第1章

随机事件及其概率

在自然界和人类社会活动中经常出现各种现象，归纳起来大致可分为两类. 其中一类现象，在一定条件下必然发生，只要条件不变，结果是可以准确预知的，比如，“水在标准大气压下温度达到 100℃时必然沸腾”“同性电荷相斥，异性电荷相吸”等，称这类现象为确定性现象或必然现象(certainty phenomenon). 另一类现象指在相同条件下，试验或观测的结果可能发生，也可能不发生，因此在试验或观测前不能预知确切的结果，比如，“向上投掷一枚硬币，结果可能是正面向上，也可能是反面向上”“一名步枪射击运动员的各次射击结果，可能命中靶心，也可能不命中靶心，而且各次弹着点也不尽相同”“一个人的体检结果是健康还是不健康”，等等. 称这类现象为不确定现象(uncertainty phenomenon). 在不确定现象中，有一类现象，个别试验或观测中结果呈现出随机性，而在大量重复试验或观测中其结果具有某种规律性，如多次投掷一枚硬币得到正面向上和反面向上的结果大概各占一半，同一名射击运动员在一段时间内射击的弹着点有一定的规律，等等. 这种在大量重复试验或观测中呈现出的固有规律性称为统计规律性(statistic regularity)，这类现象称为随机现象(random phenomenon).

概率论与数理统计(probability theory and mathematical statistics)就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，它包括概率论(probability theory)和数理统计(mathematical statistics)两方面的内容. 其中，概率论研究随机现象的规律性，而数理统计则以概率论为基础，研究如何有效地收集、整理和分析受随机性影响的数据，并据此对所研究的问题做出统计推断和预测，从而为采取决策和行动提供依据和建议.

概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学及工农业生产等诸多领域中都发挥着巨大的作用. 诸如在航空航天、天气预报、地震预报、海洋探险、电子技术、医学生物学、环境科学、经济决策、金融保险、市场营销、产品质量检测等领域都有广泛的应用. 概率论与数理统计的理论和方法渗入各个基础学科、工程技术学科和社会学科，已成为近代科学发展的明显特征之一.

本章主要介绍随机事件的概念、关系与运算，概率的几种不同形式的定义及其计算，条件概率，以及事件的独立性.

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与样本空间

为了研究随机现象的内在规律性，必然要对客观事物进行观察、测定和实验. 通常，把对随机现象的观察或进行一次实验，称为一个试验.

定义 1.1 若一个试验具有以下 3 个特点：

(1) 可重复性：可以在相同的条件下重复进行；

(2) 明确性：每次试验的结果可能不止一个，且试验前能明确所有可能的结果；

(3) 随机性：进行一次试验之前不能确定会出现所有可能结果中的哪个结果.

则称该试验为**随机试验**(**random experiment**)，记为 E.

例 1.1 以下是一些随机试验的例子.

(1) E_1：将一枚硬币连续抛两次，观察出现正面 H 和反面 T 的情况；

(2) E_2：将一枚硬币连续抛两次，观察正面 H 出现的次数；

(3) E_3：抛一枚均匀的骰子，观察落地时出现点的个数；

(4) E_4：观察小李某条朋友圈信息 24h 之内收到好友的点赞数(假定小李有好友 500 人)；

(5) E_5：记录某城市高铁站出站口某一天的乘客人数；

(6) E_6：在某小学一年级同学中任选一人，测量其身高 h、体重 w(假定这些同学的身高介于 100cm 和 140cm 之间，体重介于 15kg 和 40kg 之间)；

(7) E_7：从同一批次的手机中任取一台，测试其使用寿命.

定义 1.2 随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为 E 的**样本空间**(**sample space**)，记为 Ω. 样本空间中的元素，即 E 的每一个可能的试验结果称为**样本点**(**sample point**)，记为 ω.

例 1.2 写出例 1.1 中的随机试验对应的样本空间.

解 (1) $\Omega_1=\{HH,HT,TH,TT\}$；

(2) $\Omega_2=\{0,1,2\}$；

(3) $\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(4) $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots,500\}$；

(5) $\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\}$；

(6) $\Omega_6=\{(h,w)\mid 100\leqslant h\leqslant 140,15\leqslant w\leqslant 40\}$；

(7) $\Omega_7=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

由上述例子可知，样本空间的样本点数有的有限(如 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$)，有的无限可数(如 Ω_5)，有的无限不可数(如 Ω_6,Ω_7). 样本空间的样本点是由试验目的确定的，在试验 E_1 和 E_2 中，都是将硬币连续抛两次，由于实验目的不同，其样本空间也不同.

1.1.2 随机事件

定义 1.3 随机试验的样本点构成的集合称为**随机事件**(**random event**)，简称事件(event)，通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$表示.

事件是样本空间的子集.由单个样本点组成的事件称为基本事件，由多个样本点组成的事件称为**复合事件**.

在随机试验中，若组成随机事件 A 的某个样本点出现，则称事件 A 发生；反之，则称 A 不发生.显然，随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生.

比如，在掷骰子的试验中，用 A 表示事件“出现点数为奇数”，则 $A=\{1,3,5\}$；用 B 表示事件“出现点数最小”，则 $B=\{1\}$.显然 A 是复合事件，B 是基本事件.若试验结果是“出现 3 点”，则事件 A 发生，事件 B 不发生.

定义 1.4 每次试验都必然发生的事件，称为**必然事件**(**certain event**)，记为 Ω.

样本空间中包含所有的样本点，每次试验中都必然发生，故它是必然事件.

定义 1.5 每次试验中不可能发生的事件，称为**不可能事件**(**impossible event**)，记为$\varnothing$.即它不包含任何样本点.

必然事件与不可能事件实为确定性事件，无随机性，但是为了讨论方便，将它们看作特殊的随机事件.

1.1.3 随机事件的关系与运算

在同一个随机试验中，一般会有多个随机事件，对于复杂的事件，可以表示为复合事件或基本事件的集合.为了更加深入地认识事件的本质，我们有必要分析事件之间的关系.而事件是集合，因此事件之间的关系与运算可以用集合之间的关系与运算来处理.

给定一个随机试验，其样本空间是 Ω，事件 A,B,C 与 $A_1,A_2,\cdots$都是 Ω 的子集.

1. 事件的关系

(1) 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 是事件 B 的**子事件**(**subevent**).记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

(2) 事件的相等

若事件 A 与事件 B 满足 $A\subset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3) 事件的和(或并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**和**(**或并**)**事件**(**union of events**)，记为 $A\cup B$.

两个事件的和事件的概念可以推广到有限个事件的和事件或可列个事件的和事件的情形.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，表示 A_1，

$A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,表示 A_1,A_2,…至少有一个发生.

(4) 事件的积(或交)

事件 A 与事件 B 同时发生这一事件,称为事件 A 与 B 的**积(或交)事件(product events)**,记为 $A\cap B$,简记为 AB.

两事件的积事件的概念可以推广到有限个事件的积事件或可列个事件的积事件的情形.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示 A_1,$A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cdots$,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,表示 A_1,A_2,…同时发生.

(5) 事件的互不相容(或互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B **互不相容(mutually exclusive)**或**互斥(disjoint)**.

若有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为互不相容事件组.

若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots)$,则称 A_1,A_2,…为互不相容事件组.

(6) 事件的差

事件 A 发生但事件 B 不发生,这一事件称为事件 A 与 B 的**差事件(minus events)**,记为 $A-B$.

(7) 对立事件(逆事件)

设 A 是样本空间 Ω 的事件,则 $\Omega-A$ 称为 A 的**对立事件(complementary events)**或**逆事件(inverse event)**,即 A 不发生,记为 $\overline{A}$.

显然,有

$$A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

事件 A 不发生意味着事件$\overline{A}$ 发生,即在一次试验中 A 和$\overline{A}$ 有且仅有一个发生.差事件 $A-B$ 可表示为$A\overline{B}$.必然事件与不可能事件互为对立事件,即 $\Omega=\overline{\varnothing}$.

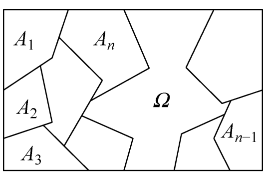

图 1-1 完备事件组

(8) 完备事件组

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为**完备事件组(complete event group)**,或称 A_1,$A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个**划分(partition)**,如图 1-1 所示.

事件间的关系可用如图 1-2 所示的韦恩图表示.

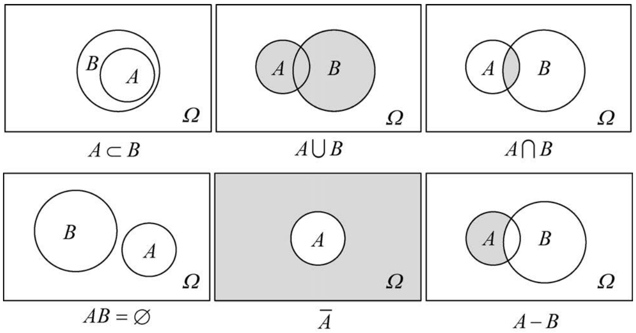

图 1-2 事件间的关系图

例 1.3 某人在庙会上连续玩套圈游戏 3 次，$A_i=\{$第 i 次套中$\}(i=1,2,3)$. 用上述事件分别表示下列各事件：

(1) 第一次未套中；

(2) 第一次套中而第二次未套中；

(3) 三次都套中；

(4) 三次至少一次套中；

(5) 三次只有一次套中；

(6) 三次最多两次套中；

(7) 三次都未套中.

解 (1) $\overline{A_1}$； (2) $A_1\cap\overline{A_2}$； (3) $A_1\cap A_2\cap A_3$； (4) $A_1\cup A_2\cup A_3$；

(5) $A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$； (6) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$； (7) $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$.

2. 事件的运算规律

可以验证事件的运算满足如下运算律.

(1) **交换律(commutative law)** $A\cup B=B\cup A$； $A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律(associative law)** $A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$； $A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) **分配律(distributive law)**

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$； $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) **对偶律(dual law)或德摩根律(De Morgan law)**

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

以上运算规律可以推广至有限个或可列个事件的情形. 以对偶律为例，对有限个或可列个事件，和事件的逆等于逆事件的积，积事件的逆等于逆事件的和，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例 1.4 化简 $(A\cup B)(A\cup\bar{B})$.

解 $(A\cup B)(A\cup\bar{B})=AA\cup A\bar{B}\cup BA\cup B\bar{B}=A\cup A(\bar{B}\cup B)\cup\varnothing=A$.

3. 概率论中的术语与集合论中的术语对照表

概率论中的术语与集合论中的术语对照见表 1.1.

表 1.1 概率论中的术语与集合论中的术语对照表

符 号	概 率 论	集 合 论
Ω	样本空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	Ω 中的点(或称元素)
A	事件 A	Ω 的子集 A
$A\subset B$	事件 B 包含事件 A	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等(或等价)	集合 A 与集合 B 相等(或等价)
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交集
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的余集(或补集)
$A-B$	事件 A 发生但事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 无公共元素

习题 1.1

(A)

1. 写出下列随机试验的样本空间,对于每个样本空间,指出它是有限的、无限可数的还是无限不可数的.

(1) 有两个孩子的家庭的孩子的性别(男孩用 B 表示,女孩用 G 表示);

(2) 同时抛掷两颗骰子点数之和;

(3) 某人一天内收到的微信数量;

(4) 我们班概率论与数理统计考试的平均成绩(成绩按百分制);

(5) 在圆心为原点、半径为 2 的圆内任取一点,记录它的坐标;

(6) 某品牌的新能源汽车生产线上,生产的每一部电池都需要进行测试,以检查它是否合格.若连续检查两部电池都不合格,则停止生产并进行检修,否则生产继续进行.试写出停止生产进行检修时,测试过的电池数量.

2. 用事件 A,B,C 的运算关系表达下列各事件:

(1) A 发生; (2) 仅 A 发生; (3) A,B,C 都发生;

(4) A,B,C 都不发生; (5) A,B,C 不都发生; (6) A,B,C 至少发生两个.

3. 一枚硬币连掷两次,记录正、反面出现的情况,写出样本空间.用 A,B,C 分别表示事件"第一次出现正面","两次出现同一面","至少有一次出现正面",写出事件 A,B,C 中的样本点.

4. 设 $A=\{$甲来听报告$\}$,$B=\{$乙来听报告$\}$,试写出下列事件的含义:

(1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$; (3) $\overline{A\cup B}$; (4) $\overline{A}\cup\overline{B}$.

5. 把 $A\cup B$ 分别表示为两个互不相容的事件的和.

6. 证明等式:$\overline{(AB)\cup(\overline{A}\overline{B})}=(A-B)\cup(B-A)$.

7. 给出两个事件互不相容和两个事件对立的区别,并举例说明.

（B）

1. 在某专业学生中任选一名学生，令事件 A 表示选出的是男生，事件 B 表示选出的是二年级的学生，事件 C 表示该生参加数学建模比赛.

（1）叙述事件 $AB\overline{C}$ 的含义；（2）在什么时候 $ABC=C$ 成立？

（3）在什么时候 $\overline{A}BC=C$ 成立？

2. 设 A,B,C 满足 $ABC=\varnothing$，把下列各事件表示为一些互不相容事件的和：

（1）$A\cup B\cup C$；（2）$AB\cup BC$；（3）$B\cup AC$；（4）$B-AC$.

3. 已知事件 A,B 是对立事件，求证 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是对立事件.

4. 化简 $\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}}$.

1.2 随机事件的概率

一个随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，但通过大量重复的试验或长期的观察及对问题性质的分析发现，随机事件在一次试验中发生的可能性大小是不同的. 如在掷骰子试验中，事件 $A=\{$掷出的点数为奇数$\}$与事件 $B=\{$掷出点数 1$\}$发生的可能性大小不同，前者要大一些，这是一种内在的客观规律性. 因而我们在研究随机现象时，还希望知道随机事件发生的可能性的大小，随机事件的概率就是从数量上描述随机事件出现的可能性大小的一个数量指标，它是概率论中最基本的概念之一. 任意随机事件 A 的概率用 $P(A)$表示. 本节从最基本的古典概型和几何概型着手，研究如何计算随机事件的概率；然后给出适应于一般情形的概率的统计定义；最后给出概率的公理化定义.

1.2.1 古典概型

古典概型是概率论发展初期的研究对象，其具体定义是由法国著名数学家拉普拉斯(Pierre-Simon marquis de Laplace，1749—1827)在其 1812 年出版的名著《概率的分析理论》中给出的.

定义 1.6 若随机试验 E 满足如下两个条件：

（1）有限性：E 的样本点总数为有限个；

（2）等可能性：每一个基本事件的发生是等可能的.

则称随机试验 E 为**古典概型**(**classical model of probability**)(或等可能概型).

在古典概型中，设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，事件 A 包含 k 个样本点，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\Omega\text{ 包含的样本点数}}=\frac{k}{n}.$$

一般来说，要计算古典概型中事件 A 的概率，需计算样本空间 Ω 所包含的样本点的总数 n 以及事件 A 所包含的样本点个数 k. 对较简单的情况可以把样本空间中的样本点一一列出，当 n 较大时，不可能一一列出，这时常常要用到加法原理、乘法原理和排列、组合的相

关知识.

易见,古典概型的概率具有以下性质:

(1) 非负性:对任意事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:$P(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容,则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}P(A_i)$.

例 1.5(**摸球模型**) 有 8 个球,其中 5 个白球 3 个黑球,从中任取 2 个,分别按如下方式抽取:(1)无放回抽取,任取两次,每次一个;(2)无放回抽取,一次任取两个;(3)有放回抽取,每次任取一个.求在各种抽取方式下,事件 $A=\{$取到两个白球$\}$的概率.

解 (1) 第一次从 8 个球中抽取 1 个,不再放回,故第二次是从 7 个球中抽取一个,因此样本点总数为 A_8^2.因为第一次有 5 个白球供抽取,第二次有 4 个白球供抽取,所以"两个球都是白球"的事件 A 包含的样本点数为 A_5^2,故

$$P(A)=\frac{\mathrm{A}_5^2}{\mathrm{A}_8^2}=\frac{5}{14}.$$

(2) 因为不考虑次序,将从 8 个球中抽取 2 个的可能组合数作为基本事件数,总数为 C_8^2.导致事件 A 发生的样本点数为从 5 个白球中任取 2 个的组合数,有 C_5^2 个,故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_8^2}=\frac{5}{14}.$$

(3) 由于每次都是从 8 个球中抽取,故基本事件总数为 8^2.因为两次都是从 5 个白球中抽取,故构成 A 的样本点数为 5^2,因此

$$P(A)=\frac{5^2}{8^2}=\frac{25}{64}.$$

比较(1)、(2)的结果可以看到,"两个同时取出"与"无放回地抽取两次,每次一个",两种抽样方法是等效的.

例 1.5 中我们对摸球模型的各种摸球方式进行了归纳,如果把白球、黑球换成产品中的正品、次品,或换成甲物、乙物,这样的人、那样的人……就可以得到形形色色的摸球问题.如果能灵活地将这些实际问题与前面的模型类型对号入座,我们就能解决有关的实际问题,为我们的生活带来方便和乐趣.例如:灯泡厂检验合格率等这些产品抽样问题;把全班学生分成两组,求每组中男女生人数相等的概率;从一副扑克牌中任取 6 张,求取得 3 张红色的和 3 张黑色的概率;在安排值班的问题中,也可以按照无放回模型进行分析;在买彩票的过程中,可以把双色球、D3、36 选 7 等玩法的中奖概率求出,增加自己的中奖机会.

例 1.6(**抽签原理**) 袋中有 a 个黑球和 b 个白球,现一个个摸出.求第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次摸出黑球的概率.

解 设事件 $A=\{$第 k 次摸出黑球$\}$ $(1\leqslant k\leqslant a+b)$.把 a 个黑球和 b 个白球都看作不同的球(设想把它们进行编号),若把摸出的球依次放在排列成一条直线的 $a+b$ 个位置上,则可能的排列相当于把 $a+b$ 个元素进行全排列,将每一种排列作为基本事件,于是样本点总数为 $(a+b)!$.

由于第 k 次摸得黑球有 a 种取法,而另外 $a+b-1$ 次摸球相当于将 $a+b-1$ 个球进行

全排列，所以事件 A 包含的样本点数为 $a(a+b-1)!$，因此所求概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

在上述抽签问题中，第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次摸出黑球的概率与摸球次序无关，而与黑球的个数成正比，与球的总个数成反比. 试想一下，若在上述摸球试验中，摸到第 $m(1\leqslant m\leqslant a+b)$ 个球时，试验突然停止，则第 $k(1\leqslant k\leqslant m)$ 次摸出黑球的概率是多少？

例 1.7（**放球模型**） 将 3 个不同的球随机地放入 4 个不同的盒子中，求盒子中球的最大个数分别是 1，2，3 的概率.

解 设 $A_i=\{$盒子中球的最大个数是 i 个$\}$，$i=1,2,3$. 因为每个球都有 4 种放法，故将 3 个不同的球随机放入 4 个不同的盒子中，共有 4^3 种放法.

盒子中球的最大个数是 1，说明 4 个盒子中有 3 个盒子各放 1 个球，共有 A_4^3 种放法，故

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{A}_4^3}{4^3}=\frac{3}{8}.$$

盒子中球的最大个数是 2，说明 4 个盒子中有 1 个盒子放 1 个球，有 1 个盒子放 2 个球，共有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^1$ 种放法，故

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^1}{4^3}=\frac{9}{16};$$

盒子中球的最大个数是 3，说明 4 个盒子中有 1 个盒子放 3 个球，共有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3$ 种放法，故

$$P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

放球模型概括了很多的古典概型问题. ①如果把盒子看作 365 天，可研究 n 个人的生日问题；②如果把盒子看作每周的 7 天，可研究值班的安排问题；③如果把球看作人，盒子看作房子，可研究住房分配问题；④如果把粒子看作球，盒子看作空间的小区域，可研究统计物理的麦克斯韦-玻尔兹曼统计模型；⑤如果把信看作球，盒子看作邮筒，可研究投信问题；⑥如果把骰子(硬币)看作球，骰子(硬币)上的六点(正面和反面)看作 6(2)个盒子，可研究骰子(硬币)问题；⑦如果将旅客视为球，各个车站看作盒子，可研究旅客下车问题. 不难看出放球模型可以用来描述很多直观背景完全不同但实质都完全一样的随机试验，应透过表面抓住本质，把相关问题与相应的模型联系起来，加以转化，这样问题就不难解决了.

例 1.8（**随机取数模型**） 从 1，2，3，4，5 中任取 3 个数排成一列. 求所取三位数为偶数的概率.

解 从 5 个数中任取 3 个，不管怎样排都是三位数. 因为 123 不同于 231，故样本点是从 5 个元素中任取 3 个的无重复排列，样本点总数为 A_5^3.

设 $A=\{$所取三位数为偶数$\}$，要求个位数在 2，4 里取，其余两位数在剩下的 4 个数里取，共 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_4^2$ 种取法. 故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_4^2}{\mathrm{A}_5^3}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}.$$

例 1.9（**配对模型**） 从 5 双不同手套中任取 4 只. 求 4 只都不配对的概率.

解 设 $A=\{$所取 4 只手套都不配对$\}$. 从 5 双不同手套中任取 4 只，共 C_{10}^4 种取法. 要

使得取到的 4 只手套都不配对,可以先从 5 双不同的手套中任取 4 双,共 C_5^4 种取法;再从所取的每双手套中任取 1 只,则共 $C_5^4(C_2^1)^4$ 种取法. 故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^4(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}.$$

1.2.2 几何概型

古典概型的概率计算,只适用于有限等可能性的样本空间. 将古典概型加以推广,考虑无限等可能性的样本空间,就是几何概型. 法国数学家比丰(C. D. Buffon,1707—1788)是几何概型的开创者,他于 1777 年给出了第一个几何概型的例子,即著名的比丰投针问题.

比丰投针问题可表述为:在平面上画一组等距离的平行线,其间距都等于 a,把一根长度 $l<a$ 的针随机投上去,求这根针和任意一条直线相交的概率. 比丰本人证明了此概率是 $\frac{2l}{\pi a}$,其中 π 为圆周率(见习题 1.2 的 B 组题目第 9 题). 特别地,当 $l=\frac{1}{2}a$ 时,概率为 $\frac{1}{\pi}$,从而可以通过很多次随机投针试验算出 π 的近似值,投针次数越多,求出的 π 的近似值越精确.

定义 1.7 满足以下两个特点的随机试验 E 称为**几何概型**(**geometric model of probability**):

(1) 样本空间 Ω 是一个可度量的有界几何区域(这个区域可以是一维、二维、三维,甚至 n 维),并把 Ω 的几何度量记作 $L(\Omega)$;

(2) 向区域 Ω 内等可能地随机投掷质点 M,其落在区域内任一个点处都是"等可能的",或者质点 M 落在 Ω 的任意可度量的子区域 A 的可能性大小只与 A 的几何度量 $L(A)$ 成正比,与 A 的位置和形状无关.

令 $A=\{$质点 M 落在区域 A 内$\}$,则 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}=\frac{L(A)}{L(\Omega)},$$

称为几何概率(geometric probability).

几何概型的概率也有类似于古典概型的概率所具有的性质:

(1) 非负性:对任意事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:$P(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容,则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$.

例 1.10 10 路公交车每 10min 一班到达学校公交站点,求乘客到达该站点后,等待时间不超过 5min 的概率.

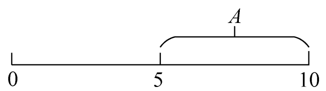

图 1-3 乘坐公交车图示

解 相邻两辆公交车到达该站点的时刻的时间间隔是 10min,故乘客到达该站点的等待时间不超过 10min,如图 1-3 所示,样本空间可表示为 $\Omega=\{0\leqslant t\leqslant 10\}$(单位:min);乘客到达站点的时刻 $t(0\leqslant t\leqslant 10)$ 可视为向时间段$[0,10]$投掷一随机点. 事件 $A=\{5\leqslant t\leqslant 10\}$表示"等待时间不超过 5min",因此事件 A 的概率决定于线段$[5,10]$与$[0,10]$的长度比,即

$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$