# 第 5 章

# 插值与拟合

公元 600 年，隋朝数学家刘焯在其所著的历法《皇极历》中使用等间距二次插值公式计算“每日迟速数”。“推日迟速数”术就是为了定朔的需要而计算太阳在两个节气之间逐日行度改正数的方法。术文有一份按节气变化的日躔表，转换成现代形式如表 5-1 所示。

表 5-1　节气中日躔迟速表

| 月份 | 11 | | 12 | | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 气/$t$ | 大雪 | 冬至 | 小寒 | 大寒 | 立春 | 雨水 | 惊蛰 | 春分 | 清明 | 谷雨 |
| 迟速数/$f(t)$ | | 速 0 | 速 50 | 速 93 | 速 129 | 速 165 | 速 208 | 速 258 | 速 208 | 速 165 |
| 陟降率/$\Delta$ | | 陟 50 | 陟 43 | 陟 36 | 陟 36 | 陟 43 | 陟 50 | 陟 50 | 陟 43 | 陟 36 |

刘焯给出了计算每日陟降率的公式为

$$f(nl+t)-f(nl)=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\frac{t}{l}+(\Delta_1-\Delta_2)\frac{t}{l}-\frac{1}{2}(\Delta_1-\Delta_2)\left(\frac{t}{l}\right)^2 \tag{5-1}$$

式(5-1)中，$l$ 为一个特定的天文时段，$t$ 为 $nl$ 后的某一时刻，$f(t)$为天体在 $t$ 时段的行度，$\Delta_1,\Delta_2$ 分别为天体在两个连续时间段内的行度，即

$$\Delta_1=f(nl+l)-f(nl)$$
$$\Delta_2=f(nl+2l)-f(nl+l)$$

其中 $n$ 为零或正整数。令 $l=1,n=t_0$ 并对式(5-1)进行整理得

$$f(t_0+t)=f(f_0)+\Delta_1 t+\frac{1}{2}t(t-1)(\Delta_2-\Delta_1)$$

现以在小寒—大寒区间插值为例，由表 5-1 可知，$f(nl)=50,\Delta_1=43,\Delta_2=36$，将 $t_1=\frac{t}{l}=\frac{11}{160}$代入式(5-1)有

$$\begin{aligned}f(nl+t)-f(nl)&=\frac{43+36}{2}\frac{11}{160}+(43-36)\frac{11}{160}-\frac{1}{2}(43-36)\left(\frac{11}{160}\right)^2\\&=2.7156+0.4813=0.0165\\&=3.1804\end{aligned}$$

即为小寒节后第一日的陟降率 $\Delta_1$。

式(5-1)的推演过程运用了匀变速运动之路程与时间等量的数学关系，这比伽利略对

匀变速运动的研究提前了1000余年。

上面的例子说明,在科学研究与生产实践中常常会遇到这样的问题:得到了一组观测数据,但通过观测所得到的只是有限点上的函数值,对于其他点上的函数值不能直接求出,在这种情况下,我们需要根据已知的观测数据得到一个近似的函数表达式以近似地表示真实的函数关系。本章将要讨论的插值和拟合是处理这类问题的两种常用方法。

## 5.1　插值问题的基本概念

### 5.1.1　插值问题的定义

设定义在区间$[a,b]$上的函数$y=f(x)$,已知它在该区间上的$n+1$个互异节点$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$上的函数值为$y_0,y_1\cdots y_n$,记为$f(x_i)=y_i,i=0,1,\cdots,n$。

如果选取简单函数$P(x)$作为函数$y=f(x)$的近似表达式,并满足条件

$$P(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots) \tag{5-2}$$

则这样的函数近似问题称为插值问题。式(5-2)称为插值条件,满足插值条件的近似函数$P(x)$称为函数$f(x)$的插值函数,$f(x)$称为被插值函数,互异节点$x_0,x_1,\cdots x_n$称为插值节点,区间$[a,b]$称为插值区间。

插值函数有很多种,如代数多项式、三角多项式和有理函数等,本章讨论的就是最常见的多项式插值。

### 5.1.2　插值多项式存在的唯一性

在$n+1$个互异节点上满足插值条件(5-2)的次数不高于$n$次的插值多项式为

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n \tag{5-3}$$

称为插值多项式。

**定理 5.1**　在$n+1$个互异节点上满足插值条件(5-2)的次数不高于$n$次的插值多项式$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n$存在且唯一。

证明:如果条件(5-3)的$n+1$个系数可以唯一确定,则该多项式也就存在且唯一。

根据插值条件,插值多项式$P_n(x)$系数满足线性方程组

$$\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots a_nx_0^n=y_0\\ a_0+a_1x_1+\cdots a_nx_1^n=y_1\\ \qquad\vdots\\ a_0+a_1x_n+\cdots a_nx_n^n=y_n\end{cases} \tag{5-4}$$

其系数行列式$V$为范德蒙行列式,且

$$V=\begin{vmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 0}(x_i-x_j)$$

由于节点互异,即$(x_i\neq x_j)(i\neq j)$,所以$V\neq 0$,从而,方程组(5-4)解$a_0,a_1,\cdots,a_n$存在且唯一,故插值多项式存在且唯一。

定理 5.1 不仅确定了插值多项式存在且唯一，而且也提供了它的一种求法，即可通过解线性方程组(5-4)来确定其系数。

**例 5.1** 当 $x=1,-1,2$ 时，相应的函数值分别为 $0,-3,4$。试求该函数的二次插值多项式。

**解** 设插值多项式为 $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，插值多项式必须满足插值条件 $P(x_i)=y_i(i=0,1,2)$，构成非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2=0 \\ a_0-a_1+a_2=-3 \\ a_0+2a_1+4a_2=4 \end{cases}$$

方程组的解为 $\left(-\frac{7}{3},\frac{3}{2},\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{T}}$，插值多项式为 $P_2(x)=-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}x+\frac{5}{6}x^2$。

### 5.1.3 插值余项

在插值区间 $[a,b]$ 上用插值多项式 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$，除了在插值节点 $x_i$ 上没有误差外，在其他非插值节点上一般会存在误差。

插值函数 $P_n(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 之间的误差称为插值余项或截断误差。记作

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x) \tag{5-5}$$

插值余项的大小可用来衡量插值函数 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 之间的准确程度。插值函数大小的确定由下面的定理给出。

**定理 5.2** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数，$x_0,x_1,\cdots x_n$ 为该区间上的 $n+1$ 个互异的节点，$P_n(x)$ 为满足插值条件 $P_n(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$ 的 $n$ 次插值多项式，对于任何 $x\in[a,b]$，有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x) \tag{5-6}$$

其中 $w_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$\xi\in(a,b)$ 且依赖于 $x$。

**证明** 由插值条件(5-2)可知

$$R_n(x_i)=f(x_i)-P_n(x_i)=0(i=0,1,2,\cdots,n)$$

这表明插值节点都是 $R_n(x)$ 的零点，故可设

$$R_n(x)=K(x)w_{n+1}(x) \tag{5-7}$$

其中，$K(x)$ 为待定函数，对于区间 $[a,b]$ 上异于 $x_i$ 的任意一点 $x\neq x_i$ 作辅助函数

$$F(t)=f(t)-P_n(t)-K(x)w_{n+!}(t)$$

函数 $F(t)$ 有如下特点：

(1) $F(x)=F(x_i)=0(i=0,1,\cdots,n)$；

(2) 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数，且

$$F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-K(x)\cdot(n+1)! \tag{5-8}$$

根据罗尔定理可知 $F'(t)$ 在开区间 $(a,b)$ 内至少有 $n+1$ 个零点。同理可知 $F^{(n+1)}(t)$ 在开区间 $(a,b)$ 内至少有一个零点，记为 $\xi$，则 $F^{(n+1)}(\xi)=0$，于是有

$$F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-K(x)\cdot(n+1)!\ =0$$

$$K(x)=f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$$

将它代入式(5-7)得到式(5-6)。

定理5.2给出了插值余项 $R_n(x)$ 的表达式，在插值余项的表达式中，$\xi\in(a,b)$，但 $\xi$ 的具体数值通常很难确定，从而无法确定插值余项的大小。这时可以通过下面的表达式来估计插值余项。

令 $M=\max\limits_{x\in I}|f^{(n+1)}(x)|$，$I$ 为包含 $n+1$ 个互异节点的最小开区间，则有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \tag{5-9}$$

在实际计算过程中，经常采用式(5-9)来估计截断误差。通过分析式(5-6)，可以看出截断误差的大小主要受两个因素的影响。

(1) $f^{(n+1)}(\xi)$ 对截断误差有影响。许多函数的高阶导数的绝对值会随着导数阶数的增加而迅速增加，从而使截断误差的绝对值增大。

例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\ \dfrac{1}{x^{n+1}}$，若 $x$ 固定，则当 $n$ 增加时，$|f^{(n)}(x)|$ 按 $n!$ 的速度增长。

(2) $w_{n+1}(x)$ 对截断误差有影响。由 $w_{n+1}(x)=\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 可知，若 $x$ 固定，则当节点的个数很多时，$n$ 很大，互异节点中只有少数节点距离 $x$ 较近，其他大部分节点距离节点 $x$ 较远，距离 $x$ 较远的节点与 $x$ 之差的绝对值较大，最终导致 $|w_{n+1}(x)|=\left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$ 很大，从而使截断误差增大，由此可以看出，在进行插值运算时，高次插值并不可取，实际中常用的是低次插值。为了使 $|w_{n+1}(x)|=\left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$ 尽可能小，插值节点的选取原则是使 $x$ 尽可能处于包含 $x$ 和插值节点的最小闭区间的中部。

如果被插函数 $f(x)$ 本身是一个不高于 $n$ 次的多项式，则由余项公式可知，$R_n(x)\equiv 0$，因此其 $n$ 次插值多项式 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 精确相等。

## 5.2　拉格朗日插值多项式

利用待定系数法，我们可以通过求解线性方程组来得到插值多项式。但是当插值节点的个数很多时，求解线性方程组时的计算量就会非常大，所以在实际中几乎很少利用待定系数法求插值多项式。本节将介绍一种简便方法——拉格朗日插值方法。

### 5.2.1　拉格朗日插值基函数

在 $n+1$ 个互异节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 上，拉格朗日插值基函数 $l_k(x_i)$ 的特点为

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, & i=k\\0, & i\neq k\end{cases} \tag{5-10}$$

根据拉格朗日插值基函数的特点，可以确定拉格朗日插值基函数的具体表达形式。

设 $l_k(x)=A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$，其中 $A_k$ 为待定系

数。由条件 $l_k(x_k)=1$ 得

$$A_k=\frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

故

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},k=0,1,\cdots,n \tag{5-11}$$

## 5.2.2 拉格朗日插值多项式

利用插值基函数，我们可以给出拉格朗日插值多项式。在 $n+1$ 个互异节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 上，满足插值条件(5-2)的拉格朗日插值多项式记为 $L_n(x)$，即

$$L_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots y_nl_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x) \tag{5-12}$$

其中 $l_k(x)$ 为式(5-11)。

当节点个数不同时，拉格朗日插值多项式的表达形式也不同。下面分别写出 $n=1,2$ 时的拉格朗日插值多项式的表达形式。

当 $n=1$ 时，一次插值多项式为

$$\begin{aligned}L_1(x)&=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)\\&=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\end{aligned} \tag{5-13}$$

一次插值是通过两点$(x_0,y_0)$、$(x_1,y_1)$的直线方程，也称线性插值，如图 5-1 所示。

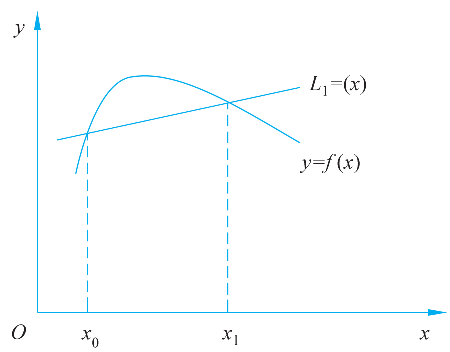


图 5-1 线性插值

当 $n=2$ 时，得到过三点的插值多项式

$$\begin{aligned}L_2(x)&=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)\\&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\\&\quad y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\end{aligned} \tag{5-14}$$

用二次函数 $L_2(x)$ 近似函数 $f(x)$，$L_2(x)$ 为过三点的一条抛物线，所以也称为抛物线插值，如图 5-2 所示。

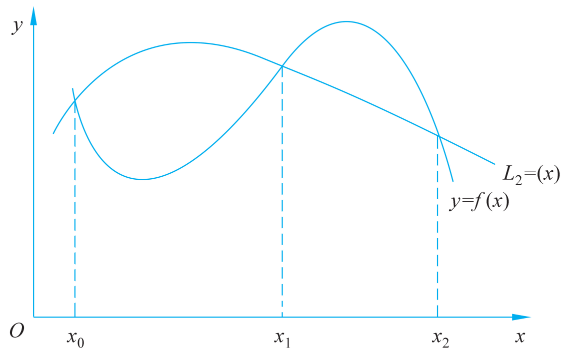


图 5-2　二次插值

**例 5.2**　已知函数 $y=\sqrt{x}$ 的一组数据为

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 100 | 121 | 144 |
| $y_i$ | 10 | 11 | 12 |

试选择合适的节点，分别用线性插值和二次插值求出 $\sqrt{115}$ 的近似值。

**解**　表中给出了 3 个互异节点，而线性插值只需要 2 个互异节点即可，这时为使截断误差的绝对值较小，选取节点 $x_0=100, x_1=121$，相应的有 $y_0=10, y_1=11$，即

$$L_1(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)=y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$=10\times\frac{x-121}{100-121}+11\times\frac{x-100}{121-100}$$

$$L_1(115)\approx 10.714$$

二次插值需要 3 个互异节点，即

$$\begin{aligned}L_2(x)&=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+y_2 l_2(x)\\&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\&=10\times\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}+12\times\\&\quad\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}\end{aligned}$$

$$L_2(115)\approx 10.7228$$

**例 5.3**　估计例 5.2 中二次插值求 $\sqrt{115}$ 时的截断误差。

**解**　利用式(5-9)估计误差。

已知

$$f(x)=\sqrt{x},\quad f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$$

$$M=\max_{x\in[100,144]}|f^{(3)}(x)|=\max_{x\in[100,144]}\left|\frac{3}{8}x^{-5/2}\right|=\frac{3}{8}\times 10^{-5}$$

得

$$|R_2(115)| \leqslant \frac{M}{3!}|(115-100)(115-121)(115-144)| \leqslant 1.63 \times 10^{-3}$$

# 5.3 差商与牛顿插值多项式

拉格朗日插值多项式具有便于计算和编程等优点，但是当增加新的节点时，插值公式需要重新计算，会带来较大的工作量。而相同情形下，牛顿插值多项式只需在原来的插值多项式的基础上增加一项，既节约了计算时间，也为实际计算带来了方便。在介绍牛顿插值多项式之前，需要先了解差商的概念及性质。

## 5.3.1 差商的定义与性质

**定义 5.1** 已知函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 上的函数值分别为 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$。

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

称为 $f(x)$ 关于节点 $x_i,x_{i+1}$ 的一阶差商

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$$

称为 $f(x)$ 关于节点 $x_i,x_{i+1},x_{i+2}$ 的二阶差商。一般的，称

$$f[x_i,x_{i+1},\cdots x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},\cdots x_{i+k}]-f[x_i,\cdots x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i} \tag{5-15}$$

为 $f(x)$ 关于节点 $x_i,x_{i+1},\cdots x_{i+k}$ 的 $k$ 阶差商。当 $k=0$ 时，称之为 $f(x_i)$ 关于节点 $x_i$ 的零阶差商，记为 $f[x_i]$。

计算差商时常采用表格的形式，如表 5-2 所示。

表 5-2 差商表

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$<br>$x_1$<br>$x_2$<br>$x_3$ | $f(x_0)$<br>$f(x_1)$<br>$f(x_2)$<br>$f(x_3)$ | $f[x_0,x_1]$<br>$f[x_1,x_2]$<br>$f[x_2,x_3]$ | $f[x_0,x_1,x_2]$<br>$f[x_1,x_2,x_3]$ | $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ |

差商的性质如下。

**性质 1**：函数 $f(x)$ 的 $k$ 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_k]$ 可由函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_m)$ 的线性组合表示，即 $f[x_0,x_1,\cdots x_k]=$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)} \tag{5-16}$$

**性质 2**：差商与其所含节点的排列次序无关。

**性质 3**：$f(x)$在包含互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的闭区间$[a,b]$上有 $n$ 阶导数，则 $n$ 阶导数与 $n$ 阶差商之间有如下关系成立，即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \xi \in (a,b) \tag{5-17}$$

## 5.3.2　牛顿插值公式

设 $x \in [a,b]$，根据差商的定义，$x_i \in [a,b]$，$f[x, x_0] = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$，

移项整理可得

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \tag{5-18}$$

利用二阶差商的性质

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

移项得

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

将此式代入式(5-18)得

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$$

重复以上过程可得

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ & + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned} \tag{5-19}$$

记

$$\begin{aligned} N_n(x) = {} & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \\ & (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{5-20}$$

为牛顿插值多项式。式(5-19)与式(5-20)相比，立即可得其余项公式为

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]w_{n+1}(x) \tag{5-21}$$

由 $R_n(x_i) = f(x_i) - N_n(x_i) = 0 (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$得 $f(x_i) = N_n(x_i)(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$。因此，牛顿插值多项式满足插值条件。同时由插值多项式存在且唯一可知

$$P_n(x) = L_n(x) = N_n(x)$$

且其余项也一定相等，即

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \xi \in (a,b)$$

证明了差商的性质 3。

**例 5.4**　已知函数 $y = 3^x$ 的数据如下表。

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 1 | 3 | 9 | 27 |

试用此组数据构造3次牛顿插值多项式 $N_3(x)$，并计算 $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$。

**解** 利用差商表作牛顿插值多项式

作差商表如下：

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| | | 2 | | |
| 1 | 3 | | 2 | |
| | | 6 | | 4/3 |
| 2 | 9 | | 6 | |
| | | 18 | | |
| 3 | 27 | | | |

$$
\begin{aligned}
N_3(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 1 + 2x + 2x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\
&= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1
\end{aligned}
$$

$$N_3\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

## 5.4 差分与等矩节点插值公式

本节给出等矩节点情况下的牛顿插值多项式，并引入差分的概念，将等距节点下的牛顿插值多项式表示为更简洁的形式。

### 5.4.1 差分及其性质

**定义 5.2** 设函数 $y=f(x)$ 在等矩节点 $x_i=x_0+ih\,(i=0,1,2,\cdots,n)$ 上的值 $y_i=f(x_i)$ 已知，这里 $h=x_i-x_{i-1}$ 为常数，称为步长，记作

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \tag{5-22}$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \tag{5-23}$$

分别称为函数 $y=f(x)$ 在 $x_i$ 处以 $h$ 为步长的向前差分和向后差分，符号 $\Delta$，$\nabla$ 分别称为向前差分运算符、向后差分运算符。

与差商相似，高阶差分可以由低阶差分表示，如二阶差分可表示为

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

更高阶的差分可用同样的方法递推得到。

差分的性质如下。

**性质 1** 差分与差商有以下关系

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m}] = \frac{1}{m!}\,\frac{1}{h^m}\Delta^m y_i \tag{5-24}$$

$$f[x_i,x_{i-1},\cdots,x_{i-m}]=\frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m y_i \tag{5-25}$$

**性质 2**

$$\nabla^i y_n=\Delta^i y_{n-i} \tag{5-26}$$

**性质 3**　设函数 $y=f(x)$在包含等距节点 $x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+j}$的区间 $I$ 上有 $j$ 阶导数，则在该区间上至少存在一点 $\xi$，使

$$\Delta^j y_i=h^j f^{(j)}(\xi),\xi\in I \tag{5-27}$$

性质 1 可以应用数学归纳法进行证明，性质 2 利用性质 1 即可证明，性质 3 利用式(5-17)与式(5-24)即可得出。

差分的运算通过差分表来进行，可以分别构造向前插分表和向后差分表。由差分的性质 2 可知，当用同一组数据进行差分运算时，向前差分表与向后差分表中的数据是相同的，但该数据所表示的意义有所不同。以向前差分表 5-3 为例。

表 5-3　差分表

| $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|
| $y_0$ | $\Delta y_0=y_1-y_0$ | $\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0$ | $\Delta^3 y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$ |
| $y_1$ | $\Delta y_1=y_2-y_1$ | $\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1$ | |
| $y_2$ | $\Delta y_2=y_3-y_2$ | | |
| $y_3$ | | | |

## 5.4.2　等距节点下的牛顿插值公式

利用差商与差分之间的关系，可以将牛顿插值多项式利用差分来表示，当利用向前差分来表示差商时会得到牛顿向前差分公式，利用向后差分表示差商时会得到牛顿向后差分公式。

首先推导牛顿向前差分公式，如果要计算的插值点 $x$ 靠近 $x_0$，可以令

$$x=x_0+th\,(t>0),$$

对等矩节点有

$$x_k=x_0+kh$$

$$N_n(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{5-28}$$

这个用向前差分表示的插值多项式称为牛顿向前插值公式，它适用于计算表头 $x_0$ 附近的函数值。如果 $x$ 靠近节点 $x_i$，则只需将式(5-28)中的 $y_0$ 换成 $y_i$ 即可。

其余项为

$$R_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in(x_0,x_n) \tag{5-29}$$

当节点的顺序为 $x_n,x_{n-1},\cdots,x_0$ 时，牛顿插值多项式可写成

$N_n(x)=f(x_n)+f[x_n,x_{n-1}](x-x_n)+\cdots+f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0](x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)$。