

第1章

行列式

历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题,这类问题的求解和研究最早出现在《九章算术》中(参见图 1.1). 线性方程组理论不断发展促进了作为工具的行列式和矩阵理论的创立与发展,行列式主要是解决方程的个数与未知量的个数相等时的线性方程组的解的问题,其基本概念和相关理论是线性代数课程的主要内容之一,同时也是研究线性代数其他内容的重要工具.

行列式(determinant)是一个数,最早由日本数学家关孝和及德国数学家莱布尼茨(Leibniz)分别在 1683 年和 1693 年独立提出(参见图 1.2),比形成独立体系的矩阵理论大约早了 160 年.

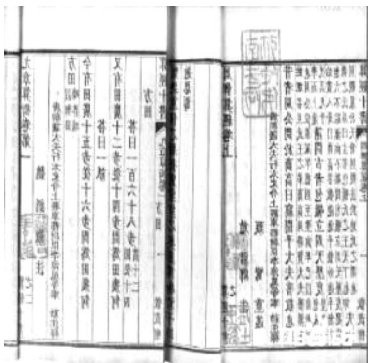


图 1.1 九章算术



图 1.2 莱布尼茨

1750 年,瑞士数学家克莱姆(G. Cramer)在他的《线性代数分析导言》中(参见图 1.3),发表了求解线性系统方程的重要公式——克莱姆法则,给出了当方程的个数和未知数的个数相等的情况下,求解 n 元线性方程组的方法. 法国数学家范德蒙德(A-T. Vandermonde)是第一个把行列式理论与线性方程组求解分离开来的人(参见图 1.4),提出了用二阶子式和它的余子式来展开行列式的法则,完善了行列式的概念,被公认为是行列式理论的奠基人. 1772 年,拉普拉斯(Laplace)证明并推广了范德蒙德行列式展开的方法. 1815 年,法国数学家柯西(Cauchy)给出了行列式的乘法定理,另外,他第一个把行列式的元素排成方阵,采用双足标记法,并改进了拉普拉斯的行列式展开定理. 德国数学家雅可比(J. Jacobi)引进了“雅可比行列式”,给出了函数行列式的导数公式,他的论文《论行列式的形成和性质》标志着

行列式系统理论的建成.



图 1.3 克莱姆

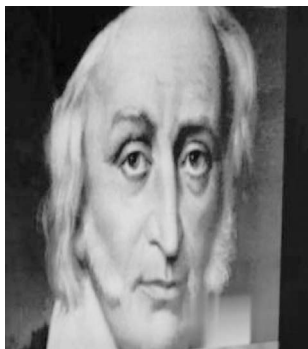


图 1.4 范德蒙德

行列式是线性代数中一种重要的数学工具和概念,它广泛应用于数学、物理和工程等领域.本章主要讨论行列式的定义、性质、计算及其在线性方程组求解中的应用.

1.1 排列

线性代数的许多问题在不同的数集内讨论会得到不同的结论.为了深入讨论线性代数中的某些问题,我们先引入数域的概念.

1.1.1 数域

定义 1.1 如果数集 F 满足:

- (1) $0 \in F, 1 \in F$.
- (2) 数集 F 对于数的四则运算是封闭的,即 F 中的任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然在 F 中,则称数集 F 是一个数域.

用上述定义容易验证,有理数集 $\mathbb{Q}$ 、实数集 $\mathbb{R}$ 、复数集 $\mathbb{C}$ 都是数域,今后称它们为有理数域 $\mathbb{Q}$ 、实数域 $\mathbb{R}$ 、复数域 $\mathbb{C}$.

1.1.2 排列

在 n 阶行列式的定义中,要用到排列的相关知识,为此先介绍排列的一些基本内容.

定义 1.2 由数 $1, 2, \dots, n$ 组成一个有序数组,称为一个 n 级排列.特别地,数字由小到大的 n 级排列 $1234 \cdots n$ 称为自然序排列.

例如,4321 是一个 4 级排列.

由 n 个数组成的排列共有 $n!$ 个,如数 1, 2, 3 组成的所有 3 级排列为: 123, 132, 213, 231, 312, 321, 共有 $3! = 6$ 个.

定义 1.3 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面 ($i_s < i_t$),则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序,一个 n 级排列中每个数形成逆序数之和,称为这个排列的逆序数,记作 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如,在 5 级排列 53421 中,53,54,52,51,32,31,42,41,21,各构成一个逆序,所以,排列 53421 的逆序数为 $N(53421)=9$.

自然序排列的逆序数为 0,即 $N(12\cdots n)=0$.

求逆序数的方法:

(1) 分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码的个数之和,即算出排列中每个元素的逆序数,则每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

(2) 分别计算出排列中每个元素后面比它小的数码的个数之和,即算出排列中每个元素的逆序数,则每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

定义 1.4 若排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数,则称此排列为奇排列,逆序数是偶数的排列则称为偶排列.

于是,排列 53421 是奇排列.自然序排列是偶排列.

定义 1.5 在一个 n 级排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中,如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置,其余各数的位置不变,就得到另一个新的 n 级排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$,这样的变换称为一个对换,记作 (i_s, i_t) .

如在排列 3124 中,将 1 与 4 对换,得到新的排列 3421.显然, $N(3124)=2$, $N(3421)=5$,就是说,偶排列 3124 经过 1 与 4 对换后,变成了奇排列 3421.反之,也可以说奇排列 3421 经过 1 与 4 的对换后,变成了偶排列 3124.

一般地,关于排列有如下定理.

定理 1.1 任一排列经过一次对换后,其奇偶性改变.

定理 1.2 在所有的 n 级排列中($n \geq 2$),奇排列与偶排列的个数相等,各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

如数 1,2,3 组成的所有 3 级排列 123,132,213,231,312,321 中, $N(123)=0$, $N(132)=1$, $N(213)=1$, $N(231)=2$, $N(312)=2$, $N(321)=3$,也就是说奇排列和偶排列的个数相等.

定理 1.3 任一 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 都可通过一系列对换与 n 级自然序排列 $12\cdots n$ 互变,且所作对换的次数与这个 n 级排列有相同的奇偶性.

如排列 321, $N(321)=3$,经过一次对换 $(1,3)$,成为自然序排列 123,所作对换的次数与排列 321 的逆序数具有相同的奇偶性,反之亦然.

习题 1.1

一、填空题

对换一次_____排列的奇偶性,对换 $2n$ 次_____排列的奇偶性.

二、选择题

1. 5 级排列有()种排列方式.

- A. $5!$ B. 25 C. 9 D. 16

2. 下列排列是 5 级偶排列的是().

- A. 24315 B. 14325 C. 41523 D. 24351

三、计算下列排列的逆序数

1. 75863241;

2. $n(n-1)\cdots 321$;

3. $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

1.2 行列式的基本概念

行列式的概念起源于解线性方程组,它是从二元与三元线性方程组的解的公式引出来的.本节主要通过介绍二阶、三阶行列式的定义,引出 n 阶行列式的定义.

1.2.1 二阶行列式

设有关于未知元 x_1, x_2 的一般形式的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

当方程组的系数满足 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,通过加减消元法可求出未知量 x_1, x_2 的值

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

这就是一般二元线性方程组的公式解.我们引入新的符号来表示解(1.2)中的这个结果,这就是行列式的起源.

定义 1.6 用 4 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称为二阶行

列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

它含有两行两列,横的称为行,纵的称为列.行列式中的数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表示该元素在 i 行,元素 a_{ij} 的第二个下标 j 称为列标,表示该元素在 j 列.特别地,此行列式是线性方程组(1.1)中未知数的系数按其原有的相对位置而排成的,故也称为**系数行列式**.

从定义 1.6 可知,二阶行列式是这样两项的代数和:一个是从左上角到右下角的对角线(又称为行列式的主对角线)上两个元素的乘积,取正号;另一个是从右上角到左下角的对角线(又称为行列式的次对角线)上两个元素的乘积,取负号,也就是说二阶行列式等于位于不同行不同列元素乘积的代数和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

于是,二阶行列式等于主对角线两元素之积减去次对角线两元素之积,这个记忆法则称为“**对角线法则**”.

类似地,根据二阶行列式的定义,容易得知,解(1.2)中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1)的解(1.2)可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (1.3)$$

这样用行列式来表示解,形式简便整齐,便于记忆.分子中的行列式, x_1 的分子是把系数行列式中的第 1 列换成方程组(1.1)的常数项得到的,而 x_2 的分子则是把系数行列式的第 2 列换成方程组(1.1)的常数项而得到的.

例 1.1 在《九章算术》第七卷“盈不足”中有记载:“今有共买物,人出八,盈三;人出七,不足四.问人数、物价几何?”题意:有几个人一起去买一件物品,每人出 8 钱,则多 3 钱,每人出 7 钱,则缺 4 钱,问有多少人? 物品多少钱? 试用行列式计算.

解 设有 x_1 人,物价为 x_2 钱,由题意列出线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 = 3, \\ 7x_1 - x_2 = -4. \end{cases}$$

得系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 8 \times (-1) - 7 \times (-1) = -1 \neq 0,$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - (-1) \times (-4) = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 8 \times (-4) - 7 \times 3 = -53,$$

因此,方程组的解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-1} = 7, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-53}{-1} = 53.$$

所以总共有 7 人, 物品价值为 53 钱.

1.2.2 三阶行列式

我们引入三阶行列式的概念, 称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

为三阶行列式, 它有三行三列, 是六项的代数和, 每一项等于位于不同行不同列元素的乘积. 这六项的和也可用对角线法则来记忆: 从左上角到右下角三个元素的乘积取正号, 从右上角到左下角三个元素的乘积取负号. 这个记忆法则称为“对角线法则”, 如图 1.5 所示.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

图 1.5 对角线法则示意图

为了方便记忆, 法国数学家萨吕 (Sarrus) 引入了三阶行列式展开式记忆的萨吕法则, 如图 1.6 所示.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

图 1.6 萨吕法则示意图

注 对角线法则只适用于二阶和三阶行列式的展开式记忆, 而萨吕法则只适用于三阶行列式的展开式记忆.

例 1.2 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解 根据三阶行列式的萨吕(对角线)法则, 得

$$D = 1 \times 1 \times 4 + 1 \times 1 \times 1 + 0 \times (-2) \times 3 - 0 \times 1 \times 1 - 1 \times 3 \times 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 10.$$

1.2.3 n 阶行列式

根据二阶及三阶行列式的定义, 行列式等于位于不同行和不同列元素乘积的代数和, 类似地, 我们引入 n 阶行列式的概念.

定义 1.7 由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它是 $n!$ 项的代数和, 每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积, 各项的符号是: 每一项中各元素的行标排成自然序排列, 若列标的排列为偶排列时, 则取正号; 若为奇排列, 则取负号. 于是得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

注 (1) n 阶行列式的展开式为 $n!$ 项的代数和, 每一项都是 n 个元素的乘积, 这 n 个元素位于 n 阶行列式的不同行不同列.

(2) n 阶行列式是一个数值或代数和.

(3) 若 n 阶行列式某一行(列)元素均为 0, 则行列式的值为 0.

(4) 特别地, 一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

n 阶行列式还可用如下形式表示:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

例 1.3 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 由于 n 阶行列式展开式中各项的一般形式为 $(-1)^{N(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$, 根据题意取 $p_1=1, p_2=2, \dots, p_n=n$, 得不为零的项 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{N(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

(2) 由于 n 阶行列式展开式中各项的一般形式为 $(-1)^{N(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$, 根据题意取 $p_1 = n, p_2 = n-1, \cdots, p_n = 1$, 得不为零的项 $a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$, 所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

进一步地, 有如下结论:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}, \quad (1.4)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1.5)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}.$$

形如(1.4)式的行列式称为上三角行列式, 形如(1.5)式的行列式称为下三角行列式.

习题 1.2

一、填空题

1. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ 的系数行列式为 _____, 其展开后的值为 _____.

2. 在以 a_{ij} 为元素的 6 阶行列式 D 的展开式中, $a_{12}a_{23}a_{45}a_{34}a_{56}a_{61}$ 的符号为_____.

3. 在以 a_{ij} 为元素的 4 阶行列式 D 的展开式中, 含有因子 $a_{11}a_{23}$ 带正号的项为_____.

$$4. \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} 9 & 45 & 79 & -1 \\ 0 & 10 & -1 & 64 \\ 37 & 1 & 23 & -1 \\ 35 & 89 & 1 & 46 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题

$$1. \text{ 已知 } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -k \\ 3 & k & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 则 } k = (\quad).$$

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

$$2. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\quad).$$

A. 0

B. -1

C. 1

D. 2

三、计算下列行列式:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & -c \\ -b & c & 1 \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2023 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2024 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2025 \end{vmatrix}.$$

四、设有关于未知元 x_1, x_2, x_3 的三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时, 验证 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$ 为此方程

组的解, 其中 $D_i (i=1, 2, 3)$ 是常数项 b_1, b_2, b_3 替换系数行列式 D 中第 i 列元素所得的行列式.

1.3 行列式的性质及应用

根据行列式的定义展开低阶行列式是可行的,当行列式的阶数较高时,计算量非常大,本节将介绍行列式的基本性质,把复杂的行列式转化为较易展开的行列式.

1.3.1 行列式的性质

定义 1.8 将行列式 D 的行列互换后得到的行列式称为行列式 D 的转置行列式,记作 D^T ,即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{则 } D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然,行列式 D 也是行列式 D^T 的转置行列式,即 $(D^T)^T = D$,行列式 D 与行列式 D^T 互为转置行列式.

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等.

证明 根据行列式的定义, D 与 D^T 的展开式均有 $n!$ 项,在 D 中任取一项,不妨设为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,其中各元素取自不同的行及不同的列,符号为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$,这 n 个元素的乘积在 D^T 中对应于取自不同的列及不同的行元素的乘积 $a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$,符号也为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$,因此 D 与 D^T 是有相同项的行列式,所以 $D = D^T$.

这一性质表明,行列式中的行、列的地位是对称的,即对于“行”成立的性质,对“列”也同样成立,反之亦然.

$$\text{如, } D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2, D^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2, \text{ 所以 } D = D^T.$$

性质 1.2 交换行列式的两行(列),行列式变号.

证明 设有行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ \\ (s \text{ 行}) \end{matrix},$$

将第 i 行与第 s 行 ($1 \leq i < s \leq n$) 互换后,得到行列式