

第1章

弯曲时空的张量代数

广义相对论是一个几何化的引力理论. 引力表现为时空的弯曲, 而时空弯曲由物质及其分布决定. 弯曲时空中的几何不再是欧几里得几何(简称欧氏几何), 而是黎曼几何. 广义相对论中物理量组成的物理定律是广义协变的, 亦即一条物理定律由一些物理量的相互关系所组成, 物理定律和物理量本身独立于物理参考系和数学坐标系的选择, 在不同的坐标系里有不同的形式和数值. 作为一个几何化的理论, 应当寻求与这些物理量对应的几何量, 这些几何量独立于坐标系的选择. 在已为大家熟悉的欧几里得空间(简称欧氏空间)里, 向量显然符合这样的要求. 经典力学里用向量表示位移、速度和加速度等物理量. 在黎曼空间里这样的几何量是张量. 本章简单扼要地介绍本书后文章节需要的张量代数知识.

1.1 度规

1.1.1 弯曲空间和平直空间

以2维平面、柱面和球面为例, 讨论平直空间和弯曲空间的差别. 要判断柱面和球面是不是平直, 只要将柱面和球面连续地变形, 看它们能不能变成平面. 注意在变形过程中, 无穷小邻近两点间的距离要保持不变. 换句话说, 曲面上任何一条曲线的长度在变形过程中保持不变. 这个条件使得曲面的基本几何性质不发生改变. 容易想象, 如果曲面像橡皮泥一样可以随意压缩和拉伸, 任何曲面都能连续变形成平面. 显然, 沿一条母线剪开后的柱面, 不用挤压和拉伸, 就可以将它展开成平面. 去除了一点的球面是一个不闭合的曲面, 但它不能以保距的方式变形为平面. 这说明, 柱面和球面有本质的不同, 前者平直, 后者弯曲.

平面、柱面和球面的区别可用相邻两点间距离的表达式来表示. 设无穷小邻近两点间的距离为 ds , 对平面和柱面选择直角坐标系 $\{x, y\}$ ^①, 有

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (1.1)$$

^① 本书用 $\{t, x, y, z\}, \{t, x^i\}, \{x^a\}$ 等表示坐标系, 用 $(t, x, y, z), (t, x^i), (x^a)$ 等表示时空点的坐标, 也用 $(T^0, T^1, T^2, T^3), (T^a)$ 等表示向量的坐标分量表达式, 用 T^1, T^i, T^a 等表示向量的某个坐标分量.

注意,这里和后续的 dx^2 等符号表示的是 $(dx)^2$ 而不是 $d(x^2)$. 对单位半径球面选择球面坐标系 $\{\theta, \phi\}$, 有

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (1.2)$$

显然,在左边 ds^2 保持不变的情况下,无论进行什么坐标变换,方程(1.2)在形式上都不可能转换成方程(1.1). 这表明,邻近两点之间距离的表达式可以区分空间的弯曲状况. ds^2 的表达式称为度规.

必须指出,说球面度规(1.2)不可能变换成平面度规(1.1),是对整个球面而言的. 对于球面上一点 (θ_0, ϕ_0) , 球面度规可以写成

$$ds^2 = d\theta^2 + d(\phi \sin\theta_0)^2.$$

进一步,令 $x = \theta, y = \phi \sin\theta_0$, 上式就具有平面度规的形式. 上面的过程实际上说明: 球面上任何一点的无穷小邻域可以用球面在该点的切平面来代替,但在球面上的大范围,或是整个球面的几何性质与平面完全不同. 要强调的是,对于弯曲空间,需要分清“全局”(global)和“局域”(local)的概念. 在弯曲空间里,将度规转换成平直空间度规的坐标变换,对大范围或整个空间(全局)并不存在,然而对任何给定点的无穷小邻域(局域)总是存在. 在数学学习中,常见命题在局域成立而全局不成立. 今后要多次遇到全局和局域的差别,对这两个概念会有更深刻的理解.

1.1.2 牛顿力学的空间度规

牛顿力学的空间是 3 维欧几里得空间 E_3 , 用直角坐标 $\{\xi^i\} (i=1,2,3)$ 表示的度规为

$$ds^2 = \delta_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad (1.3)$$

其中, δ_{ij} 是克罗内克 δ 符号, 即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (1.4)$$

这里沿用了爱因斯坦求和的书写规则: 当一项中有两个指标相同时, 对该指标的所有可能的取值求和, 求和号则予以省略. 这样, 度规方程(1.3)等价于

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} d\xi^i d\xi^j.$$

E_3 的度规在一般坐标系 $\{x^i\}$ 中不再具有方程(1.3)的简单形式. 例如, 在球坐标系 $\{r, \theta, \phi\}$ 中为

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.5)$$

这样, E_3 的度规在任意坐标系中的一般形式可写成

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.6)$$

其中, dx^i 是相邻两点的坐标差, 而 g_{ij} 是度规表达式中的关键部分, 表示空间的几何性质,

称为度规张量,常简称为度规.在一般坐标系里, g_{ij} 通常不是常数,而是坐标的函数.也就是说,即使在平直的欧几里得空间里,空间各点处的度规张量的分量不一定相同.例如,在球坐标系里,当规定 $x^1=r, x^2=\theta$ 和 $x^3=\phi$,从式(1.5)可见,3维欧几里得空间的度规张量各分量是

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{22} &= r^2 & g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta, \\ g_{12} &= g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0. \end{aligned}$$

欧几里得空间的度规式(1.6)有以下特点:①度规张量对称,亦即 $g_{ij}=g_{ji}$.所以它的9个分量中只有6个是独立的.②一项里每个指标都出现2次,1个上标和1个下标,说明对它们都进行了从1~3的求和,度规右边的计算结果是1个数.至于写成上标或下标的理由,将在本章后面说明.③度规式(1.6)的左边是坐标变换的不变量,该式给出了在给定的坐标系中计算相邻两点间距离的公式,进一步可以计算曲线长度等几何量,也就是给出了空间的一种量度.这就是名词“度规”的来源.熟悉线性代数的读者可以将它与线性空间中的“内积”对照和联系起来理解.④欧几里得空间度规的特征是无论式(1.6)中的度规张量分量形式有多复杂,一定存在全空间的坐标变换,将度规变换成简单的式(1.3),亦即 g_{ij} 转换成 δ_{ij} .这是因为 E_3 是平直的空间.前面已经讨论过,如果空间是弯曲的,不可能存在这样的坐标变换.

现在进一步阐明度规在测量上的意义.记 $\mathbf{D}$ 是 E_3 空间的一个向量,它在坐标系 $\{x^i\}$ 中的坐标分量是 (D^i) ,并且 $D^i=dx^i$,向量的长度为 $|\mathbf{D}|=ds$,则式(1.6)可以写成

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = g_{ij} D^i D^j. \quad (1.7)$$

上式说明,度规给出了向量的内积在任意坐标系中的计算公式.设 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{K}$ 是 E_3 中的2个向量,在坐标系 $\{x^i\}$ 中的坐标分量分别为 (T^i) 和 (K^i) ,则两向量的内积在该坐标系中的表达式定义为

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{K} \equiv g_{ij} T^i K^j. \quad (1.8)$$

有了度规,等价于在向量空间里建立了向量的内积,从而能够定量计算向量的长度和两向量间的夹角.度规的这一功能可以推广到高维和弯曲空间.

1.1.3 狭义相对论的时空度规

第2章将讲解狭义相对论.狭义相对论中的时间和空间相互纠缠,构成了4维平直的闵可夫斯基时空 M_4 .选择坐标系 $\{ct, \xi, \eta, \zeta\}$,这里 c 是真空中光速, t 表示一个物理时间,它对应的3维空间有欧几里得空间 E_3 的结构, (ξ, η, ζ) 是空间位置的直角坐标.习惯上用 ct 而非 t 为时间坐标,使得每个坐标有相同的长度量纲.这时度规为闵可夫斯基度规:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2, \quad (1.9)$$

其中,时间项前面的负号表示时间与空间的区分.时间有方向,不会倒流.这个负号标志4维时空 M_4 和4维欧几里得空间 E_4 有不同的结构.

引入符号 $\{\xi^\alpha\}$ ($\alpha=0,1,2,3$)标记上面的坐标系,而用 $\{x^\alpha\}$ ($\alpha=0,1,2,3$)表示任意坐标系.沿用爱因斯坦求和规则, M_4 的度规为

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.10)$$

其中, $\eta_{00}=-1, \eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=1, \eta_{\alpha\beta}$ 的其余分量为零.这时称度规的符号为 $(-1,1,1,1)$.一些相对论的教科书和文献采用的度规符号为 $(1,-1,-1,-1)$,读者阅读时需注意.

现在对本书采用的符号做进一步的约定.当指标用希腊字母书写时,表示这是时空指标,其可能的取值为 $0,1,2,3$.取值为 0 时表示时间指标,否则为空间指标.当指标用拉丁字母书写时,表示这是空间指标,其可能的取值为 $1,2,3$.全书都遵守这样的指标书写规定.

和欧几里得空间的度规一样,闵可夫斯基时空的度规同样有对称性等特征,它的度规张量 16 个分量中只有 10 个独立.闵可夫斯基时空也是平直的,具体表现为一定存在坐标变换,将任意坐标系里的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 在时空的每一点都转换成 $\eta_{\mu\nu}$.例如,下面的度规

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 + 2\omega r^2 dt d\theta. \quad (1.11)$$

这是 M_4 中以 ω 为角速度匀速旋转的参考系,用柱坐标系 $\{ct, r, \theta, z\}$ 表示的度规,其中

$$g_{00} = -(1 - \omega^2 r^2 / c^2), \quad g_{rr} = g_{zz} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{0\theta} = g_{\theta 0} = \omega r^2 / c,$$

其余的度规分量为零.显然,只要进行坐标变换,将 θ 换成 $\theta - \omega t$,再将柱坐标变换成直角坐标,度规式(1.11)就可以在时空的每一点转换成闵可夫斯基度规 $\eta_{\alpha\beta}$.这说明转盘度规式(1.11)对应的时空是闵可夫斯基时空.

1.1.4 广义相对论的时空度规

与牛顿力学 3 维平直的欧几里得空间和狭义相对论 4 维平直的闵可夫斯基时空不同,广义相对论的时空是 4 维的弯曲时空.广义相对论与狭义相对论的差别是后者的物理框架里没有引力而前者包括引力.当引力场及其引力效应可以忽略,例如在远离引力源物质的地方,时空接近平直的闵可夫斯基时空.引力和时空弯曲间的关系,以及如何判断时空是平直还是弯曲等问题将从第 3 章开始予以仔细阐述.广义相对论时空度规的一般形式为

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1.12)$$

对称的度规 $g_{\alpha\beta}$ 是时空坐标 x^μ 的函数, 10 个独立分量的形式依赖时空的几何性质和坐标系的选择.

表面看来,式(1.12)与式(1.10)类似.重要的区别是对于弯曲时空,不存在一个全时空的坐标变换,使度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 在时空的每一点都转换成闵可夫斯基度规 $\eta_{\alpha\beta}$.例如,一个物质分布为球对称的恒星周围,时空的度规是著名的施瓦西度规

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.13)$$

其中, G 和 m 分别为牛顿引力常量和恒星的质量.在学习了黎曼几何后,容易证明,不可能

找到一个全局的坐标变换,使上述度规在时空的所有点都变换成闵可夫斯基度规 $\eta_{\alpha\beta}$, 这是一个弯曲而非平直的时空.

在度规的表达式(1.12)中,表示时空几何性质的量显然是 $g_{\alpha\beta}$. 在 1.3 节中将说明,它是一个称为度规张量的 2 阶张量的协变坐标分量. 名词“张量”和“协变”的含义将在本章的后续章节中予以解释. 应当这样来理解,度规张量表示时空几何,它本身与坐标系的选择无关,但是它的坐标分量 $g_{\alpha\beta}$ 的形式依赖坐标系的选择. 在广义相对论中度规张量是对称的,在任意坐标系中,恒有 $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$.

现在看 $g_{\alpha\beta}$ 在坐标变换下的变换规律. 设从 $\{x^\alpha\}$ 系变换到 $\{x^{\alpha'}\}$ 系,注意 ds^2 是坐标变换的不变量,从式(1.12)有

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} dx^{\alpha'} dx^{\beta'} = g_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} dx^{\beta'}.$$

所以度规张量的协变坐标分量在坐标变换下的变换规律是

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}. \quad (1.14)$$

初学者在进行上面这些简单的推导时,要特别当心指标的书写. 因为应用了爱因斯坦求和规则,每一个指标在项中出现不得超过 2 次,否则一定发生了错误. 在式(1.14)的右边,指标 α 和 β 各出现了 2 次,经过求和以后不应当出现在左边. 读者可以用这种方法检查自己的推导.

式(1.14)可写成矩阵形式. 记 $G = (g_{\alpha\beta})$ 和 $G' = (g_{\alpha'\beta'})$, 分别为 2 个坐标系中由度规张量的协变坐标分量组成的 4×4 矩阵,而 $J = (\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'})$ 为坐标变换的雅可比矩阵,则式(1.14)可写成

$$G' = J^T G J, \quad (1.15)$$

其中, J^T 表示 J 的转置矩阵.

定义 $G^{-1} = (g^{\alpha\beta})$ 为 G 的逆矩阵,即在任意坐标系中恒有

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (1.16)$$

$g^{\alpha\beta}$ 由 $g_{\alpha\beta}$ 唯一确定,可以猜测两者在几何意义上并无本质的区别. 今后将说明,两者都是度规张量在不同基底下的坐标分量. 称 $g^{\alpha\beta}$ 为度规张量的逆变坐标分量. 名词“逆变”和“协变”的含义将在本章后续章节解释.

从式(1.15)立即得到, $g^{\alpha\beta}$ 在坐标变换下的变换规律是

$$G'^{-1} = J^{-1} G^{-1} J^{-T}, \quad (1.17)$$

或

$$g^{\alpha'\beta'} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}. \quad (1.18)$$

今后规定将度规协变分量的指标写在右下角,逆变分量的指标写在右上角,坐标 x^α 的指标也写在右上角. 这些规定有利于张量运算的数学表示. 当张量运算的一项中一个指标出现 2 次时,其中一个必定是上指标,另一个必定是下指标,这是检查推导是否正确的手段之一.

为了熟悉爱因斯坦求和规则和用这种规则进行数学推导,当度规协变和逆变在坐标变换下的变换规律为式(1.14)和式(1.18)时,证明两者在任何坐标系中都为互逆,亦即当式(1.16)在一个坐标系中成立,则在所有坐标系中都成立.作为练习,下面的证明不采用矩阵运算.

式(1.14)和式(1.18)表明有下式成立:

$$g_{\alpha'\beta'} g^{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu}.$$

在上式等号的右边,一个指标最多出现2次,凡出现2次的指标均为一个上指标和一个下指标,按照爱因斯坦求和规则对这些指标从0到3求和.求和之后上式等号右边只剩下上指标 γ' 和下指标 α' ,与上式左边一致.这些检查有助于发现推导中的错误.

利用

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta,$$

前式变成

$$g_{\alpha'\beta'} g^{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu}.$$

假定协变度规和逆变度规的互逆在坐标系 $\{x^\alpha\}$ 中成立,则有

$$g_{\alpha'\beta'} g^{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\nu} \delta_\alpha^\nu = \delta_{\alpha'}^{\gamma'}.$$

这就证明了两者在坐标系 $\{x^{\alpha'}\}$ 中也互逆.

1.2 1 阶张量

1.2.1 切空间和切向量

图1.1显示2维曲面 M .设想这个曲面是光滑的,或者说是可微的,也就是在曲面上任一点 A 都有曲面的切平面 $T_A M$ 存在.曲面是弯曲的,然而切平面是平直的,可以看成是曲面在切点局域的线性近似.图中的向量 $\mathbf{T}$ 在 A 点与曲面相切,是 M 在 A 点的一个切向量.切空间 $T_A M$ 可以看成由曲面在 A 点的全部切向量所组成.这幅图像可以自然地推广到高维的情况.广义相对论的时空 M 是维数为4的超曲面,在时空点 A 处的切空间 $T_A M$ 是维数为4的平直时空.以后会知道,广义相对论时空的切空间是闵可夫斯基时空.注意,这里的时空超曲面、时空点、切空间和切向量都是几何量,不会因坐标系的选择而有所变化.以后会了解这些几何量与物理量相对应,物理量和几何量一样是客观存在的,与坐标系的选择无关.当选择了一组坐标系后,整个时空就会打上坐标网格,每一个时空点有了4个数作为该点的坐标,平直的切空间同样可以建立相应的坐标系,每一个切向量有4个坐标分量.

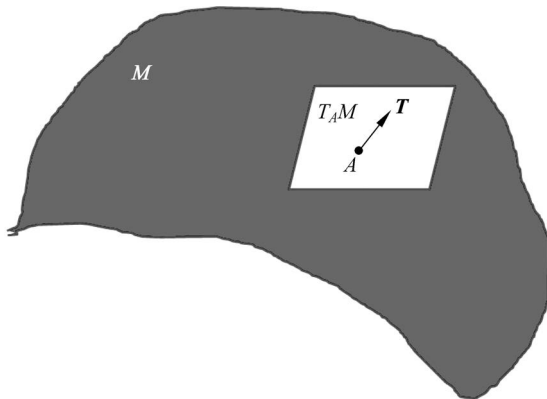


图 1.1 弯曲空间 M 在点 A 的切空间 $T_A M$ 和切向量 T

当提到一个切向量时,必须指出它属于哪个时空点的切空间,但本章只讨论同一切空间中切向量之间的运算,不同切空间中向量之间的关系将在后面几章讨论.在后文和很多教科书中,常简称切向量为向量.

1.2.2 协变基底

前面已经提到,切空间 $T_A M$ 由所有的切向量组成,是一个 4 维的线性向量空间.可以选定 4 个线性独立的向量 $\{e_{(\alpha)}\} (\alpha=0,1,2,3)$ 为基底,切向量 T 在该组基底上分解就有了坐标分量,形如

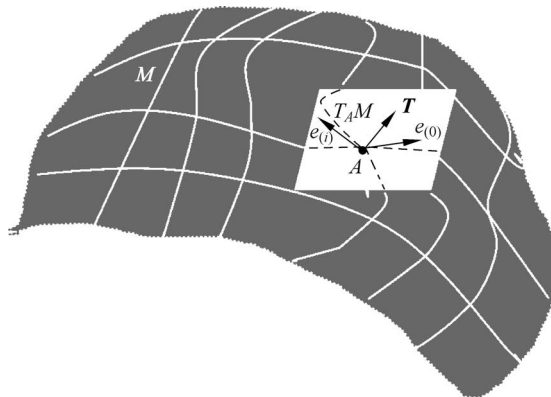
$$T = T^\alpha e_{(\alpha)}. \quad (1.19)$$

这里要注意圆括号指标 (α) 表示的是第 α 个基底.上式中同样应用了爱因斯坦求和规则,同时用黑斜体表示 4 维时空中的切向量,以后均按此约定书写.

显然,切空间 $T_A M$ 可以有无穷多组基底.然而,在整个时空 M 上建立坐标系 $\{x^\alpha\}$ 后,自然地在 A 点的切空间产生了一组基底,如图 1.2 所示.建立了坐标系意味着在 M 上建立了坐标网格,在 A 点也有 4 条坐标线经过.图 1.2 画的是 2 维时空中 x^0 和 x^i 坐标线,后者在 4 维时空代表了 3 条空间坐标线.这些坐标线就是在 A 点处的坐标轴.坐标系 $\{x^\alpha\}$ 自然地确定了切空间 $T_A M$ 的一组基底,第 α 个基底向量 $e_{(\alpha)}$ 在 A 点与第 α 根坐标线相切,并指向坐标 x^α 增加的方向.

基底向量的长度和相互交角由该点处的度规来度量.^①设在所选的时空坐标系里度规

① 当 M 上的坐标系 $\{x^\alpha\}$ 选定后, M 上每一点处的度规就有了确定的数值.例如,为了得到 A 点处的度规 $g_{\alpha\beta}$,可以测量 A 点与邻近点之间的距离 Δs ,同时有两点间的坐标差 Δx^α .当两点极其接近时,它们可以作为 ds 和 dx^α 的近似值.只要对 A 点和多个邻近点进行这样的测量,就可以从式(1.12)计算 $g_{\alpha\beta}$ 的值.这说明在坐标系选定后,原则上确定 $g_{\alpha\beta}$.实际工作中当然不会这样操作,在广义相对论里,通过解爱因斯坦场方程得到度规,见第 5 章和第 6 章.

图 1.2 引入坐标系 $\{x^\alpha\}$ 后的协变基底 $\{e_{(\alpha)}\}$

的坐标分量为 $g_{\alpha\beta}$, 基底向量自身的坐标分解为 $e_{(\alpha)} = \delta^\mu_\alpha e_{(\mu)}$, 所以 $e_{(\alpha)}$ 的第 μ 个分量应当是 δ^μ_α , 于是将式(1.8)推广到 4 维时空的切空间, 得到两个基底向量的内积为

$$e_{(\alpha)} \cdot e_{(\beta)} = g_{\mu\nu} \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad (1.20)$$

而基底向量长度的平方为

$$|e_{(\alpha)}|^2 = e_{(\alpha)} \cdot e_{(\alpha)} = g_{\alpha\alpha}. \quad (1.21)$$

式中, α 是给定值, 对它并不应用爱因斯坦求和规则. 这样, 在整个时空 M 建立了一组坐标系 $\{x^\alpha\}$ 后, 在时空任一点的切空间里产生了一组对应的基底 $e_{(\alpha)}$, 与过该点的坐标线相切, 指向坐标增加的方向, 其长度和相互夹角由该点处的协变度规 $g_{\alpha\beta}$ 确定. 这组基底称为协变基底. 请注意, 一般情况下, 这组基底不是正交归一的. 只有当该时空点的度规为闵可夫斯基度规 $\eta_{\alpha\beta}$ 时, 对应的协变基底才正交归一.

余下的问题, 是当时空坐标系从 $\{x^\alpha\}$ 变换到 $\{x^{\alpha'}\}$ 后, 对应的协变基底将如何变换. 考虑切向量 $D = (dx^\alpha)$, 它的坐标分量 dx^α 是 A 点与其无穷小邻近一点的坐标差. 注意切向量本身是坐标变换的不变量, 因此有

$$D = dx^\alpha e_{(\alpha)} = dx^{\alpha'} e_{(\alpha')}.$$

从上式立即得到

$$e_{(\alpha)} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} e_{(\alpha')}. \quad (1.22)$$

1.2.3 逆变坐标分量

式(1.19)给出选择了协变基底组 $\{e_{(\alpha)}\}$ 后切向量 T 的坐标分量 T^α , 称为 T 的逆变坐标分量, 指标 α 写在右上角. 考虑 T 是客观的几何量, 与坐标系和基底的选择无关, 有

$$T = T^\alpha e_{(\alpha)} = T^{\alpha'} e_{(\alpha')}.$$

应用协变基底在坐标系变换下的变换式(1.22), 1 阶张量的逆变坐标分量 T^a 在坐标变换下的变换规律是

$$T^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} T^{a'}. \quad (1.23)$$

请注意, 上式是线性齐次变换, 其中的系数 $\partial x^a / \partial x^{a'}$ 是坐标变换的雅可比矩阵的元素, 应当赋予给定点的坐标值以计算其数值. 前面多次强调过, 切向量本身是几何量, 不受坐标变换的影响, 坐标变换仅仅改变该向量的坐标分量, 所以上式不能有非齐次项, 否则一个零向量在坐标变换后可以变成非零向量. 一些教科书将式(1.23)看成是逆变张量的定义, 和本书的叙述等价.

还有一点要提请注意, 初学者常常将任何含有指标的序列都看成向量. 例如一个时空点的坐标 (x^a) , 它的变换一般不是线性齐次变换, 不具有式(1.23)的变换规律. 以 $\partial x^a / \partial x^{a'}$ 为表征的线性齐次变换是坐标变换 $\{x^a\} \rightarrow \{x^{a'}\}$ 对应的切空间的变换.

1.2.4 逆变基底

显然, 切空间中任何一组线性独立的向量都可以充作基底. 现在从协变基底出发, 用度规来构造另一组基底, 为

$$e^{(\alpha)} = g^{a\beta} e_{(\beta)}. \quad (1.24)$$

称这组基底为逆变基底, 表示第 α 个基底的指标 (α) 标注在右上角. 从协变度规 $g_{a\beta}$ 和逆变度规 $g^{a\beta}$ 的互逆关系式(1.16)得到

$$e_{(\alpha)} = g_{a\beta} e^{(\beta)}. \quad (1.25)$$

请仔细审视上面这两个公式. 首先注意指标的标记位置, 右上角还是右下角. 含有圆括号的指标表示基底组中第几个基底, 对逆变基底标注于右上角, 协变基底标注在右下角. 度规张量指标的位置类似, 逆变指标标注在右上角, 协变指标标注在右下角. 仔细查看上面的公式, 例如式(1.24), 发现公式右边的 β 一个在上、一个在下, 进行了求和, 余下的上指标 α 和左边的 (α) 指标位置一致, 说明了上述书写规则的合理性. 这也是检查张量公式是否正确的一种手段.

现在计算两个逆变基底之间的内积, 如

$$e^{(\alpha)} \cdot e^{(\beta)} = g^{a\mu} g^{\beta\nu} e_{(\mu)} \cdot e_{(\nu)} = g^{a\mu} g^{\beta\nu} g_{\mu\nu} = g^{a\mu} \delta_{\mu}^{\beta} = g^{a\beta}. \quad (1.26)$$

同时有逆变基底向量的长度为

$$|e^{(\alpha)}|^2 = e^{(\alpha)} \cdot e^{(\alpha)} = g^{aa}. \quad (1.27)$$

式(1.27)中, 指标 α 是给定值, 并不进行求和. 用完全类似的方法, 得到一个协变基底向量和一个逆变基底向量的内积为

$$e^{(\alpha)} \cdot e_{(\beta)} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (1.28)$$

从上面的推导过程中, 可以再次看到指标位置的书写规则.

以上公式说明逆变基底的长度和相互的夹角由逆变度规 $g^{a\beta}$ 来决定,也说明在时空坐标系和度规的表达式确定之后,切空间自然有协变和逆变两组基底,它们相互之间由度规联系.

有了协变基底和逆变基底的关系式(1.24),以及在坐标变换下逆变度规的变换规律式(1.18)和协变基底的变换规律式(1.22),可以推得逆变基底在坐标变换下的变换规律是

$$e^{(a)} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} e^{(a')}. \quad (1.29)$$

请读者自行证明上式,推导时注意指标的书写位置,同一指标在一项中出现不得超过2次,且相同的2个指标一定是1个在上(逆变指标)、1个在下(协变指标).

1.2.5 协变坐标分量

这样,张量 $\mathbf{T}$ 在选择2个不同的基底组后有不同的坐标分量:逆变坐标分量和协变坐标分量,写为

$$\mathbf{T} = T^a e_{(a)} = T_a e^{(a)}. \quad (1.30)$$

T_a 称为张量 $\mathbf{T}$ 的协变坐标分量.

在定义了逆变基底和协变基底的关系后,立即导出两组坐标分量之间的关系,为

$$\begin{aligned} T_a &= g_{a\beta} T^\beta, \\ T^a &= g^{a\beta} T_\beta. \end{aligned} \quad (1.31)$$

同时可以知道张量的协变坐标分量随坐标变换的变换规律为

$$T_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} T_{a'}. \quad (1.32)$$

综合起来说,给定的弯曲时空 M 在选择了一个坐标系 $\{x^a\}$ 后,时空各点的协变度规 $g_{a\beta}$ 和逆变度规 $g^{a\beta}$ 也就确定了,这时时空中任一点 A 的切空间 $T_A M$ 里生成了2组基底:协变基底 $e_{(a)}$ 和逆变基底 $e^{(a)}$. 切空间里的1阶张量 $\mathbf{T}$ 在这2组基底上有两组坐标分量:逆变坐标分量 T^a 和协变坐标分量 T_a . 它们之间的关系由度规决定. 作为几何量的张量本身与坐标系的选择无关,但其坐标分量依赖坐标系的选择,在坐标变换 $\{x^a\} \rightarrow \{x^{a'}\}$ 下为线性齐次变换,由坐标变换的切变换,亦即雅可比矩阵 $(\partial x^a / \partial x^{a'})$ 来决定. 从协变基底和逆变基底的内积关系式(1.28)和张量在基底上的分解表达式(1.30)立即可得

$$T^a = \mathbf{T} \cdot e^{(a)}, \quad T_a = \mathbf{T} \cdot e_{(a)}. \quad (1.33)$$

因为基底向量与坐标系选择有关,上式清晰地表明,张量的坐标分量与坐标系的选择有关.

申明一下,为了尽快让读者进入相对论及其应用,本书对弯曲时空上的微分几何进行了处理,主要是不区分切空间和余切空间,不用映射等数学语言来定义张量,不引入微