第 1 章　数学解题简论

1.1　数学解题的认识

所谓解题，顾名思义，就是"解决问题". 数学解题即求出数学题的答案，根据数学问题的类型，答案可以是通过逻辑演绎的方式给出的，通常称为"证明"，也可以是由计算或计算加演绎得到的，通常称为"解". 所以，解数学题就是求出该题的"证明"或"解"的活动. 作为教育任务的数学题不同于数学上未解决问题，其答案都是已知的，所以学习过程中的解题是一个再创造的过程，是数学学习的核心内容之一.

数学解题是数学教育至关重要的环节，没有解题的训练过程就好比观众看杂技演员走钢丝，原理看似简单，保持平衡就可以了，但真正自己走上钢丝的时候却无法做到平衡，这是缺少训练的必然结果. 解题是将课堂上学到的数学思想与方法运用到实际问题中从而内化成自身能力的一个必经过程. 无论是对概念、定理的理解与熟练运用，还是对数学思想方法的领悟与思维能力的提升，都需要通过解题活动得到实现. 解题也是评价学生掌握数学知识的深度与广度以及数学综合水平的有效手段. 虽然学生的学业评价不完全由解题水平确定，但解题的确是最有效、最方便、最直接也是最公平的方法. 它对于数学学习者的整个学习过程是至关重要的.

解题研究是通过对一些典型数学题的分析，探究数学问题解决的基本规律，学会用数学的头脑思考问题. "题"是解题的对象，"解"则是解题的目标，解题是开发智力的重要方式，具有提升数学思维能力的功能.

学生也许习惯了具体的数学题，注重解答的准确性，关心解题的结果，却忘记了解题的初衷，解题的目的并非结果，而是过程. 这与数学家以问题

解决为目标的研究是不同的.解题强调的是其教育价值,即通过解题弄清楚问题解决的障碍,熟悉探索问题的过程,在这个过程中不仅强化了对所学数学概念与定理的理解,更懂得了如何利用它们学会思考辨析,创造性地解决问题.换句话说,解题是一种“有意识地寻求某一适当的行动,以便达到一个被清楚地意识到但又不能立即达到的目的.”(波利亚《数学的发现》[1]).

从思维的形式考察,数学解题包括直觉思维、形象思维、抽象思维和逻辑思维四种基本形式,这几种形式并非相互孤立,在解决一个数学问题的过程中常常需要综合运用几种不同的思维形式.直觉思维可以帮助解题者从问题中捕捉重要信息,通过联想、类比、归纳等方法提取解题依据与解题方法,或猜测一般性的结论,这个过程通常是形象思维的过程.它需要解题者具有比较系统的知识结构和一定的解题策略.在此基础上将各种信息进一步组合,最终形成对问题的完整认知链,对所有相关信息进行加工,组合成严谨的逻辑结构,这个过程正是培养逻辑思维能力的过程.

在解决问题的过程中,由于没有掌握足够的信息量,可能误入歧途,所以需要不断地调整思路,改变策略,甚至改变考虑问题的角度.实际上,在对问题的分析中,需要不断地试错,通过各种特殊的案例找到可能的途径,不断有新的发现.

解题的前提是审题,理解题意.很难想象,在题意不清的情况下能找到解决问题的方法.解题者首先需要清楚地知道目标是什么?条件是什么?条件与结论之间需要通过何种桥梁建立起联系?当这种桥梁建立起来之后,解题的思路也就呼之欲出了.在此基础上,尝试给出解答,运气好的话,设想的方案是可行的,问题得到圆满解决.但很多时候,事情并不那么顺利,可能缘于对隐藏的信息没有深入的挖掘,亦可能在某个地方遇到了难以逾越的技术障碍,需要解题者调整策略或方案,有时甚至需要从头开始.尽管第一次的尝试失败了,但失败是成功之母,正是通过这个失败找到了问题的关键所在,进而找到了解决问题的合适方案.

应该看到的是,解题的过程总是因人而异的,有些人或许天生具有某

种洞察力，或许对问题的理解比较透彻，他能够立刻抓住问题的关键，找到解决问题的最佳途径.有些人也许在还没有准确理解题意，尚未掌握必要信息或不清楚条件与目标之间的逻辑关联的情况下便试图求解，其结果可想而知.即使是前者，在完成解答之后，也应该进行反思，寻找可能存在的更好的解答或结果.

1.2　数学解题的意义

哈尔莫斯说："学习数学的唯一方法是做数学."(参见文献[2])适度地解题是数学学习必不可少的环节，但教师应该对问题有所选择，选择那些能启发学生思考、有效提升学生数学思维能力的好题，而不仅仅是依靠刷题提高熟练度.通过富有启发性的问题帮助学生发现其中所蕴含的规律，进而达到触类旁通的效果.

解题的意义何在？价值是什么？这是需要首先搞清楚的问题.解题的意义在于通过合适的问题固化所学的概念、原理以及所体现的思想方法，并能熟练运用它们解决问题.解题的本质特征是探究或研究，刷题在一定程度上可以提升解题的速度，这在大题量的考试中是必不可少的，尤其是通过对题目进行合适的分类，可起到举一反三的效果.但刷题除了增加熟练度外，对提升学生的数学思维能力并无太大价值.

解题的本质在于探究.探究性解题不仅可以达到对知识与方法的深入理解与掌握，更有利于创新思维能力的形成与发展.在此过程中，能否取得成就的关键在于学生的探究热情是否被充分激发出来.学生囿于认知能力的局限，教师合适的引导是不可或缺的.换言之，在充分体现学生主体地位的同时需要有教师的有效引导、帮助与支持.

学生的解题通常在两种场景下，一种是独立自主解题，课外自主学习过程中的解题通常属于这种类型；另一种是在教师引导下解题，课堂教学过程中的练习或习题课一般都需要教师的引导.即使是学生独立自主的解

题，也离不开课堂上教师的有效引导与启发，教师需要教会学生解题的一般方法，而不是通过类比简单模仿教材或教师的解法，否则所谓探究将成为一句空话，最终陷入传统刷题的窠臼.

探究式解题通常指针对给定的问题从条件出发，将问题进行分解，形成一个层层递进的问题链，进而找到最终解决问题的方法. 换言之，所谓探究式解题，即将解题过程当成一个研究的过程，其理论基础是弗登塔尔的“数学教育是数学的再创造”. 众所周知，数学并非单纯的演绎科学，当人们试图解决一个数学问题时，并不是仅仅通过罗列一些条件，然后进行推理. 实际上，解决问题是一个不断摸索、试错、猜想、检验的过程. 解题不仅有固化已学概念、原理的功能，同时也是培养解决数学问题正确方法的重要实践环节. 当然，学生的认知能力和知识积累与数学家不能相提并论，不可能像数学家那样完全独立地研究数学. 所以不仅教师要在课堂上示范性地创设一系列引导式问题以启发学生寻找解决问题的思路，而且学生在课外独立自主解题时也需要学会有逻辑地将问题“化整为零”，通过从特殊到一般，从具体到抽象的思辨，最终找到解决问题的方法.

问题出现的形式是千变万化的，从解题的功能性看，问题可以分为两类，一类是固化所学概念、定理以及简单运用的基本问题，这类问题通常不需要经历太复杂的思考过程；另一类是提升思维能力的综合问题，解决这类问题不仅需要对过去所学的概念、定理及基本思想了然于胸，还需要具备一些创造性思维能力，通过抽丝剥茧、层层剖析，从复杂的条件中抓住最本质的东西，进而找到解决问题的方案. 这两类问题都是必不可少的，而且它们面对的对象也有所不同. 第一类问题面对的是所有学生，它是固化所学知识不可或缺的重要过程；第二类问题则是面对学有余力的学生，这些学生需要在固化概念、定理的基础上学会综合运用，掌握更高阶的思维能力，即创新能力、问题求解能力、决策力和批判性思维能力. 这种思维能力体现了新时代对人才素质的新要求，它是适应时代发展的关键能力. 但企图让所有的学生都具备高阶思维能力是不切实际的，每个人都是独特的，各有其所长，各有其所短，其天赋是千差万别的，教师对其要求自然也有所

不同.教育的根本任务是让每一个学生都享受到适合自己的教育,真正体现因材施教的原则.我国目前实施的中考分流、拔尖人才培养等举措正是体现了这种原则.每个学生都需要努力提升自身解决问题的能力,但这种能力对不同的学生所展现的方面是不同的.

从数学题的类型看,一般分选择题、填空题与解答题.但问题的难度未必按照题目的类型分级,有些选择题与填空题也许需要不小的计算量,与解答题不同的是不需要详细写出过程,这类题的得分率不见得高,需要学生对知识点非常熟悉,并且训练有素.从应试的角度看,提高这类题的答题准确率的重要方法是训练熟练度,即俗称的刷题.对于刷题,需要有一个客观的认识,刷题并非一无是处.俗话说,熟能生巧,多做题,尤其是分类做题,善于总结答题经验,从而培养"题感",即做题的感觉,当看到某一道题时,就可以下意识地想到用哪一类方法去解.但从数学思维能力训练的角度看,刷题不是一个好方法,它需要的是深度思考的能力.各种考试中的部分解答题依靠刷题常常无法奏效,答题者不具备相当的数学直觉且数学思维能力不足以完成这类题型的解答.刷题的问题不在于刷,而在于题.要刷两类题目.一类是错题,即你做错的习题或考题,这类题目反映出你的薄弱环节,是你的难点所在,刷这样的题目可以做到有的放矢,达到事半功倍的效果;另一类是考试的真题,一份试卷是命题者对相关知识点重要程度的一个较全面的反映,可以比较充分地反映出考点的所在,以及各考点的深度(难度)与广度(综合程度)的体现.

无论出于提升分析问题与解决问题能力的目的还是应试的目的,两者并无根本矛盾.考试的初衷乃是检验考生掌握概念、原理、思想与方法的程度,检验学生的数学素养与运用数学理论与方法解决问题的能力.所以,选拔式考试是根指挥棒,如何使之能真正促进素质教育,促进一线教师加强学生数学思维能力的培养,改革是一项势在必行的工作.另外,学习要兼顾能力提升与应试两个方面.对概念与原理要融会贯通,这是成功解题的基础.所以,在一定时期内,适当刷题依然是不可或缺的解题环节,但同时也需要适应新的考试模式对解题能力的要求,在提升熟练度的同时要兼顾素

养与能力的提升.

探究式解题至少应注意三方面的问题:

(1) 如何从问题的条件出发通过特例、试错等方法猜测一般规律?

(2) 如何在前述基础上找到解决问题的方法并反思是如何想到这个方法的?

(3) 什么是好的方法?第一个环节属于方法的探究过程,第二个环节本质上属于元认知问题,第三个环节则涉及对数学方法的价值与审美判断.

1.3 数学解题的方法

成功解题的基础是具有相当的知识积累,指望脑子如一张白纸的人完成数学解题是天方夜谭.哥德巴赫猜想很容易被理解,但对于一个只有初高中知识的人来说,这是个不可能解决的问题,因为所有可能的最初等方法早就为前人所尝试过了.

当然,仅仅有足够的知识积累未必能顺利完成一道题的解答,还需要具备根据目标问题将所有知识点之间的逻辑关系进行快速梳理的能力.事实上作为学习任务的数学题所需要的数学素材都在解题者已经熟知的数学知识体系中,能否成功解决某个问题,不在于知识量是否足够,而在于能否从问题所提供的信息中挖掘似曾相识的知识点,并在这些知识点之间建立起逻辑关系.绝大多数情况下,一旦在目标与所涉及的知识点之间建立起了逻辑关系,解题的思路也就水到渠成了.常见的解题障碍在于对问题的信息没有充分的了解,对目标与相关知识点之间的逻辑关系不够清楚,俗称找不到感觉,无从下手.假设解题者熟悉相关知识点,具有解决问题的足够知识量,克服这个障碍的唯一办法是回到起点,仔细寻找问题中的信息与所熟悉的问题、知识点之间的逻辑关系,这样有助于产生正确的思路.

如果上述方法依然不可行,不妨改变问题的条件,先从特例开始,再寻

找一般方法.这里不妨以著名的勾股定理为例,说明如何寻找解一般直角三角形的方法.

迄今为止,人们发现了勾股定理的四百多种证明方法.教学中通常以两种方式引入,一种是从毕达哥拉斯的故事开始,另一种是从赵爽弦图作为切入点.但这两种方法都没有揭示出勾股定理需要解决的问题是什么,更没有阐述清楚这个问题的重要性以及勾股定理所蕴含的思想方法.

从数学的角度看,勾股定理是为了解特殊三角形——直角三角形.作为初中生,此前学习了全等三角形,清楚全等三角形的判定定理,已经具备了解这类问题的知识量.关键在于如何通过已掌握的知识,深入挖掘问题内在的信息,从而找到解决问题的方案.问题所提供的信息有两点:①直角三角形;②两条边的长度.从全等三角形的判定定理可知这个直角三角形是唯一确定的,理论上就是可解的.

问题是清楚的,相关的信息也是清楚的,剩下的是如何寻找这些信息与已经熟悉的知识点之间的逻辑关系.我们需要解决的问题是,一个直角三角形的两条边的长度已知,如何计算第三条边的长度?我们不妨按照这样的逻辑梳理这个问题与已知知识点之间的关系:

(1)如何在直角三角形的三个边之间建立起联系?

不难想到,通过三角形的面积可以在三条边之间建立起关系,因为可以在三角形的每条边上作高进而计算三角形的面积.假设 Rt$\triangle ABC$ 的两个直角边 a,b 是已知的,记斜边的长为 c,斜边上的高为 h,则三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}hc.$$

这里遇到了一个本质的困难:斜边上的高也是未知的,所以从上述等式并不能通过直角边的长计算斜边的长.

如果我们纠缠在这个一般问题上,可能终究不得其解,不妨将问题特殊化,先考察一类特殊的直角三角形——等腰直角三角形:

(2)能否找到等腰直角三角形的斜边与直角边之间的关系?

如果在等腰直角三角形的斜边上作三角形的高(如图 1.1 所示),假设 $AB=c$,则由 $AC=CB=a$ 及 $CD=AD=\frac{1}{2}AB$ 知$\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}\left(c\cdot\frac{1}{2}c\right)=\frac{1}{4}c^2,\quad 故\ c^2=2a^2.$$

这里成功地得到了斜边与直角边之间的关系,但在回到一般直角三角形之前还有一段路需要走.几何上看,c^2 是以三角形斜边长为边长的正方形面积,a^2 是以直角边为边长的正方形面积,这样自然建立了以等腰直角三角形斜边为边的正方形与以直角边为边的正方形面积之间的关系(如图 1.2 所示).从这个图形不难发现,斜边为边的正方形由四个已知的等腰直角三角形构成,这个发现是发现解一般直角三角形思路的关键.

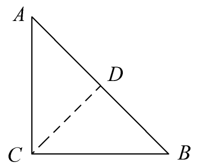

图 1.1　等腰直角三角形

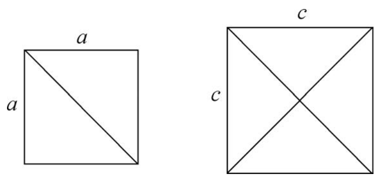

图 1.2　以 a,c 为边的正方形

(3) 上述拼图的方法是否适用于一般的直角三角形?

通过对(2)的分析,不难想到如何尝试解一般直角三角形的方法,即利用四个已知的全等直角三角形拼凑.思路找到了,拼凑的方向也就有了,而且方法不是唯一的.例如,下面的两种拼凑方法并不难想到(参见图 1.3).

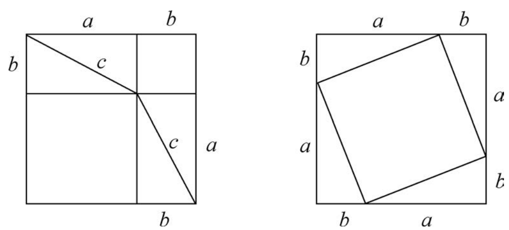

图 1.3　用直角三角形拼凑成正方形

赵爽弦图也是由四个已知直角三角形拼凑而成,但要从赵爽弦图中发现勾股定理还需要运用代数公式进行计算,不如上述两幅图更加直接(参

见图 1.4).

上述三个问题分别揭示了勾股定理的意义,发现证明的基本思想方法以及最终的解决途径.

通过对(1)的思考,作出了直角三角形斜边上的高,如果不急于纠结三边之间的关系,而是从几何上考察被斜边上的高分割出来的几个直角三角形,则走向了另一条可能的途径.事实上,斜边上的高将直角三角形分成了两个小的相似三角形,而且它们与原来的三角形也是相似的(参见图 1.5).

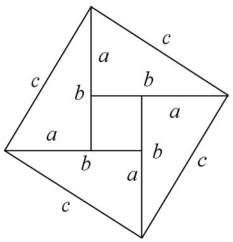

图 1.4　赵爽弦图

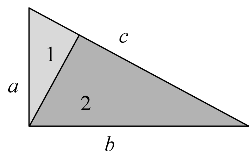

图 1.5　直角三角形及斜边上的高线

显然,两个小三角形的面积之和等于大三角形的面积.众所周知,相似三角形对应边成比例,假如问题的目标不明确,即解题者尚不清楚勾股定理在说什么,需要去发现直角三角形三条边之间的关系,或许沿着这条路径很难走下去.假定解题者对勾股定理的内涵是清楚的,需要做的是寻找它的证明途径,事情则另当别论.原直角三角形三个边的平方分别代表以它们为边的正方形的面积,这三个正方形的边正好也是三个相似三角形的斜边(参见图 1.6).三个三角形的对应边之比的平方即面积之比,如果设三角形面积与以其斜边为边的正方形面积之比为 m,则三个三角形的面积

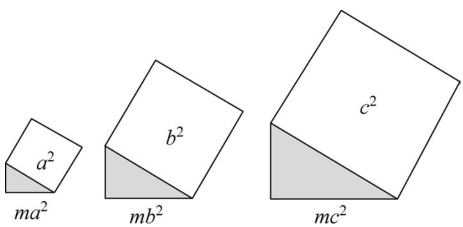

图 1.6　以图 1.5 中三条边为斜边的三个相似三角形的面积间的关系

分别为 ma^2，mb^2，mc^2：于是有 $a^2+b^2=c^2$. 相传这个证明是爱因斯坦在 11 岁左右的时候给出的，虽然某教材曾经误传爱因斯坦用相对论的质能方程证明了勾股定理，也算是幽了一大默！但这个证明充分说明了爱因斯坦很聪明.

从勾股定理的证明发现可以看出，为了获得问题的最终解决，可以先考虑问题的特殊情形，或许对特殊情形的分析可以为一般问题的解决带来可能. 当然，有时未必如此幸运，这就需要换一种思路，重新寻找解决问题的出路.

1.4 数学解题的目标

如前所述，解题的目标除了固化所学知识外，更重要的目标是掌握重要的数学思想方法，提升数学思维能力，形成良好的思维习惯，从而有效挖掘潜在的智力，激发创造力. 这就需要解题者不能将知识作为解决问题的机械化工具，而要掌握知识背后所蕴藏的思想方法，这或许是很多解题者所欠缺的.

当一个数学问题出现时，我们首先要做的不是急于给出解答，而是针对该问题进行模式识别，搞清楚问题的本质. 为了解决这个问题，常常需要按步骤设计一系列小问题，分析这些小问题的目的是最终解决目标问题. 即波利亚所说的辅助问题（参见文献[1]）. 通过对辅助问题的分析，可以找到对目标问题的解题思路. 辅助问题的提出并非凭主观臆断，需要根据问题所涉及的知识点厘清问题与相关知识点的逻辑关联，这种逻辑关联的梳理通常需要通过设计辅助问题来分析，深入挖掘所隐藏的思想方法，进而透彻理解目标问题的本质，而不是机械地将相关的知识点运用于目标问题的解答.

解题者不仅要准确、灵活地掌握数学知识，了解不同知识点之间的内在联系，还需要通过对相关知识点的回顾与联想形成解决问题的思想方