

数学培优竞赛讲座

(高三年级,第2版)

朱华伟 付云皓 编著
金春来 郑 焕

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,按照普通高中高三年级数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时,恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识;以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛。

本书配套《数学培优竞赛一讲一练(高三年级,第2版)》(ISBN:9787302665045)可以帮助学生自我检测,《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果。

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用,也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 高三年级 / 朱华伟等编著.

2版. -- 北京:清华大学出版社, 2024. 6. -- ISBN

978-7-302-66509-0

I. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024QJ5236 号

责任编辑:王 定

封面设计:周晓亮

版式设计:思创景点

责任校对:成凤进

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-83470000

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:天津安泰印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:24.75

字 数:555 千字

版 次:2022 年 8 月第 1 版

2024 年 7 月第 2 版

印 次:2024 年 7 月第 1 次印刷

定 价:89.80 元

产品编号:106692-01

前言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛（简称 IMO）以来，中国代表队参加了 38 次 IMO（1985 年派两名队员参赛，1998 年因故没有参赛），24 次获总分第一（有 15 次六位队员都得金牌），8 次第二，2 次第三，第四、六、八名各 1 次，224 人次参赛，共获金牌 180 块，银牌 36 块，铜牌 6 块。早在 1994 年，中国科学院数学物理学部王梓坤院士就讲到，近年来，我国中学生在 IMO 中“连续获得团体冠军，个人金牌数也名列前茅，消息传来，全国振奋。我国数学，现在有能人，后继有强手，国内外华人无不欢欣鼓舞”。这对青少年学好数学无疑是极大的鼓励和鞭策，极大地激发了青少年学习数学的热情。

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台，我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景，根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材，编写了这套《数学培优竞赛讲座》（高一年级、高二年级、高三年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（高一年级、高二年级、高三年级）。

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径；尽可能地帮助学生扩展知识视野，提高思维能力；在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时，又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识；以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感，帮助学生开发智力，提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛。

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下。

名人名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅。

知识方法述要：详细归纳相关的知识、方法与技巧，突出重点、难点和考点。对于高中数学教科书没有的内容，尽可能给出新知识、新方法的产生背景。对给出的知识、方法与技巧尽可能做到系统、完整。

例题精讲：含“分析”“解”和“评注”，从易到难，拾级而上，由基础题、提高题、综合题组成。本丛中很多例题的解答之后有评注，评注是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，以起到画龙点睛的作用；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，意在引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系。总之，评注的目的在于，一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思



路及通过合理猜测提出解决问题的新方法,使学生不仅知其然,更知其所以然,以期达到授之以渔的目的.

同步训练:含选择题、填空题、解答题,为方便自学,在书后每题均给出详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册,可以为使用者提供自我检测;书后附有详细解答,可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用,能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透,凸显科学精神和人文精神的融合,加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题、解决问题能力的培养.希望通过对本丛书的学习,学生能够发现数学的美丽和魅力,体会数学的思想和方法,感受数学的智慧和创新,体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和乐趣,进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词:“数学好玩.”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润说:“数学的世界是变幻无穷的世界,其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典,是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器,是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中,笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目,为求简明,书中未一一注明出处,在此,谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限,书中难免会有疏漏之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

李华伟

2024年5月于深圳中学新校区

目 录

第 1 讲	整除	1
第 2 讲	函数 $[x]$ 与 $\{x\}$	7
第 3 讲	素数、合数与算术基本定理	13
第 4 讲	同余	18
第 5 讲	数论中的著名定理	24
第 6 讲	不定方程	29
第 7 讲	二次剩余	35
第 8 讲	多项式的运算	43
第 9 讲	多项式的根	53
第 10 讲	多项式的整除	63
第 11 讲	整系数多项式	70
第 12 讲	函数迭代	77
第 13 讲	函数方程	89
第 14 讲	计数方法	99
第 15 讲	母函数	106
第 16 讲	反证法	113
第 17 讲	抽屉原理	117
第 18 讲	极端原理	122
第 19 讲	图论初步	128
第 20 讲	染色问题与染色方法	136
第 21 讲	操作问题	141
第 22 讲	子集族与集合的划分	146
第 23 讲	格点与表格	151
第 24 讲	组合几何	157
第 25 讲	组合极值	166
第 26 讲	组合数论	173
第 27 讲	存在性问题	180
第 28 讲	三角与几何	185
第 29 讲	圆	198
第 30 讲	面积问题与面积方法	208



第 31 讲	共线点与共点线	222
第 32 讲	圆幂与根轴	232
第 33 讲	平面几何中的著名定理	243
第 34 讲	几何变换	254
第 35 讲	调和结构与配极变换	269
第 36 讲	交比的定义、性质及其应用	282
同步训练参考答案		301

第1讲 整 除

数学,科学的女皇;数论,数学的女皇.

——C. F. 高斯(德国)

知识方法述要

1. 整除的定义

设 a, b 是整数($b \neq 0$), 若存在整数 q , 使 $a = bq$, 则称 b 整除 a , 或 a 能被 b 整除, 记为 $b \mid a$, 这时 b 叫作 a 的因数或约数, a 叫作 b 的倍数. a 不能被 b 整除, 记作 $b \nmid a$.

2. 整除的基本性质

(1) 自反性: 对所有非零整数 a , a 整除 a .

(2) 传递性: 若 $a \mid b, b \mid c$, 则 $a \mid c$.

(3) 若 $a, b, c, m \in \mathbf{Z}$, 且 $a \mid b, a \mid c$, 则 $a \mid (b \pm c), a \mid mb, a \mid mc, a \mid m(b \pm c)$.

一般地, 若 $a, b_i, x_i \in \mathbf{Z} (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $a \mid b_i$, 则 $a \mid \sum_{i=1}^n b_i x_i$.

(4) 若 $a \mid b$, 且 $b \neq 0$, 则 $|a| \leq |b|$.

(5) n 个连续整数的乘积一定能被 $n!$ 整除.

性质(1) ~ (4) 可以直接用整除的定义来证明. 性质(5) 可以利用组合计数的方法证明, 也可以通过比较所包含的素因子的次数来证明. 性质(4) 比较显而易见, 在估计或约束参数的范围很常用.

3. 带余除法

设 a, b 为整数, $b > 0$, 则有且仅有一对整数 q, r , 使得

$$a = bq + r (0 \leq r < b) \quad ①$$

成立, 当且仅当 $r = 0$ 时, $b \mid a$; 当 $r \neq 0$ 时, q 为 a 被 b 除的商, r 为 a 被 b 除的余数.

实际上, 取 bq 为不超过 a 的 b 之最大倍数, 则 q 满足 $bq \leq a < b(q+1)$. 令 $r = a - bq$, 则有 $0 \leq r < b$.

若还有整数 q_1 和 r_1 使得 $a = bq_1 + r_1$, 且 $0 \leq r_1 < b$, 则由 ① 可得 $b(q - q_1) = r_1 - r$, 于是 $b \mid (r_1 - r)$, 但是 $0 \leq |r_1 - r| < b$, 所以 $r_1 - r = 0$, 即 $r_1 = r$, 于是 $q_1 = q$. 这就证明了唯一性.

4. 最大公因数和最小公倍数的定义

(1) 设 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 是 k 个整数, 如果 $d \mid a_1, d \mid a_2, \dots, d \mid a_k$, 那么 d 就称为 $a_1, a_2, \dots$,



a_k 的公因数. 若 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 是 k 个不全为零的整数, 我们把 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 的公因数中最大的数称为 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 的最大公因数, 记作 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. 若 $(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$, 则称 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 是既约的, 也称 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 是互素的.

(2) 设 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 是 k 个均不等于零的整数, 如果 $a_1 \mid l$ 且 $a_2 \mid l, \dots, a_k \mid l$, 则称 l 是 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 的公倍数. 我们把 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 的正的公倍数中最小的数称为 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 的最小公倍数, 记作 $[a_1, a_2, \dots, a_k]$.

5. 最大公因数和最小公倍数的基本性质

(1) 设正整数 $a, b (a > b)$ 满足 $a = bq + r (0 \leq r < b)$, 其中 q, r 均为整数, 则 $(a, b) = (b, r)$.

(2) (欧几里得算法) 设 a, b 为整数, $b > 0$, 按下列方式反复做带余除法, 有限步之后必然停止(即余数为 0).

用 a 除以 b : $a = bq_0 + r_0, 0 < r_0 < b$;

用 b 除以 r_0 : $b = r_0q_1 + r_1, 0 < r_1 < r_0$;

用 r_0 除以 r_1 : $r_0 = r_1q_2 + r_2, 0 < r_2 < r_1$;

.....

用 r_{n-2} 除以 r_{n-1} : $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, 0 < r_n < r_{n-1}$;

用 r_{n-1} 除以 r_n : $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$.

则 $(a, b) = r_n$.

(3) (裴蜀定理) 设 a, b 是整数, 则 $(a, b) = d$ 的必要条件是: 存在整数 u, v , 使得

$$ua + vb = d.$$

特别地, $(a, b) = 1$ 的充要条件是: 存在整数 u, v , 使得 $ua + vb = 1$.

(4) 若 $(a, b) = 1$, 且 $a \mid bc$, 则 $a \mid c$.

(5) $(a, b)[a, b] = ab$.

(6) 当且仅当 $a_j \mid c (1 \leq j \leq k)$ 时, $[a_1, a_2, \dots, a_k] \mid c$.

性质(1)的证明: 设 $(a, b) = d, (b, r) = d_0$, 则 $d \mid a, d \mid b$, 所以 $d \mid r = a - bq$. 因此 d 是 b 与 r 的公因数, 从而 $d \leq d_0$. 同理可得 $d_0 \leq d$, 所以 $d = d_0$, 即 $(a, b) = (b, r)$.

根据性质(1)可证明性质(2)成立. 性质(3)可由欧几里得算法倒推回去求出裴蜀系数 u, v .

性质(4)的证明: 因为 $(a, b) = 1$, 由裴蜀定理可知, 存在整数 u, v , 使得 $ua + vb = 1$, 因此 $uac + vbc = c$. 因为等式左边是 a 的倍数, 所以 $a \mid c$.

性质(5)的证明: 设 $(a, b) = d$, 则 $a = da_0, b = db_0$, 且 $(a_0, b_0) = 1$, 从而 $[a, b] = da_0b_0$, 所以 $(a, b)[a, b] = d^2a_0b_0 = ab$.

性质(6)的证明: 设 $c = [a_1, a_2, \dots, a_k]q + r, 0 \leq r < [a_1, a_2, \dots, a_k]$. 由整除的性质可知, $a_j \mid r (1 \leq j \leq k)$. 从而 r 为 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 的公倍数, 因为 $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ 为最小公倍数, 所以 $r = 0$.

例题精讲

【例 1-1】 求证:如果 u 和 v 是整数, $u^2 + uv + v^2$ 能被 9 整除,那么 u 和 v 都能被 3 整除.

证明:依题设,由

$$u^2 + uv + v^2 = (u - v)^2 + 3uv$$

可被 9 整除知 $3 \mid (u - v)^2$, 进而有 $3 \mid u - v$, 于是, $9 \mid (u - v)^2$, 又有 $3 \mid uv$, 从而 u 与 v 之一能被 3 整除. 再由 $u - v$ 能被 3 整除可知 u, v 都能被 3 整除.

【例 1-2】 已知 x, y, z 是互不相等的正整数, $xyz \mid (xy - 1)(yz - 1)(zx - 1)$, 求 x, y, z .

解: 本题等价于求使 $\frac{(xy - 1)(yz - 1)(zx - 1)}{xyz} = xyz - (x + y + z) + \frac{xy + yz + zx - 1}{xyz}$ 为整数的 x, y, z . 不妨设 $x > y > z$, 则 $xyz < xy + yz + zx - 1 < 3xy \Rightarrow z < 3$.

当 $z = 1$ 时, $\frac{xy + yz + zx - 1}{xyz} = \frac{xy + y + x - 1}{xy} = 1 + \frac{y + x - 1}{xy}$, 而 $xy - (x + y - 1) = (x - 1)(y - 1) > 0$, 所以此种情况无解;

当 $z = 2$ 时, $\frac{xy + yz + zx - 1}{xyz} = \frac{xy + 2y + 2x - 1}{2xy}$, 可知 $2xy \leq xy + 2x + 2y - 1 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) \leq 3$, 可知 $y = 3$, 则 $x = 4$ 或者 $x = 5$, 验证可得 $x = 5$ 满足条件, 所以所有解为 $(x, y, z) = (2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)$.

【例 1-3】 设 m, n 是正整数, 且 $m < n$. 求证: 对于任意连续 n 个正整数, 总存在两个不同正整数的乘积为 mn 的倍数.

证明: 连续 n 个正整数中肯定有 n 的倍数和 m 的倍数, 分别设为 x, y , 若 $x \neq y$, xy 即为所求. 否则 $x = y$, 考虑 (n, m) , 因为 $(n, m) \leq \frac{n}{2}$, 所以这连续 n 个数中肯定有两个不同整数被 (n, m) 整除, 取其中不同于 x 的整数 z , 则 xz 即为所求 (x 为 m, n 的公倍数, 最小公倍数与最大公因数的乘积等于两个数的乘积).

【例 1-4】 设 n 为正整数. 定义数列如下: $a_1 = n$, 对每个 $k > 1$, 令 a_k 是满足 $0 \leq a_k \leq k - 1$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 能被 k 整除的唯一整数. 例如 $n = 9$ 时, 得到的数列为 $9, 1, 2, 0, 3, 3, 3, \cdots$. 求证: 对任意正整数 n , 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 从某一项起为常数.

解法 1: 设 $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = kb$, b 为正整数. 如果 $b \leq k$, 那么 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + b = (k + 1)b$ 能被 $k + 1$ 整除, 因此 $a_{k+1} = b$, 而且 $s_{k+1} = (k + 1)b$. 同理, $a_{k+2} = b, a_{k+3} = b, \cdots$, 即从第 $k + 1$ 项起, 数列 $\{a_m\}$ 为常数. 由于 $s_{k+1} \leq s_k + k$, 所以 $s_n \leq n + 1 + 2 + \cdots + (n - 1) = n + \frac{(n - 1)n}{2} < n^2$, 即在上面取 $k = n$ 即可.

解法 2: $s_{k+1} \leq s_k + k$, 所以 $\frac{s_{k+1}}{k+1} < \frac{s_k + k}{k} \leq \frac{s_k}{k} + 1$. 由于 $\frac{s_{k+1}}{k+1}, \frac{s_k}{k}$ 都是整数, 所以



$\frac{s_{k+1}}{k+1} \leq \frac{s_k}{k}$, 即 $\{\frac{s_k}{k}\}$ 单调递减. 因此, 存在正整数 N , 当 $k > N$ 时, $\{\frac{s_k}{k}\}$ 为常数数列, 从而 $\frac{s_{k+1}}{k+1} = \frac{s_k}{k}$, 即 $a_{k+1} = s_{k+1} - s_k = \frac{k+1}{k}s_k - s_k = \frac{s_k}{k}$, 所以当 $k > N$ 时, $\{a_k\}$ 为常数数列.

由解法 1 可以知道 $N < n$.

评注 在解法 2 中, 可以先根据前面几项去找规律, 发现 s_k 与 k 的比值在递减, s_k 从某项开始比值小于 k , 并且从这一项开始, s_k 与 k 的比值与常数项相等.

【例 1-5】 求所有正整数 m, n 满足 $m^2 - n$ 整除 $m + n^2$, 并且 $n^2 - m$ 整除 $n + m^2$.

分析 根据对称性, 不妨设 $n \geq m$ 并估计 n 的大体范围.

解: 不妨设 $n \geq m$, 则 $(m+1)^2 - (m+1) = m + m^2$, 对于 $n > m+1$, 显然 $n^2 - m > n + m^2$ 成立. 因此, $n > m+1$ 时, 满足条件的整数 m, n 不存在, 只需要考虑 $n = m$ 与 $n = m+1$.

若 $n = m$, 则 $n^2 - n$ 整除 $n^2 + n$. 若 $n > 3$, 则 $n^2 > 3n \Rightarrow 2(n^2 - n) > n^2 + n$, 显然 $n^2 - n < n^2 + n$. 所以 $n > 3$, $n^2 - n$ 不能整除 $n^2 + n$. 所以, $n = 2$ 与 $n = 3$ 且经验证满足要求.

若 $n = m+1$, 求 $m^2 - m - 1$ 整除 $m^2 + 3m + 1$ 的 m . 若 $m \geq 6$, 则 $m(m-5) > 3 \Rightarrow 2(m^2 - m - 1) > m^2 + 3m + 1$. 又 $m^2 - m - 1 < m^2 + 3m + 1$, 所以 $m^2 - m - 1$ 不能整除 $m^2 + 3m + 1$. 对于 $m = 1, 2, 3, 4, 5$, 逐一验证得 $m = 1$ 或 $m = 2$.

综上所述, 解为 $(m, n) = (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)$.

评注 利用不等式缩小变量取值范围, 且对较小数逐一验证是数论中常用的思想方法.

【例 1-6】 设整数 $k \geq 14$, P_k 是小于 k 的最大素数. 若 $P_k \geq \frac{3}{4}k$, n 是一个合数.

求证: 若 $n > 2P_k$, 则 $n \mid (n-k)!$

证明: 因为 n 是合数, 设 $n = ab (2 \leq a \leq b)$.

若 $a \geq 3$:

(1) 假设 $a \neq b$, 则 $n > 2P_k \geq \frac{3}{2}k, b \leq \frac{n}{3}$. 从而 $k < \frac{2}{3}n$, 所以 $n - k > \frac{n}{3} \geq b > a$. 所以 $n \mid (n-k)!$.

(2) 假设 $a = b$, 则 $n = a^2, n - k > \frac{n}{3} = \frac{a^2}{3}$. 因为 $k \geq 14$, 所以 $P_k \geq 13, n \geq 26, a \geq 6$, 从而 $\frac{a^2}{3} \geq 2a$, 所以 $n - k > 2a, n \mid (n-k)!$.

若 $a = 2$:

(1) 因为 $n \geq 26$, 假设 b 不是素数, 则可设 $b = b_1 b_2 (1 < b_1 \leq b_2)$, 因为 $b \geq 13$, 所以 $b_2 \geq 4$, 又 $ab_1 \geq 4$, 可归入 $a \geq 3$ 的情况讨论.

(2) 假设 b 是素数, 则 $b = \frac{n}{2} > P_k$, 因为 P_k 是小于 k 的最大素数, 则 $b > k$, 从而 $n - k = 2b - k > b$. 所以 $n \mid (n-k)!$.

综上所述, $n \mid (n-k)!$.

【例 1-7】 项链 A 由 14 颗珠子组成, 项链 B 由 19 颗珠子组成. 求证: 对于每个正奇数 n , 均可将 33 颗珠子标以 $n, n+1, \dots, n+32$, 使得上述每个整数恰好各用一次, 并且相邻的珠子所标的数互素.

证明: 设项链 A 上的珠子依次标上数字: $n+m, n+m+1, \dots, n+m+13$, 其中 $m \in \mathbf{N}$, 且 $1 \leq m \leq 18$, 由于连续两个正整数互素, 所以只需要满足

$$(n+m, n+m+13)=1,$$

即

$$(n+m, 13)=1. \quad ①$$

将项链 B 上的珠子依次标上数字: $n+m+14, \dots, n+32, n, n+1, \dots, n+m-1$, 只需要满足

$$(n+32, n)=1, \quad ②$$

$$(n+m+14, n+m-1)=1, \quad ③$$

③ 等价于

$$(n+m-1, 15)=1. \quad ④$$

注意到 ② 等价于 $(n, 32)=1$, 而 n 为奇数, 可见 ② 恒成立. 为满足 ①④, 只需要满足 $n+m$ 不能被 13 整除且被 3 和 5 除时余数不为 1. 在 m 可取的 18 个数中, 至多有 6 个数被 3 除余 1, 有 4 个数被 5 除余 1, 有 2 个数能被 13 整除. 因此, 存在 m 满足题设要求.

【评注】 区间 $1 \leq m \leq 18$ 可缩短为 $1 \leq m \leq 5$. 因此时在 m 可取的 5 个值中, 能使 $n+m$ 被 3 除余 1 的至多有 2 个, 被 5 除余 1 的至多有 1 个, 被 13 整除的至多有 1 个, 存在满足题设要求的 m .

【例 1-8】 对任意给定的正整数 $k (k > 1)$, 记 $n, n+1, \dots, n+k$ 的最小公倍数为 $Q(n)$, $n \in \mathbf{N}_+$, 求证: 存在无穷多个 n , 使得 $Q(n) > Q(n+1)$.

证明: 令 $n = r \cdot k! - 1, r \geq 3, r \in \mathbf{N}$, 下面证明对这样的 n 有 $Q(n) > Q(n+1)$.

记 $m = [n+1, n+2, \dots, n+k]$, 由于当 $j = 1, 2, 3, \dots, k$ 时, $(n, j) = (j, 1) = 1$, 从而有 $(n, n+j) = 1, j = 1, 2, 3, \dots, k$. 于是 $Q(n) = mn$.

另外, $n+k+1 = rk! + k$ 能被 k 整除, m 能被 $n+1 = rk!$ 整除, 从而能被 k 整除, 因此 $\frac{m(n+k+1)}{k}$ 不仅能被 m 整除, 也能被 $n+k+1$ 整除.

$$\text{所以 } Q(n+1) = [n+1, n+2, \dots, n+k, n+k+1] = [m, n+k+1] \leq \frac{m(n+k+1)}{k},$$

从而在 $r \geq 3, k \geq 2$ 时, $Q(n+1) \leq \frac{m(n+k+1)}{2} = \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \leq \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{k+1}{3k-1}\right) < mn = Q(n)$.

【评注】 首先 $Q(n) = [m, n]$, 为了使 $Q(n)$ 尽量大, 应令 $(m, n) = 1$, 从而可得 $(n, n+j) = (n, j) = 1$, 由此联想到构造 $n = r \cdot k! \pm 1$, 为了使 $(m, n+k+1) \neq 1$, 取 $n = r \cdot k! - 1$.



同步训练

1. 求被 3 除余 2, 被 5 整除, 且被 7 除余 4 的最小正整数.
2. 设 $a, b, c, d, u \in \mathbf{Z}$, 且 $ac, bc + ad, bd$ 都能被 u 整除, 求证: $u \mid bc, u \mid ad$.
3. 已知正整数 a, b 使得 $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ 是整数, 求证: a, b 的最大公因数不超过 $\sqrt{a+b}$.
4. 正整数 N 的末两位是 28, 各位数字之和也是 28, 而且 N 能被 28 整除. 求 N 的最小值.
5. 试确定使 $ab^2 + b + 7$ 整除 $a^2b + a + b$ 的全部正整数对 (a, b) .
6. 设 a, b 为满足不等式 $a > b > 2$ 的整数, 而 $2a + 2b + ab - 1$ 能被 $2ab$ 整除.
 - (1) 求证: $(2a-1)(2b-1)(ab-1)$ 也能被 $2ab$ 整除;
 - (2) 求所有的 a, b .
7. 求数列 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 这些排列对 $1 \leq i \leq n$ 有性质 $i+1 \mid 2(a_1 + a_2 + \dots + a_i)$.
8. 当 p, q 都为奇数时, 关于 x 的方程 $x^2 + 2px + 2q = 0$ 是否有有理数根, 证明之.
9. 设整数 m, n 满足 $m \geq n$ 与 $m^3 + n^3 + 1 = 4mn$. 求 $m - n$ 的最大值.
10. 求证: 对于任何大于 2 的整数 k , 总能找到 k 个不同的正整数, 从而使这些数中的任意两个数之积能被这两个数之差整除.
11. 已知 a, b 是非负整数, 问是否存在整数 p, q 使对任意正整数 n , 都有 $p + na$ 与 $q + nb$ 互素?
12. 求出所有的有序正整数对 (m, n) , 使得 $\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$ 是整数.

第2讲 函数 $[x]$ 与 $\{x\}$

数学是一切知识中的最高形式.

—— 柏拉图(古希腊)

知识方法述要

1. 定义

函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 通常称 $y=[x]$ 为取整函数, 又称高斯函数.

记 $\{x\}=x-[x]$, $y=\{x\}$ 称为小数部分函数. 例如, $[4]=4$, $[5.6]=5$, $[-\pi]=-4$, $\{4.3\}=0.3$, $\{-2.4\}=0.6$ (而非 0.4).

显然, $y=[x]$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\mathbf{Z}$. 函数 $y=\{x\}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $[0, 1)$, 是周期为1的周期函数.

2. 性质

(1) 函数 $y=[x]$ 是一个分段的不减的无界函数, 即当 $x_1 \leq x_2$ 时, 有 $[x_1] \leq [x_2]$.

(2) $[n+x]=n+[x]$, 其中 $n \in \mathbf{Z}$.

(3) $x-1 < [x] \leq x < [x]+1$.

(4) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$, $\{x\}+\{y\} \geq \{x+y\}$.

(5) 若 $x \geq 0, y \geq 0$, 则 $[xy] \geq [x][y]$.

(6) $[-x] = \begin{cases} -[x], & x \in \mathbf{Z}, \\ -[x]-1, & x \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$

$\{-x\} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Z}, \\ 1-\{x\}, & x \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$

(7) 若 $n \in \mathbf{N}$, 则 $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$; 当 $n=1$ 时, $[[x]] = [x]$.

(8) 若整数 a, b 满足 $a=bq+r$ ($b>0, q, r$ 是整数, $0 \leq r < b$), 则 $\left[\frac{a}{b}\right] = q$.

(9) 若 x, n 是正整数, 则在不超过 x 的正整数中, n 的倍数共有 $\left[\frac{x}{n}\right]$ 个.

(10) (埃尔米特恒等式) 对正整数 n 及任意实数 x , 有

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$



性质(10)的证明:根据实数及有理数的性质,必存在一个不大于 n 的正整数 r ,使得 $[x] + \frac{r-1}{n} \leq x < [x] + \frac{r}{n}$. 于是,有

$$\begin{aligned} & \left([x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \cdots + \left[x + \frac{n-r}{n} \right] \right) + \left(\left[x + \frac{n-r+1}{n} \right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] \right) \\ &= (n-r+1)[x] + (r-1)([x] + 1) \\ &= n[x] + r - 1 = [nx]. \end{aligned}$$

另证:设函数 $f(x) = [nx] - [x] - \left[x + \frac{1}{n} \right] - \left[x + \frac{2}{n} \right] - \cdots - \left[x + \frac{n-1}{n} \right]$, 则

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = [nx] + 1 - \left[x + \frac{1}{n} \right] - \left[x + \frac{2}{n} \right] - \cdots - \left[x + \frac{n-1}{n} \right] - [x] - 1 = f(x),$$

即 $f(x)$ 是以 $\frac{1}{n}$ 为周期的周期函数. 所以仅需要证明 $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ 时, $f(x) = 0$.

根据函数 $[x]$ 的定义, 显然 $f(x) = 0, x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$. 所以由 $f(x)$ 的周期性知, 对一切 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x) = 0$, 即等式成立.

例题精讲

【例 2-1】解方程:

(1) $x^2 - 8[x] + 7 = 0$;

(2) $x + 4\{x\} = 2[x]$;

(3)
$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1.1, \\ [x] + \{y\} + z = 2.2, \\ \{x\} + y + [z] = 3.3. \end{cases}$$

解: (1) 设 $[x] = n$, 则

$$x^2 + 7 = 8n, \quad ①$$

可知 $n > 0$. 由于 $n \leq x < n+1$, 因此

$$n^2 + 7 \leq x^2 + 7 < (n+1)^2 + 7. \quad ②$$

由 ①② 得

$$n^2 + 7 \leq 8n < (n+1)^2 + 7 \Rightarrow n^2 + 2n + 8,$$

解得 $1 \leq n < 2$ 或 $4 < n \leq 7$, 所以 $n = 1, 5, 6, 7$, 代入 ① 得 $x^2 = 1, 33, 41, 49$.

经检验知, $x = 1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$ 是原方程的解.

(2) 因为 $x = [x] + \{x\}$, 则 $[x] + \{x\} + 4\{x\} = 2[x]$, 即 $\{x\} = \frac{[x]}{5}$.

因 $0 \leq \{x\} < 1$, 所以 $0 \leq \frac{[x]}{5} < 1, 0 \leq [x] < 5$, 可知 $[x] = 0, 1, 2, 3, 4$, 且

$$x = [x] + \{x\} = [x] + \frac{[x]}{5} = \frac{6}{5}[x],$$

可得方程有5个解: $x_1=0, x_2=1.2, x_3=2.4, x_4=3.6, x_5=4.8$. 经检验知, 它们都是方程的解.

(3) 3个方程相加, 可得 $2(x+y+z)=6.6$, 因此 $x+y+z=3.3$.

因为 $x+y+z-(x+[y]+\{z\})=\{y\}+[z]=2.2$, 所以 $[z]=2, \{y\}=0.2$.

同理可得 $\{x\}=0.1, [y]=1, [x]=0, \{z\}=0$, 所以 $x=0.1, y=1.2, z=2$.

【例2-2】 在 $\left[\frac{1^2}{2021}\right], \left[\frac{2^2}{2021}\right], \dots, \left[\frac{2021^2}{2021}\right]$ 中, 含有多少个互不相同的正整数?

解: 虽然这个数列中共有2021个非负整数, 但是其中有不少非负整数是重复出现的, 比如前44个数 $\left[\frac{1^2}{2021}\right], \left[\frac{2^2}{2021}\right], \dots, \left[\frac{44^2}{2021}\right] = \left[\frac{1936}{2021}\right]$ 都等于0, 所以要求出互不相同的非负整数, 必须研究 $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ 与2021的关系. 易知, 若 $2k+1 \geq 2021$, 则 $\left[\frac{(k+1)^2}{2021}\right]$ 与 $\left[\frac{k^2}{2021}\right]$ 必不相等. 换句话说, $k \geq 1010$ 时, $\left[\frac{1010^2}{2021}\right], \left[\frac{1011^2}{2021}\right], \dots, \left[\frac{2021^2}{2021}\right]$ 这 $2021 - 1010 + 1 = 1012$ 个数必互不相同.

再看 $\left[\frac{1^2}{2021}\right], \left[\frac{2^2}{2021}\right], \dots, \left[\frac{1010^2}{2021}\right]$ 这1010个数. $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, 其中 $1 \leq k \leq 1009$, 所以 $2k+1 < 2021$, 则数列中任意相邻的两项, 或者都相等, 或者后项比前项大1, 但不会出现后项比前项大2及2以上的数, 即这1010个数取遍 $0, 1, 2, \dots, \left[\frac{1010^2}{2021}\right] = 504$ 这505个值.

所以整个数列中不相同的正整数一共有 $1012 + 504 - 1 = 1515$ 个(注意, $\left[\frac{1010^2}{2021}\right]$ 数了两次).

【例2-3】 计算 $\sum_{n=1}^{100} \left[\frac{23n}{101}\right]$ 的值.

解: 依题设, 对于 $n=1, 2, \dots, 100$, $\frac{23n}{101} \notin \mathbf{Z}$, 而

$$\frac{23n}{101} + \frac{23(101-n)}{101} = 23,$$

则

$$\left\{\frac{23n}{101}\right\} + \left\{\frac{23(101-n)}{101}\right\} = 1, \left[\frac{23n}{101}\right] + \left[\frac{23(101-n)}{101}\right] = 22.$$

又

$$\sum_{n=1}^{100} \left[\frac{23n}{101}\right] = \sum_{n=1}^{100} \left[\frac{23(100-n)}{101}\right],$$

所以

$$\sum_{n=1}^{100} \left[\frac{23n}{101}\right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \left(\left[\frac{23n}{101}\right] + \left[\frac{23(100-n)}{101}\right] \right) = \frac{1}{2} \times 22 \times 100 = 1100.$$

【例2-4】 对于给定的正整数 n 和实数 x , 化简 $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \left[\frac{x+i}{j}\right]$.



解: 记 $S_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left[\frac{x+i}{j} \right]$. 考虑

$$\begin{aligned} S_{n-1} - S_n &= \left[\frac{x}{n} \right] + \left[\frac{x+1}{n} \right] + \cdots + \left[\frac{x+n-1}{n} \right] \\ &= \left[\frac{x}{n} \right] + \left[\frac{x}{n} + \frac{1}{n} \right] + \cdots + \left[\frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} \right]. \end{aligned}$$

由埃尔米特恒等式得

$$S_{n-1} - S_n = \left[n \cdot \frac{x}{n} \right] = [x].$$

由于 $S_1 = [x]$, 则可推出 $S_n = n[x]$ (对所有 $n \geq 1$).

【例 2-5】 若 n 为一个正整数, 则在区间 $[1, n)$ 内有多少个实数 x 满足方程

$$x^3 - [x^3] = (x - [x])^3. \quad ①$$

解: 设 $x = m + r$, 其中 $m = [x], r = \{x\}$, 则 $1 \leq m \leq n-1, 0 \leq r < 1$. 代入 ① 得

$$(m+r)^3 - [(m+r)^3] = (m+r - [m+r])^3,$$

即

$$m^3 + 3m^2r + 3mr^2 = [(m+r)^3]. \quad ②$$

式 ② 说明 $m^3 + 3m^2r + 3mr^2$ 是一个整数, 当 r 从 0 增大到 1 时, $m^3 + 3m^2r + 3mr^2$ 从 m^3 增大到 $m^3 + 3m^2 + 3m$, 即

$$m^3 \leq m^3 + 3m^2r + 3mr^2 < m^3 + 3m^2 + 3m.$$

所以, 对于 $0 \leq r < 1$, $m^3 + 3m^2r + 3mr^2$ 可以取 $m^3 + 3m^2 + 3m - m^3 = (m+1)^3 - m^3 - 1$ 个整数值.

由于 $1 \leq m \leq n-1$, 所以满足原方程的 x 的个数为

$$\sum_{n=1}^{n-1} [(m+1)^3 - m^3 - 1] = n^3 - 1 - (n-1) = n^3 - n.$$

【例 2-6】 已知 $x \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{N}_+$, 求证: $[nx] \geq \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \cdots + \frac{[nx]}{n}$.

证明: 令 $A_k = [x] + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[kx]}{k}, k = 1, 2, \cdots$. 由于 $A_1 = [x]$, 则 $n = 1$ 时, 命题成立.

设 $n \leq k-1$ 时, 命题成立, 即有 $A_1 \leq [x], A_2 \leq [2x], \cdots, A_{k-1} \leq [(k-1)x]$.

因为 $A_k - A_{k-1} = \frac{[kx]}{k}$, 即 $kA_k - kA_{k-1} = [kx]$ 对一切 k 成立.

所以 $kA_k - kA_{k-1} = [kx], (k-1)A_{k-1} - (k-1)A_{k-2} = [(k-1)x], \cdots, 2A_2 - 2A_1 = [2x], A_1 = [x]$.

各式相加得 $kA_k - (A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1}) = [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x] + [kx]$, 所以

$$\begin{aligned} kA_k &= [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x] + [kx] + A_{k-1} + A_{k-2} + \cdots + A_2 + A_1 \\ &\leq [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x] + [kx] + [(k-1)x] + [(k-2)x] + \cdots + [2x] + [x] \\ &= ([x] + [(k-1)x]) + ([2x] + [(k-2)x]) + \cdots + ([x] + [(k-1)x]) + [kx] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq [kx] + [kx] + \cdots [kx] + [kx] \\ &= k[kx]. \end{aligned}$$

所以 $A_k \leq [kx]$, 即 $n=k$ 时, 命题成立.

因此, 原不等式对一切 $n \in \mathbf{N}_+$ 均成立.

【例 2-7】 设 x, y 是正无理数, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 求证: 数列 $[x], [2x], \cdots, [nx], \cdots$ 和 $[y], [2y], \cdots, [ny], \cdots$ 包含了所有正整数, 且每个正整数在数列中仅出现一次.

证明: 首先, 这两个数列都是严格单调递增的. 事实上, 由于 $x > 1, [x] \geq 1$, 所以 $[(n+1)x] \geq [nx] + [x] > [nx]$. 因此, 任何一个正整数 n 都不在数列 $[x], [2x], \cdots, [nx], \cdots$ 中出现两次, 同样也不会出现在 $[y], [2y], \cdots, [ny], \cdots$ 中出现两次.

其次, 这两个数列中无重复的数字. 否则, 存在正整数 a, b, m 使得 $[ax] = [by] = m$. 由于 x, y 是无理数, 因此 $m < ax < m+1, m < by < m+1$, 所以

$$m = m \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{m}{x} + \frac{m}{y} < a + b < \frac{m+1}{x} + \frac{m+1}{y} = m+1.$$

这表明 $a+b$ 是两个自然数 m 与 $m+1$ 之间的整数, 与 $a+b$ 是正整数矛盾.

最后, 证明对任何正整数 m , 一定在其中的一个数列中出现. 若不然, 存在正整数 u, v , 使得

$$\begin{aligned} ux &< m < m+1 < (u+1)x, \\ vy &< m < m+1 < (v+1)y, \end{aligned}$$

从而

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{m} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 < \frac{u+1}{m+1} + \frac{v+1}{m+1}.$$

所以

$$\begin{aligned} u+v &< m, \\ m+1 &< u+v+2, \end{aligned}$$

即 $u+v < m < m+1 < u+v+2$, 这是不可能的.

综上所述, 知命题成立.

【例 2-8】 用 $a_n = [\sqrt{2}n], n=1, 2, \cdots$, 定义一个正整数数列. 求证: 数列中有无穷多项是 2 的次幂.

证明: 由于 $\sqrt{2}$ 是一个无理数, 所以 $\sqrt{2}$ 的二进制表示中, 小数点后有无穷多项为 1.

设 $\sqrt{2}$ 的二进制表示中小数点后的第 k 项 (这样的 k 有无穷多个) 为 1, 则结合 $\sqrt{2}$ 为无理数, 可知

$$\frac{1}{2} < 2^{k-1} \cdot \sqrt{2} - [2^{k-1} \cdot \sqrt{2}] < 1. \quad \textcircled{1}$$

事实上, 在 $\sqrt{2}$ 的二进制表示中, 将小数点向右移 $k-1$ 位得到 $2^{k-1} \cdot \sqrt{2}$, 从而可得 $2^{k-1} \cdot \sqrt{2}$ 的二进制表示中, 小数点后第 1 位为 1, 于是式 $\textcircled{1}$ 成立.



令 $n = [2^{k-1} \cdot \sqrt{2}] + 1$, 则

$$n\sqrt{2} = (1 + [2^{k-1} \cdot \sqrt{2}])\sqrt{2} > 2^{k-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^k,$$

$$n\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2} + [2^{k-1} \cdot \sqrt{2}]\right)\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^k + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^k + 1. \text{ (根据式 ① 推导得出)}$$

所以, $[n \cdot \sqrt{2}] = 2^k$.

由于满足条件的 k 有无穷多个, 所以存在无穷多个 $n \in \mathbf{N}_+$, 使得 $[n \cdot \sqrt{2}]$ 是 2 的次幂.

评注 利用 $\sqrt{2}$ 的二进制表示是解题关键.

同步训练

一、填空题

1. 方程 $5x + 2[x] - 31 = 0$ 的解为_____.
2. 方程 $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ 的实数解的个数为_____.
3. 方程 $3x^3 - [x] = 3$ 的解为_____.
4. 方程 $\left[\frac{x+1}{4}\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right]$ 的解集为_____.
5. 满足 $\left[\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}\right] = 2$ 的正整数 n 的集合是_____.
6. 已知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $M = 3^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x}$ 的整数部分为_____.

二、解答题

7. 设 n 是整数, 且 $n \geq 3$, 求证: $\left\{\frac{n(n+1)}{4n-2}\right\} > \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$.
8. (1) 求方程 $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$ 的一个实数解;
(2) 求证: 满足上述方程的 x 都不是有理数.
9. 前 1000 个正整数中可表示成 $[2x] + [4x] + [6x] + [8x]$ 的正整数有多少个?
10. 设 M 为一个正整数, 问: 方程 $x^2 - [x^2] = \{x\}^2$ 在 $[1, M]$ 中有多少个解?
11. 已知 a 为奇自然数, 且 a 不为完全平方数. 若 m, n 为正整数, 求证:
(1) $\{m(a + \sqrt{a})\} \neq \{n(a - \sqrt{a})\}$;
(2) $[m(a + \sqrt{a})] \neq [n(a - \sqrt{a})]$.
12. 求出所有正整数组 (a, b) , 满足 $\left[\frac{a^2}{b}\right] + \left[\frac{b^2}{a}\right] = \left[\frac{a^2 + b^2}{ab}\right] + ab$.