数学培优竞赛一讲一练

(高二年级,第 2 版)

朱华伟　邱际春　编著

清華大學出版社
北　　京

内容简介

本书是《数学培优竞赛讲座(高二年级,第 2 版)》(ISBN:9787302665076)的配套练习册,为读者提供自我检测.在内容上以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,按照普通高中高二年级数学教科书的进度分专题编写,力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时,恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识;以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书附有参考答案及解析,为学生提供解题思路、方法和技巧,以检验学生对数学知识的理解水平和掌握程度.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用,也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 高二年级 / 朱华伟,邱际春编著. -- 2 版. -- 北京 :清华大学出版社,2024.6. -- ISBN 978-7-302-66505-2

Ⅰ. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024EK3200 号

责任编辑: 王 定
封面设计: 周晓亮
版式设计: 思创景点
责任校对: 成凤进
责任印制: 宋 林

出版发行: 清华大学出版社
网 址: https://www.tup.com.cn,https://www.wqxuetang.com
地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编:** 100084
社 总 机: 010-83470000 **邮 购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 185mm×260mm **印 张:** 10 **字 数:** 224 千字
版 次: 2022 年 8 月第 1 版 2024 年 7 月第 2 版 **印 次:** 2024 年 7 月第 1 次印刷
定 价: 49.80 元

产品编号:106694-01

前　　言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称 IMO)以来,中国代表队参加了 38 次 IMO(1985 年派两名队员参赛,1998 年因故没有参赛),24 次获总分第一(有 15 次六位队员都得金牌),8 次第二,2 次第三,第四、六、八名各 1 次,224 人次参赛,共获金牌 180 块,银牌 36 块,铜牌 6 块. 早在 1994 年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就讲到,近年来,我国中学生在 IMO 中"连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋. 我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞". 这对青少年学好数学无疑是极大的鼓励和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;尽可能地帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

名人名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点. 对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景. 对给出的知识、方法与技巧尽可能做到系统、完整.

例题精讲:含"分析""解"和"评注",从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成. 本丛书中很多例题的解答之后有评注,评注是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的作用;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系. 总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提

出解决问题的新方法，使学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的.

同步训练：含选择题、填空题、解答题，为方便自学，在书后每题均给出详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测；书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果.

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸显科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题、解决问题能力的培养.希望通过对本丛书的学习，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和乐趣，进而激发学习数学的兴趣.

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词："数学好玩."我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣.著名数学家陈景润说："数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!"

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典，是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢.由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正.

朱华伟

2024 年 5 月于深圳中学新校区

目　　录

第 1 讲　等差数列与等比数列

一、填空题

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$3a_{n+1}+a_n=4(n\geqslant 1)$且$a_1=9$，其前$n$项之和为$S_n$，则满足不等式$|S_n-n-6|<\frac{1}{125}$的最小整数$n$是________.

2. 设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，记$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n. 若$a_3=b_3$，$a_4=b_4$，且$\frac{S_5-S_3}{T_4-T_2}=5$，则$\frac{a_5+a_3}{b_5+b_3}=$________.

3. 已知数列$\{a_n\}$满足递推关系式$a_{n+1}=2a_n+2^n-1(n\in\mathbf{N}_+)$，且$\left\{\frac{a_n+\lambda}{2^n}\right\}$为等差数列，则$\lambda$的值是________.

4. 设有四个数的数列为a_1,a_2,a_3,a_4，前三个数构成一个等比数列，其和为k，后三个数构成一个等差数列，其和为 9，且公差非零. 对于任意固定的k，若满足条件的数列个数大于 1，则k应满足的条件是________.

5. 已知$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，则$|m-n|=$________.

6. 已知$\{a_n\}$为正项等比数列，且$a_4+a_3-a_1-a_2=5$，则a_5+a_6的最小值为________.

7. 一个正实数，若其小数部分、整数部分和自身成等比数列，则这个正实数是________.

8. 一个三阶等差数列$\{a_n\}$的前四项依次为 30，72，140，240，则其通项公式为$a_n=$________.

二、解答题

9. 已知$a_1,a_2,\cdots,a_{13}$成等差数列，

$$M=\{a_i+a_j+a_k \mid 1\leqslant i<j<k\leqslant 13\},$$

问：$0,\frac{7}{2},\frac{16}{3}$是否可以同时在$M$中？证明你的结论.

10. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,数列$\{b_n\}$为等比数列,若$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=n\cdot 2^{n+3}$,且$a_1=8$.

(1) 求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 是否存在$r,s\in\mathbf{N}_+$,使得$a_r^2-b_s=2013$,若存在,求出所有满足条件的r,s;若不存在,请说明理由.

11. 证明以下命题:

(1) 对任一正整数a,都存在整数$b,c(b<c)$,使得a^2,b^2,c^2成等差数列;

(2) 存在无穷多个互不相似的三角形$\triangle_n$,其边长a_n,b_n,c_n为正整数且a_n^2,b_n^2,c_n^2成等差数列.

第 2 讲　数学归纳法(一)

1.（卡特兰恒等式）求证：对于任意正整数 n，有恒等式

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

成立.

2.（伯努利不等式）已知 n 为正整数，$x>-1$，求证：$(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

3. 作幂塔 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}$，定义 $a_0=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$ $(n \in \mathbf{N})$，证明：数列 a_n 单调递增且有上界 2.

4. 如图 2-1 所示，有一列曲线 P_0，P_1，P_2，…，已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的正三角形，P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作得到：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉（$k=0,1,2,\cdots$），记 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积. 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

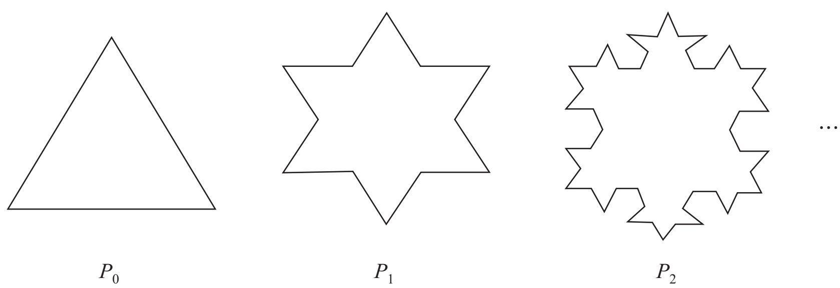

图 2-1

5. 试问:是否存在正整数 m,它的各位数字之和为2022,而 m^2 的各位数字之和为 2022^2?

6. 2021个点分布在一个圆的圆周上,每个点都标上 $+1$ 或 -1. 如果自某点开始,按任一方向绕圆周前进到任何一点时,所经过的数字的和都是正数,则称该点是一个好点. 证明:如果标作 -1 的点数少于674,则圆周上至少有一个好点.

7. 已知对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$,有 $a_n > 0$,且 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^3 = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)^2$,求证:$a_n = n$.

8. 证明:任意正的真分数 $\dfrac{m}{n}$ 都可以表示成不同的正整数的倒数之和.

9. 将 n 颗石子随意分成两堆,记下两堆石子数的乘积;再将其中一堆分成两堆,记下这两堆石子数的乘积;再将这三堆中的一堆分成两堆,记下这两堆石子数的乘积;这样一直进行下去,直到分成 n 堆,每堆一颗石子为止,求这些乘积之和.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数.

(1) 求证:$\cos A$ 是有理数;

(2) 求证:对任意正整数 n,$\cos nA$ 是有理数.

11. 对正整数 $n \geqslant 2$,求证:任何正整数 m($1 \leqslant m \leqslant n^2$,$m \neq 2$,$m \neq n^2-2$)可以写成集合 $\{1,3,\cdots,2n-1\}$ 中不同数的和(这个集合包含前 n 个正奇数),并证明 n^2-2 不能这样写.

第 3 讲　数列求和与数列极限

一、填空题

1. 数列 $1,(1+2),(1+2+2^2),\cdots,(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}),\cdots$，前 n 项之和用 n 来表示是________.

2. 设 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 的值为________.

3. 若 $x_i=\dfrac{i}{101}$，则 $S=\sum\limits_{i=0}^{101}\dfrac{x_i^3}{3x_i^2-3x_i+1}$ 的值为________.

4. 数列 1,2,1,2,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,1,2,…，其相邻的两个 1 被 2 隔开，第 n 对 1 之间有 n 个 2，则数列的前 1234 项的和为________.

5. 如图 3-1 所示，设正三角形 T_1 的边长为 a，T_{n+1} 是 T_n 的中点三角形，A_n 为 T_n 除去 T_{n+1} 后剩下的三个三角形内切圆面积之和，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k=$________.

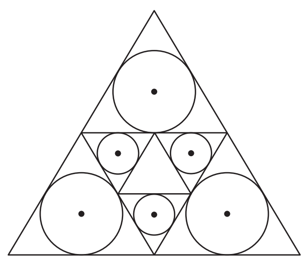

图 3-1

6. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+2)}{n+1}a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$________.

7. k 为正整数，$g(k)$ 表示 k 的最大奇因数(例如 $g(3)=3$，$g(20)=5$)，则 $g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^n)$(其中 $n\in\mathbf{N}_+$)$=$________.

8. 已知一个数列的各项是 1 或 2，首项为 1，且在第 k 个 1 和第 $k+1$ 个 1 之间有 2^{k-1} 个 2，即 1,2,1,2,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2,1,…，则这个数列的前 1998 项的和等于________.

二、解答题

9. $n^2(n\geqslant 4)$ 个正数排成 n 行 n 列，

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

其中每一行的数成等差数列,每一列的数成等比数列,并且所有公比都相等,已知 $a_{24}=1$,$a_{42}=\frac{1}{8}$,$a_{43}=\frac{3}{16}$,求 $S=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$.

10. 一只蜜蜂从点 P_0 开始飞行,它向东飞行1英寸到达点 P_1. 一旦到达点 P_j $(j\geqslant 1)$,便立刻向逆时针 30° 方向飞行 $j+1$ 英寸,直接到达点 P_{j+1}. 问:当蜜蜂到达点 P_{2015} 时,它距点 P_0 有多少英寸?

11. 已知实数列 $\{a_n\}$ 满足:$|a_1|=1$,$|a_{n+1}|=q|a_n|$ $(q>1)$,且对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,有 $\sum\limits_{k=1}^{n+1}|a_k|\leqslant 4|a_n|$,设 C 为所有满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 的集合.

(1) 求 q 的值;

(2) 已知 $\{a_n\}\subseteq C$,$\{b_n\}\subseteq C$,且存在 $n_0\leqslant m$,满足 $a_{n_0}\neq b_{n_0}$,证明:$\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\neq\sum\limits_{k=1}^{m}b_k$;

(3) 设集合 $A_m=\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\,\middle|\,\{a_n\}\in C\right\}$,$m\in\mathbf{N}_+$,求 A_m 中所有正数之和.