同的条件下重复进行 n 次, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数, 而比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率, 记作 $f_n(A)$, 即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

频率 $f_n(A)$ 满足下列性质。

(1) 非负性。 $f_n(A) \geq 0$ 。

(2) 规范性。 $f_n(\Omega) = 1$ 。

(3) 有限可加性。对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ (即当 $i \neq j$ 时, 有 $A_i A_j = \emptyset (i, j = 1, 2, \dots, n)$), 有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(A_i)$$

$f_n(A)$ 表示在 n 次试验中事件 A 发生的频繁程度。 $f_n(A)$ 越大, 表明事件 A 的发生越频繁, 这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性越大; $f_n(A)$ 越小, 意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性越小。

大量的试验表明, 当试验次数 n 较小时, 频率 $f_n(A)$ 的波动幅度较大, 而随着试验次数 n 变大, 频率 $f_n(A)$ 的波动随之减小, 频率 $f_n(A)$ 趋于稳定, 在某一常数 s 附近摆动, 常数 s 称为频率的稳定值。我们用 s 这一数值来表征随机事件 A 发生的可能性大小, 称为事件 A 的概率, 记作 $P(A)$, 即 $P(A) = p$ 。

例 1.7 历史上众多名人都进行过抛硬币试验。从表 1.1 中可以看出, 正面朝上的频率趋于稳定后, 数值在 0.5 左右波动, 也就是说正面朝上的概率为 0.5。

表 1.1 抛掷硬币的试验结果

试 验 者	抛掷次数 n	正面朝上的次数 n_A	正面朝上的频率 $\frac{n_A}{n}$
德摩根 (De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰 (Buffon)	4040	2048	0.5069
费希尔 (Fisher)	10000	4979	0.4979
皮尔逊 (Pearson)	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005

在实际生活中, 我们在计算事件的概率过程中不可能对每一个事件都做大量试验来确定频率的稳定值, 从而确定事件的概率。因此, 经过近 3 个世纪的漫长探索, 1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (1903—1987) 明确定义了概率的概念, 使得概率论成为严谨的数学分支, 推动了概率论研究的发展。

定义 1.5 设 E 为随机试验, 其样本空间为 Ω , 如果对 E 的每一个事件 A 赋予唯一的一个实数 $P(A)$ 与之对应, 则 $P(A)$ 称为事件 A 的概率。

概率 $P(A)$ 满足下列条件。

(1) 非负性。对于任一事件 A , 有 $P(A) \geq 0$ 。

(2) 规范性。对于必然事件 Ω , $P(\Omega) = 1$ 。

(3) 可列可加性。对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ (即当 $i \neq j$ 时, 有 $A_i A_j = \emptyset (i, j = 1, 2, \dots)$), 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的这一定义称为公理化定义, 因高度抽象而具有广泛的适应性。法国数学家皮埃

尔·西蒙·拉普拉斯(1749—1827)认为概率是由未知和已知组成的,那么利用概率来研究不确定性便成了人们的共识。

1.2.3 古典概型



古典概型概述

如果随机试验 E 满足有限性(试验 E 的基本事件总数是有限个)和等可能性(每一个基本事件发生的可能性相同)两个条件,则称试验 E 为古典概型(或等可能概型)。

下面我们讨论古典概型中事件概率的计算公式。

设试验 E 的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 显然基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ 是两两互不相容的, 且 $\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}$ 。

由于 $P(\Omega) = 1$ 及 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n)$, 根据概率的性质, 有

$$1 = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = nP(\omega_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

如果事件 A 包含 k 个基本事件, 即 $A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\}$, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 是 $1, 2, \dots, n$ 中的某 k 个数, 则有

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \dots + P(\omega_{i_k}) = \frac{k}{n}$$

即

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\Omega \text{ 包含的基本事件总数}} \quad (1.1)$$

公式(1.1)就是古典概型中事件 A 的概率计算公式。

例 1.8 掷一枚骰子, 求“得到的数字是奇数”的概率。

解: 设 A 表示事件“得到的数字是奇数”, 由于试验的样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

所以, 基本事件总数 $n = 6$, 又 $A = \{1, 3, 5\}$, 即 A 所包含的基本事件个数 $k = 3$, 因此

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

在计算古典概型概率时, 很多时候可以不用写出试验的样本空间, 可以直接通过计算基本事件的总数和事件 A 所包含的基本事件个数(即公式(1.1))来计算。

例 1.9 一个箱子装有 15 个零件, 其中有 10 个标准零件和 5 个非标准零件。

(1) 从箱子中任取 1 个零件, 求取到非标准零件的概率。

(2) 从箱子中任取 2 个零件, 求取到 1 个标准零件和 1 个非标准零件的概率。

解: (1) 从 15 个零件中任取 1 个, 共有 $n = C_{15}^1 = 15$ (种)不同的取法, 即基本事件的总和为 15。又因为 15 个零件中有 5 个非标准零件, 所以取到次品有 $k = C_5^1 = 5$ (种)不同的取法。故取到非标准零件的概率为

$$p_1 = \frac{C_5^1}{C_{15}^1} = \frac{1}{3}$$

(2) 从 10 个零件中任取 2 个, 共有 $n = C_{15}^2 = 105$ (种) 不同的取法, 所以基本事件的总和为 30。而恰好取到 1 个标准零件和 1 个非标准零件的取法有 $k = C_5^1 C_{10}^1 = 50$ (种)。故取到 1 个标准零件和 1 个非标准零件的概率为

$$p_2 = \frac{C_5^1 C_{10}^1}{C_{15}^2} = \frac{50}{105} = \frac{10}{21}$$

假设在 N 件产品中, 有 M 件次品, 从中任取 n ($n \leq N$) 件, 则其中恰有 k ($k \leq \min\{n, M\}$) 件次品的概率为

$$p = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

例 1.10 在车间里有 6 名男工和 4 名女工, 根据工牌号码随机选择 7 名, 求所选择的人中有 3 名女工的概率。

解: 设 A 表示事件“选择的人中有 3 名女工”, 事件 A 包含了 $k = C_4^3 C_6^1 = 60$ (个) 基本事件, 所以

$$P(A) = \frac{C_4^3 C_6^1}{C_{10}^7} = \frac{1}{2}$$

例 1.11 把 n 个球以同样的概率随机地放入 N ($N \geq n$) 个箱子中, 试求下列事件的概率。

(1) 指定某 n 个箱子中各有 1 个球。

(2) 恰有 n 个箱子各有 1 个球。

解: 将 n 个球随机地放入 N 个箱子中, 所以样本总数为 N^n 。

(1) 记事件 A 为“指定某 n 个箱子中各有 1 个球”, 将 n 个球分配到 N 个预先指定的箱子中去, 相当于 n 个球的全排列, 于是 $P(A) = \frac{A_n}{N^n} = \frac{n!}{N^n}$ 。

(2) 记事件 B 为“恰有 n 个箱子各有 1 个球”, 相当于在 N 个箱子中任意取出 n 个, 然后再将 n 个球放入其中, 每箱 1 个球, 所以共有 $C_N^n \times n!$ 种不同的放法, 于是 $P(B) = \frac{C_N^n \times n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}$ 。

例 1.11 的问题也可以应用到其他情形。如分配住房问题, 即将 n 个人分配到 N 个房间去住, 则 n 个人相当于 n 个球, N 个房间相当于 N 个箱子; 性别问题, 即 n 个人的性别分布, 相当于把 n 个球放在 2 个箱子中。

例 1.12 从 1, 2, ..., 8 中随机抽取 1 个数, 抽取后放回, 先后取出 5 个数, 试求下列各事件的概率。

(1) 5 个数全不相同。

(2) 取出的最大数为 6。

解: 8 个相异的元素可以重复地抽取 5 个元素, 所以样本总数为 8^5 。

(1) 记事件 A 为“5 个数全不相同”, 考虑到又放回取样, 因此事件 A 相当于 8 个相异元