

第1章

准备知识

1.1 导论

微积分研究函数的微分、积分以及有关概念和应用.它是高等数学的一个基础,内容主要包括微分学、积分学及其应用.该学科由牛顿和莱布尼茨在17世纪发明并发展而来,之后被广泛应用于数学、物理学、经济学、工程学和其他领域.着眼于微积分的整个发展历史,可以分为四个时期:早期萌芽时期、建立成型时期、成熟完善时期、现代发展时期.

早期萌芽时期

1. 古西方萌芽时期

公元前7世纪,泰勒斯对图形的面积、体积与长度的研究就含有早期微积分的思想,尽管不是很明显.公元前3世纪,伟大的全能科学家阿基米德利用穷竭法推算出了抛物线弓形、螺线、圆的面积以及椭球体、抛物面体等各种复杂几何体的表面积和体积的公式,其穷竭法就类似于现在的微积分中的求极限.此外,他还计算出 π 的近似值,阿基米德对于微积分的发展起到了一定的引导作用.

2. 古中国萌芽时期

三国后期的刘徽发明了著名的“割圆术”,即把圆周用内接或外切正多边形穷竭的一种求圆周长及面积的方法.“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体,而无所失矣.”不断地增加正多边形的边数,进而使多边形更加接近圆的面积,在我国数学史上算是伟大创举.另外在南朝时期杰出的祖氏父子(祖冲之、祖暅)更将圆周率计算到小数点后七位数,他们的精神值得我们学习.此外祖暅提出了祖暅原理:“幂势既同,则积不容异”,即界于两个平行平面之间的两个几何体,被任一平行于这两个平面的平面所截,若两个截面的面积相等,则这两个几何体的体积相等,比欧洲的卡瓦列利原理早十个世纪.祖暅利用牟合方盖(当一正方体用圆柱从纵横两侧面作内切圆柱体时,两圆柱体的公共部分称为牟合方盖.牟合方盖与其内切球的体积比为 $4:\pi$)计算出了球的体积,纠正了刘徽的《九章算术注》中的错误的球体积公式.

建立成型时期

1. 17世纪上半叶

这一时期,几乎所有的科学大师都致力于解决速率、极值、切线、面积问题,特别是描述

运动与变化的无限小算法,并且在相当短的时间内取得了极大的发展.天文学家开普勒发现行星运动三大定律,并利用无穷小求和的思想,求得曲边形的面积及旋转体的体积.意大利数学家卡瓦列利发现卡瓦列利原理(祖暅原理),利用不可分量方法给出幂函数定积分公式,此外,卡瓦列利还证明了吉尔丁定理(一个平面图形绕某一轴旋转所得立体图形体积等于该平面图形的重心所形成的圆的周长与平面图形面积的乘积),对于微积分的雏形的形成影响深远.

2. 17 世纪下半叶

17 世纪后期,英国的牛顿和德国的莱布尼茨几乎同时发明了微积分学.牛顿使用了他的“流体力学”和万有引力定律来开发微积分学.莱布尼茨则开发了微积分学的符号表示法,这个符号表示法到今天仍然使用.

牛顿和莱布尼茨都使用了极限的概念来定义微积分中的导数和积分.他们的发现和方法引起了许多争议.许多数学家认为莱布尼茨从牛顿那里抄袭了他的方法,但后来的研究表明,这两位数学家的研究是相互独立的.

成熟完善时期

1. 第二次数学危机的开始

微积分学在牛顿与莱布尼茨的时代逐渐建立成型,但是任何新的数学理论的建立,在起初都是会引起一部分人的极力质疑,微积分学同样也是.由于早期微积分学的建立的不严谨性,许多人就找漏洞攻击微积分学,其中最著名的是英国主教贝克莱针对求导过程中的无穷小(Δx 既是 0,又不是 0)展开对微积分学的进攻,由此第二次数学危机便拉开了序幕.

2. 第二次数学危机的解决

危机出现之后,许多数学家意识到需要解决微积分学的理论严谨性问题,陆续地出现大批重要的数学成果.在危机前期,捷克数学家布尔查诺对于函数性质作了细致研究,首次给出了连续性和导数的恰当的定义,对序列和级数的收敛性提出了正确的概念,并且提出了著名的布尔查诺-柯西收敛原理.之后的大数学家柯西建立了接近现代形式的极限定义,把无穷小定义为趋近于 0 的变量,从而结束了百年的争论,并定义了函数的连续性、导数、连续函数的积分和级数的收敛性(与布尔查诺同期进行),柯西在微积分学(数学分析)的贡献是巨大的:柯西中值定理、柯西不等式、柯西收敛准则、柯西公式、柯西积分判别法,等等,其一生发表的论文总数仅次于欧拉.另外阿贝尔(其最大贡献是首先想到倒过来思想,开拓了椭圆积分的广阔天地)指出要严格限制滥用级数展开及求和,狄利克雷给出了函数的现代定义.

在危机后期,数学家魏尔斯特拉斯提出了病态函数(处处连续但处处不可微的函数),后续又有人发现了处处不连续但处处可积的函数,使人们重新认识了连续与可微可积的关系,他在闭区间上提出了第一、第二定理,并引进了极限的 ϵ - δ 定义,基本上实现了分析的算术化,使分析从几何直观的极限中得到了“解放”,从而驱散了 17~18 世纪笼罩在微积分外面的神秘云雾.

19 世纪是微积分学发展的又一个重要时期.在这个时期,微积分学成为了数学中最重要的分支之一,对物理学、工程学、经济学等领域产生了深远的影响.同时,微积分学也在这个时期得到了进一步的发展和完善.在 19 世纪,微积分学的一些基本概念和定理得到了进一步的完善和发展,例如极值定理、中值定理、泰勒定理,等等.在这个时期,微积分被用于研

究微积分中的一些基本概念和定理,例如微分方程、变分法、泛函分析,等等.在19世纪,微积分学还出现了一些重要的分支,例如多元微积分学、向量微积分学,等等.这些分支使得微积分学的应用领域更加广泛和深入.

现代发展时期

20世纪是微积分学发展的一个辉煌时期.在这个时期,微积分学的应用范围和深度都得到了进一步的扩展和深化.在物理学、工程学、经济学等领域,微积分学的应用产生了深远的影响.同时,微积分学也在这个时期得到了进一步的发展和完善.在20世纪,微积分学的一些基本概念和定理得到了进一步的完善和发展,例如积分变换、傅里叶变换、偏微分方程、微分几何,等等.同时,微积分学的计算机应用也得到了极大的发展,例如数值积分、微积分方程的数值解法,等等.在20世纪,微积分学还发生了一些重要的理论和方法上的发展,例如广义函数论、变分法、非线性微积分、动力系统,等等.这些理论和方法使得微积分学的理论框架更加完整和深刻,同时也为微积分学的应用提供了更加广阔的空间.

总之,从牛顿和莱布尼茨的争论开始,微积分学的发展经历了漫长而曲折的历程.在这个历程中,微积分学得到了极大的完善和发展,成为了数学中最重要和应用最广泛的分支之一.同时,微积分学的发展也对物理学、工程学、经济学等领域产生了深远的影响.在未来,随着科学技术的不断发展和人类对自然和社会规律认识的不断深化,微积分学的应用和发展将会变得更加广泛和深入.

本章为课程的学习做准备,先介绍一些在数学中广泛应用的术语和记号,然后介绍函数的概念及一些常用函数.

1.2 集合与符号

1.2.1 集合

集合这一概念描述如下:一个集合是由确定的一些对象汇集的总体.组成集合的这些对象被称为集合的**元素**.通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素这件事记为 $x \in E$ (读作 x 属于 E);

y 不是集合 E 的元素这件事记为 $y \notin E$ (读作 y 不属于 E).

若集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素,则称 E 是 F 的**子集**,简称为**子集**,记为

$$E \subset F \text{ (读作 } E \text{ 包含于 } F),$$

或者

$$F \supset E \text{ (读作 } F \text{ 包含 } E).$$

若 $E \subset F$ 且存在 F 中的元素不属于 E ,则称 E 是 F 的**真子集**.若集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素,并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素(即 $E \subset F$ 并且 $F \subset E$),则称集合 E 与集合 F **相等**,记为

$$E = F.$$

为了方便起见,引入一个不含任何元素的集合——空集合 $\emptyset$.另外还约定:空集合 $\emptyset$ 是任何集合 E 的子集,即 $\emptyset \subset E$.

1.2.2 数集

全体整数的集合、自然数的集合、全体有理数的集合、全体实数的集合和全体复数的集合都是经常遇到的集合,约定分别用字母 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 来表示这些集合,即

$\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合;

$\mathbb{N}$ 表示自然数(非负整数)的集合;

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数的集合;

$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合;

$\mathbb{C}$ 表示全体复数的集合.

另外,将非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为 $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}_+$ 和 $\mathbb{R}_+$, 显然有

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

和

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+.$$

通常采用的集合表示法有两种: 其一是列举, 例如由数 1, 2, 3, 4, 5 构成的集合记为 A 时, 就用符号 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 来表示. 也就是说在花括号 $\{\}$ 内将元素一一列举出来; 其二是用元素所满足的一定条件来描述它, 如上述 A 也可写成 $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 0, x < 6\}$, 在这里, $\{\}$ 内分为两部分来写, 且用符号“:”或“|”隔开, 前一部分是集合中元素的代表符号, 后一部分表示元素所满足的条件或属于本集合的元素所特有的规定性质.

在本书中经常遇到以下形式的实数集的子集.

(1) 区间

为了书写简练, 将各种区间的符号、名称、定义列成表格, 如表 1.1 所示($a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$).

表 1.1 区间的记法及含义

符 号		名 称	定 义
(a, b)	有 限 区 间	开区间	$\{x a < x < b\}$
$[a, b]$		闭区间	$\{x a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$		半开区间	$\{x a < x \leq b\}$
$[a, b)$		半开区间	$\{x a \leq x < b\}$
$(a, +\infty)$	无 限 区 间	开区间	$\{x x > a\}$
$[a, +\infty)$		闭区间	$\{x x \geq a\}$
$(-\infty, a)$		开区间	$\{x x < a\}$
$(-\infty, a]$		闭区间	$\{x x \leq a\}$

(2) 邻域

设 $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. 数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 表示为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta),$$

称为 a 的 δ 邻域. 当不需要注明邻域的半径 δ 时, 常把它表示为 $U(a)$, 简称 a 的邻域.

数集 $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 表示为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$ 中去掉 a , 称为 a 的 δ 去心邻域. 当不需要注明邻域半径 δ 时, 常将它表示为 $\dot{U}(a)$, 简称 a 的去心邻域.

1.2.3 数理逻辑符号

(1) 连词符号

符号“ $\Rightarrow$ ”表示“蕴涵”或“推得”，或“若……，则……”。

符号“ $\Leftrightarrow$ ”表示“必要充分”，或“等价”，或“当且仅当”。

设 A, B 是两个陈述句，可以是条件，也可以是命题，则 $A \Rightarrow B$ 表示若命题 A 成立，则命题 B 成立；或命题 A 蕴涵命题 B ；称 A 是 B 的充分条件，同时也称 B 是 A 的必要条件。例如， n 是整数 $\Rightarrow n$ 是有理数。 $A \Leftrightarrow B$ 表示命题 A 与命题 B 等价；或命题 A 蕴涵命题 $B (A \Rightarrow B)$ ，同时命题 B 也蕴涵命题 $A (B \Rightarrow A)$ ；或 $A (B)$ 是 $B (A)$ 的充分必要条件。再如， $A \subset B \Leftrightarrow$ 任意 $x \in A$ ，有 $x \in B$ 。

(2) 量词符号

符号“ $\forall$ ”表示“对任意”，或“对任意一个”。它是由英文单词 all 的首字母 A 上下颠倒演化而来的。

符号“ $\exists$ ”表示“存在”，或“能找到”。它是由英文单词 exist 的首字母 E 左右颠倒演化而来的。

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确。例如，数集 A 有上界、有下界和有界的定义：

数集 A 有上界 $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in A$ ，有 $x \leq b$ 。

数集 A 有下界 $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in A$ ，有 $a \leq x$ 。

数集 A 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A$ ，有 $|x| \leq M$ 。

设有命题“集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$ ”，用符号表示为

$$\forall a \in A, \text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是“集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$ ”，用符号表示为

$$\exists a_0 \in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题。由此可见，否定一个命题，要将原命题中的“ $\forall$ ”改为“ $\exists$ ”，将“ $\exists$ ”改为“ $\forall$ ”，并将性质 P 否定。例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

数集 A 有上界 $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in A$ ，有 $x \leq b$ 。

数集 A 无上界 $\Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in A$ ，有 $b < x_0$ 。

1.2.4 其他符号

(1) max 与 min

符号“max”表示“最大”（它是 maximum（最大）的缩写）；符号“min”表示“最小”（它是 minimum（最小）的缩写）。例如，设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个数。则：

$$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的最大数；

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的最小数。

(2) $n!$ 与 $n!!$

符号“ $n!$ ”表示“不超过 n （正整数）的所有正整数的连乘积”，读作“ n 的阶乘”即

$$n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

符号“ $n!!$ ”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”，读作“ n 的双阶乘”，即

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1,$$

$$(2k-2)!! = (2k-2)(2k-4)\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2,$$

$$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, \quad 12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

规定： $0! = 1$.

(3) 连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$

在数学中，常遇到一连串的数相加或一连串的数相乘，例如 $1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$ 等. 为简便起见，人们引入连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$ ：

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \prod_{i=1}^n x_i = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

这里的指标 i 仅仅用以表示求和或求乘积的范围，把 i 换成别的符号 j, k 等，也同样表示同一和或同一乘积，例如

$$\sum_{j=1}^n x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\prod_{j=1}^n x_j = x_1 x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^n x_i.$$

人们通常把这样的指标称为“哑指标”.

下面举几个例子说明连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$ 的应用.

例 1.1 阶乘 $n!$ 的定义可以写成

$$n! = \prod_{j=1}^n j.$$

例 1.2 二项式定理可以表示为

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j a^j b^{n-j} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

其中

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

习题 1.2

1. 写出集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 的一切真子集.

2. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x| < 2$;

(2) $|x-3| > 1$;

(3) $0 < |x-1| < 1$;

(4) $|x-a| < \epsilon$ (a 为常数, $\epsilon > 0$).

3. 已知集合 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{3, 4\}$, 若 B 是 A 的子集, 求实数 a .

4. $N = \{x | a < x < 2a+1\}$, 若 N 是空集, 则 a 的取值范围是?

5. 设方程 $2x^2 + x + M = 0$ 的解集是集合 A , 方程 $2x^2 + Nx + 2 = 0$ 的解集是 B , 若

$A \cap B = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, 求 $A \cup B$.

1.3 函数

1.3.1 函数概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着,这是物质世界的一个普遍规律.

例 1.3 真空中自由落体,物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着.如果物体距地面的高度为 h , $\forall t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}} \right]$ ①,都对应一个距离 s . 已知 t 与 s 之间的对应关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,是常数.

例 1.4 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着: $\forall r \in (0, \infty)$ 都对应一个球的体积 V . 已知 r 与 V 的对应关系是

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率,是常数.

例 1.5 某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着(参见图 1.1),对 13 时至 23 时内任意时间 t 都对应着一个气温 T . 已知 t 与 T 的对应关系用图 1.1 中的气温曲线表示. 横坐标表示时间 t ,纵坐标表示气温 T ,曲线上任意点 $P(t, T)$ 表示在时间 t 对应着的气温 T .

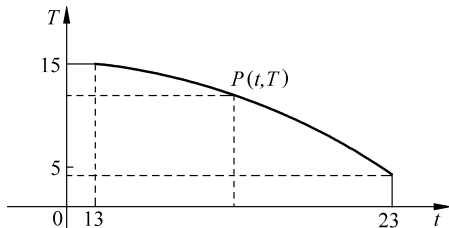


图 1.1 气温与时间之间的函数图像

例 1.6 在标准大气压下,温度 T 与水的体积 V 互相联系着.实测如表 1.2,对于数集 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V , 已知 T 与 V 的对应关系用表 1.2 来表示.

表 1.2 温度与体积之间的对应关系

温度/ $^{\circ}\text{C}$	0	2	4	6	8	10	12	14
体积/ cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

① 当 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时, 由 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 有 $s = h$, 即物体下落到地面.

上述4个实例,分属于不同的学科,实际意义完全不同.但是,从数学角度看,它们有一个共同的特征:都有一个数集和一个对应关系,对于数集中任意数 x ,按照对应关系都对应 $\mathbb{R}$ 中唯一的一个数.于是有如下的函数概念.

定义 1.1 设 A 是非空数集.若存在对应关系 f ,对 A 中任意数 $x(\forall x \in A)$,按照对应关系 f ,对应唯一的一个 $y \in \mathbb{R}$,则称 f 是定义在 A 上的函数,表示为

$$f: A \rightarrow \mathbb{R},$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值,表示为 $y=f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量.数集 A 称为函数 f 的定义域,函数值的集合 $f(A)=\{f(x)|x \in A\}$ 称为函数 f 的值域.

根据函数定义不难看到,上述例题皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

(1) 用符号“ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ”表示 f 是定义在数集 A 上的函数.在本书中,为方便起见,约定将“ f 是定义在数集 A 上的函数”,用符号“ $y=f(x), x \in A$ ”表示.当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为“ $y=f(x)$ ”,有时甚至笼统地说“ $f(x)$ 是 x 的函数(值)”.

(2) 根据函数定义,虽然函数都存在定义域,但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$ 的定义域,这时认为函数的定义域是自明的,即定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x|f(x) \in \mathbb{R}\}$.

具有具体实际意义的函数,它的定义域要受实际意义的约束.

(3) 函数定义指出: $\forall x \in A$,按照对应关系 f ,对应唯一的一个 $y \in \mathbb{R}$,这样的对应就是所谓的单值对应.反之,一个 $y \in f(A)$ 就不一定只有一个 $x \in A$,使 $y=f(x)$.例如函数 $y=\sin x$. $\forall x \in \mathbb{R}$,对应唯一的一个 $y=\sin x \in \mathbb{R}$,反之,对 $y=1$,都有无限多个 $x=2k\pi + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$,按照对应关系 $y=\sin x, x$ 都对应1,即

$$\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

再看几个函数的例子.

1. 取整函数 $y=[x]$

$\forall x \in \mathbb{R}$,对应的 y 是不超过 x 的最大整数.显然, $\forall x \in \mathbb{R}$,都对应唯一的一个 y .这是一个函数(参见图1.2),表示为 $y=[x]$,即 $[2.5]=2, [3]=3, [0]=0, [-\pi]=-4$.

2. 符号函数

$$H(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \text{其图像如图 1.3 所示.}$$

3. 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \text{其图像如图 1.4 所示.}$$

4. 分段函数

$$y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0, \end{cases} \text{ 其图像如图 1.5 所示.}$$

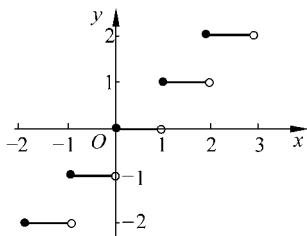


图 1.2 取整函数图像

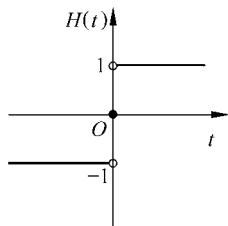


图 1.3 符号函数图像

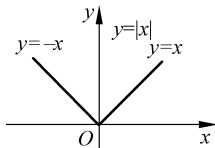


图 1.4 绝对值函数图像

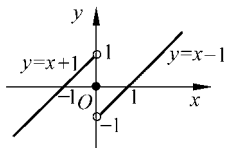


图 1.5 分段函数图像

1.3.2 几类具有特殊性质的函数

1. 有界函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义, 若函数值的集合

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in A$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 A 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 A 上无界.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $|\sin x| \leq 1$. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上是无界的, 在 $[1, \infty)$ 上是有界的.

2. 单调函数

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义, 若 $\forall x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上严格单调增加 (严格单调减少). 上述不等式改为

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上单调增加 (单调减少).

例如, 函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增加的. 函数 $y = 2x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上

是严格单调减少的,在 $[0, +\infty)$ 上是严格单调增加的. 因此,在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y = 2x^2 + 1$ 不是单调函数.

3. 奇函数与偶函数

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上, 若 $\forall x \in A$, 有 $-x \in A$, 且

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**(**偶函数**).

若点 (x_0, y_0) 在奇函数 $y = f(x)$ 的图像上, 即 $y_0 = f(x_0)$, 则

$$f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0,$$

即 $(-x_0, -y_0)$ 也在奇函数 $y = f(x)$ 的图像上, 于是奇函数的图像关于原点对称.

同理可知, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如, 函数 $y = x^4 - 2x^2$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \frac{\sin x}{x}$ 等均为偶函数; 函数 $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$, $y = x^2 \sin x$ 等均为奇函数.

4. 周期函数

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上, 若 $\exists l > 0$, $\forall x \in A$, 有 $x \pm l \in A$, 且

$$f(x \pm l) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**, l 称为函数 $f(x)$ 的一个**周期**.

若 l 是函数 $f(x)$ 的周期, 则 $2l$ 也是它的周期. 不难用归纳法证明, 若 l 是函数 $f(x)$ 的周期, 则 nl ($n \in \mathbb{Z}_+$) 也是它的周期. 若函数 $f(x)$ 有最小的正周期, 通常将这个最小正周期称为函数 $f(x)$ 的**基本周期**, 简称为**周期**.

例如, $y = \sin x$ 就是周期函数, 周期为 2π . 再如, 常函数 $y = 1$ 也是周期函数, 任意正的实数都是它的周期.

1.3.3 复合函数与反函数

1. 复合函数

由两个或两个以上的函数用所谓“中间变量”传递的方法能产生新的函数. 例如函数

$$z = \ln y \quad \text{与} \quad y = x - 1,$$

由“中间变量” y 的传递生成新函数

$$z = \ln(x - 1).$$

在这里, z 是 y 的函数, y 又是 x 的函数, 于是通过中间变量 y 的传递得到 z 是 x 的函数. 为了使函数 $z = \ln y$ 有意义, 必须要求 $y > 0$, 为使 $y = x - 1 > 0$, 必须要求 $x > 1$. 于是对函数 $z = \ln(x - 1)$ 来说, 必须要求 $x > 1$.

定义 1.6 设函数 $z = f(y)$ 定义在数集 B 上, 函数 $y = \varphi(x)$ 定义在数集 A 上, G 是 A 中使 $y = \varphi(x) \in B$ 的 x 的非空子集, 即

$$G = \{x \mid x \in A, \varphi(x) \in B\} \neq \emptyset,$$

$\forall x \in G$, 按照对应关系 φ , 对应唯一一个 $y \in B$, 再按照对应关系 f , 对应唯一一个 z , 即