

新高考 数学 选择填空 一本通

张君 任苍松 李鸿昌◎主编

新高考数学选择填空一本通

张君 任苍松 李鸿昌◎主编

清华大学出版社



清华大学出版社

新 高 考 数 学 选 择 填 空 一 本 通

张 君 任苍松 李鸿昌◎主编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书紧扣新课标与新高考趋势,精选近五年高考真题,聚焦选择填空模块高频考点,为高中生打造高效提分方案.全书共13章,每节以“经典考题、试题分析、一题多解、知识提炼、方法提炼、回归课标、考题溯源、通关测试”为体例,拆解命题逻辑:既剖析题干关键与易错点,提供通法与技巧结合的多元解法,又提炼考点知识网络与选择填空专属策略,同步对接课标核心素养,追溯教材原型,揭示“从课本到新高考”的演变规律.书中兼顾“一题精解”与“类题通法”,助读者跳出题海,实现“会题快解、难题巧解”.

本书可供高中生备考数学选择填空题使用,亦为教师教研、师范生学习提供真题解析与题型研究范例使用.

版权所有,侵权必究. 举报: 010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

新高考数学选择填空一本通 / 张君, 任苍松, 李鸿昌主编. -- 北京: 清华大学出版社, 2025. 6.

ISBN 978-7-302-69280-5

I. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 202587FN32 号

责任编辑: 汪 操

封面设计: 傅瑞学

责任校对: 赵琳爽

责任印制: 刘 菲

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-83470000 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 北京联兴盛业印刷股份有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 210mm×285mm

印 张: 19.25

字 数: 535 千字

版 次: 2025 年 7 月第 1 版

印 次: 2025 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 76.00 元

产品编号: 108541-01

编 委 会

主 编

张 君 任苍松 李鸿昌

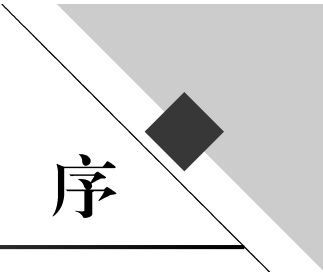
副主编

王奋际 李武学 肖皓月

编 委

杨永清 刘群秀 陈婷婷 蒲 会 官圣淇 杨乾芳 马 维
宋小强 张斌辉 唐 俊 许 桃 梅燕萍 胡 杰 潘修雷
周忠君 何天宇 舒叶梅

清华大学出版社



序

教育是国之大计,数学作为基础学科,承载着培养学生逻辑思维、创新能力和科学精神的重要使命.在新高考改革的浪潮中,如何帮助学生在数学学科中突破瓶颈、高效备考,既是教师的职责,也是教育研究者的课题.

张君老师是我校数学教师的杰出代表,深耕教学一线二十余载,成果斐然:所教班级高考数学平均分达 138 分,培养出两名数学满分学子;发表教学论文 40 余篇,多次在国家级、省级教育论坛分享经验;主持四川省教育科研重点课题“拔尖创新人才早期培养视域下普通高中‘强基课程’建设研究”,其研究成果为本书的编写提供了坚实的理论支撑和实践范式.这些成就不仅彰显了他深厚的学术功底,更体现了一名教育工作者对育人使命的执着追求.

本书的诞生,正是理论与实践结合的典范.以课题研究为引领,深入分析近五年高考真题,紧扣“强基课程”核心理念,聚焦选择题与填空题的命题规律,构建了“经典考题—方法提炼—通关测试”的科学体例.书中例题均精挑细选,解析兼具深度与广度,“一题多解”栏目更展现了数学思维的灵活性与创造性,充分体现了“多想少算”的新高考命题导向.尤为值得一提的是,本书将抽象函数、对称性、极值点等难点以直观的方式呈现,既夯实基础,又拓展思维,为学生搭建了从知识掌握到能力提升的阶梯.

近年来,我校始终秉持“为拔尖创新人才奠基”的理念,以课题研究推动课程创新,以精准教学提升课堂效能.本书的出版,不仅是张君老师智慧与心血的结晶,更是学校“强基课程”建设的一次重要突破.它既是对新高考改革的积极回应,也为广大师生提供了切实可行的备考指南.

在此,我谨代表四川省温江中学党委,向张君同志致以诚挚祝贺!希望我校广大教师以本书为范本,深耕教学、精研学术,为培养更多创新型人才贡献力量.也期待莘莘学子通过本书的学习,夯实基础、锤炼思维,在数学的海洋中乘风破浪,成就梦想!

曾 宏

2025 年 6 月

清华大学出版社

前言

在新高考的浪潮中,数学作为一门重要的考查学科,对考生的逻辑思维、分析问题和解决问题的能力提出了更高的要求.选择题和填空题作为数学试卷中的重要组成部分,虽然每道题的分值相对较小,但它们的数量众多,对总分的影响不容小觑.为了帮助广大考生更好地应对新高考数学中的选择题和填空题,我们依托 2023 年度四川省教育科研项目重点课题“拔尖创新人才早期培养视域下普通高中‘强基课程’建设研究(课题编号: SCJG23A051)”的研究成果,结合一线教学实践,精心编写了本书.

一、编写背景

随着新高考改革的不断推进,数学考试的题型和内容也在发生着变化.选择题和填空题更加注重考查学生对基础知识的掌握程度、思维的灵活性及解题时的“多想少算”.同时,高考真题具有权威性、典型性和导向性,能够准确地反映高考的命题趋势和要求.因此,我们从近五年的高考真题中精心挑选了具有代表性的考题作为例题,按照科学的体例进行编排,旨在为考生提供一本高效、实用的复习资料.

二、本书特色

本书的体例框架是:经典考题、试题分析、一题多解、知识提炼、方法提炼、回归课标、考题溯源、通关测试.

1. 经典考题

本书所选的例题均为近五年高考真题中的经典选择题和填空题,涵盖了新高考数学的各个知识点和考点.这些题目具有代表性强、难度适中、题型多样等特点,能够帮助考生全面了解新高考数学选择题和填空题的命题规律和考查重点.

2. 试题分析

对于每一道经典考题,我们都进行了详细的试题分析.分析内容包括题目所考查的知识点、考查目标、解题思路和解题关键等.通过试题分析,考生可以更加深入地理解题目,掌握解题方法,提高解题能力.

3. 一题多解

为了培养考生的思维灵活性和创新能力,我们对每一道经典考题都提供了多种解题方法.这些解题方法有的从不同的角度出发,有的运用了不同的数学思想和技巧.通过一题多解,考生可以拓宽解题思路,学会从不同的角度思考问题,培养数学思维,提高解题能力.

4. 知识提炼

在每一道经典考题的解析之后,我们都进行了知识提炼.知识提炼主要是对题目所涉及的知识进行归纳和总结,帮助考生系统地掌握数学知识,加深对知识点的理解和记忆.

5. 方法提炼

除了知识提炼,我们还进行了方法提炼.方法提炼主要是对这一类题型的解题方法进行总结和归纳,帮助考生掌握解题方法与技能,提高解题能力.方法提炼包括常规方法和特殊方法,考生可以根据自己的实际情况选择适合自己的解题方法.

6. 回归课标

高考命题是以课程标准为依据的,因此,我们在编写本书时,注重回归课标.在每一道经典考题的解析之后,我们都将题目与课程标准进行对照,帮助考生明确题目所考查的知识点在课程标准中的要求,从而更好地把握复习的重点和方向.

7. 考题溯源

为了帮助考生更好地理解高考真题的命题背景和来源,我们对每一道经典考题都进行了考题溯源.考题溯源主要是对题目所涉及的知识点和解题方法进行追根溯源,帮助考生了解题目是如何从教材中的习题、例题或者往年的高考真题演变而来的,从而更好地掌握数学知识的本质和规律.

8. 通关测试

为了帮助考生巩固所学知识,提高解题能力,我们在每一章的末尾都设置了通关测试.通关测试的题目类型与新高考的选择题和填空题一致,有单选题、多选题、填空题(单空、双空),题量为4至6道,都是精挑细选,优中选优,主要选自近三年的高考真题和近半年的名校模拟题,试题具有梯度,也有一定的综合性.通过通关测试,考生可以及时检验自己的学习效果,发现自己的不足之处,以便有针对性地进行复习、调整、提高.

9. 参考答案

本书的最后附有通关测试的详细的参考答案,给出通关测试中每一道题的详细解析,帮助考生更好地理解解题方法和思路.

三、使用方法

1. 系统复习

考生可以按照本书的章节顺序进行系统复习.在复习过程中,首先认真阅读经典考题,了解题目所考查的知识点和解题思路;然后进行试题分析,深入理解题目;接着尝试一题多解,拓宽解题思路;最后进行知识提炼和方法提炼,系统地掌握数学知识和解题技巧.

2. 专项训练

考生可以根据自己的薄弱环节进行专项训练.例如,如果考生在函数部分的选择题和填空题中经常出错,可以重点复习函数部分的经典考题,进行针对性的练习,提高自己在函数部分的解题能力.

3. 限时训练

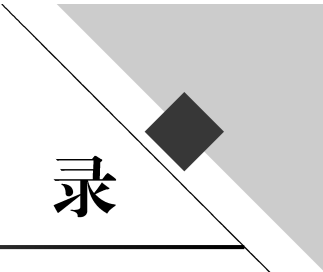
考生可以在复习的后期进行限时训练.选择一节或两节的通关测试题进行限时训练,检验自己的学习效果和应试能力.测试结束后,认真分析自己的答题情况,找出存在的问题和不足之处,及时进行复习和巩固.

希望通过本书的学习,考生可以系统地掌握数学知识和解题技巧,提高解题能力和应试能力,为在新高考中取得优异成绩打下坚实的基础.

最后,祝愿广大考生在新高考中取得优异成绩,实现自己的人生梦想!

张 君

2025年3月于成都



目 录

第 1 章	基本不等式	1
第 2 章	函数	5
2.1	函数的奇偶性	5
2.2	函数的单调性	9
2.3	函数的对称性	12
2.4	抽象函数：原函数与导函数	16
2.5	抽象函数：函数方程	19
2.6	抽象函数：函数方程组	23
第 3 章	三角函数	27
3.1	函数图像的交点个数问题	27
3.2	求三角函数的解析式	30
3.3	求参数 ω 的取值范围	36
3.4	简单的三角恒等变换	41
3.5	正弦定理与余弦定理的简单应用	45
3.6	图形问题	48
第 4 章	平面向量与复数	52
4.1	向量的线性运算	52
4.2	向量的数量积	55
4.3	三角形的四心	58
4.4	投影向量	61
4.5	复数的几何意义	64
4.6	复数的模与共轭复数	66
第 5 章	导数	70
5.1	导数的几何意义	70
5.2	函数的单调性	72
5.3	函数的极值	75
5.4	函数的最值	79
5.5	函数图像的判断	81
5.6	公切线问题	85
5.7	构造(指数、对数)函数比较大小	88

5.8	构造(三角)函数比较大小	90
第6章	数列	94
6.1	等差、等比数列的判定	94
6.2	等差、等比数列的简单计算	98
6.3	数列的公共项问题	101
6.4	数列的求和问题	103
6.5	周期数列	108
第7章	立体几何	113
7.1	体积与表面积的计算	113
7.2	外接球问题	116
7.3	空间中两直线的位置关系	121
7.4	线面角问题	125
7.5	立体几何中的最值问题	130
7.6	轨迹长度问题	134
第8章	直线与圆	139
8.1	圆的方程	139
8.2	直线与圆相交	142
8.3	圆的切线问题	144
8.4	圆的公切线问题	148
8.5	圆的切点弦问题	151
8.6	圆的最值问题	153
第9章	圆锥曲线	159
9.1	圆锥曲线的方程	159
9.2	动点的轨迹方程	161
9.3	焦点三角形	165
9.4	离心率	169
9.5	中点弦公式	173
9.6	椭圆(双曲线)的第三定义	177
第10章	计数原理	181
10.1	二项式定理	181
10.2	排列与组合的简单应用	184
第11章	概率	188
11.1	简单的概率问题	188
11.2	摸球模型的概率问题	191
11.3	比赛模型的概率问题	195
11.4	复杂情境的概率问题	199
11.5	独立性的判断	202

11.6 正态分布	205
11.7 条件概率	208
11.8 全概率公式	211
第 12 章 统计	215
12.1 数字特征	215
12.2 统计图表问题	220
12.3 回归方程	224
第 13 章 新定义、新情境与数学建模	228
13.1 新定义题：信息熵	228
13.2 三角高程测量法	233
13.3 数学建模	236
通关测试参考答案	240

清华大学出版社

5. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知 $\sin A + \sin C = p \sin B$ ($p \in \mathbf{R}$)且 $ac = \frac{1}{4}b^2$.若角 B 为锐角,则 p 的取值范围为_____.

3.6 图形问题

1. 经典考题

(2023年全国甲卷理科)在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 2$, $BC = \sqrt{6}$, $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D ,则 $AD =$ _____.

2. 试题分析

试题题干部分是三角形的两边和一角,目标问题是角平分线的长,简洁清晰.考查正弦定理和余弦定理等解三角形的基本知识和方法,考查直观想象能力、逻辑推理能力和运算求解能力.解题的关键是灵活应用正弦定理、余弦定理、等面积法等,注意观察三角形中的边与角的关系及其特殊性.

3. 一题多解

解法 1 设 $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理得

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin \angle BAC} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin \angle BAC}{a} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $c < a$,所以 $C < A = 60^\circ$,故 $C = 45^\circ$,从而 $B = 75^\circ$.

又因为 $\angle BAD = 30^\circ$,所以 $\angle BDA = 75^\circ = B$,即 $\triangle ABD$ 是等腰三角形,故 $AD = AB = 2$.

解法 2 如图 3.14 所示,设 $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得

$$2^2 + b^2 - 2 \times 2b \cos 60^\circ = 6.$$

因为 $b > 0$,解得 $b = 1 + \sqrt{3}$.由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$,得

$$\frac{1}{2} \times 2 \times b \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times AD \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times b \times AD \sin 30^\circ,$$

解得

$$AD = \frac{\sqrt{3}b}{1 + \frac{b}{2}} = \frac{2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} = 2.$$

解法 3 如图 3.15 所示,过 D 作 $DE \perp AC$,交 AC 于点 E .

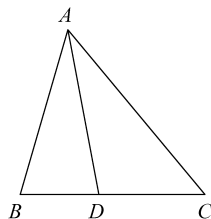


图 3.14

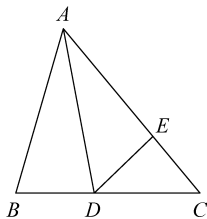


图 3.15

由题意知 $\angle DAE = 30^\circ$,不妨设 $AD = 2x$,则 $DE = x$, $AE = \sqrt{3}x$.

设 $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理得

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin \angle BAC} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin \angle BAC}{a} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $c < a$,所以 $C < A = 60^\circ$,故 $C = 45^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中, $CE = DE = x$,故 $AC = \sqrt{3}x + x$.

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得 $2^2 + b^2 - 2 \times 2b \cos 60^\circ = 6$. 因为 $b > 0$,解得 $b = 1 + \sqrt{3}$,即 $\sqrt{3}x + x = b = 1 + \sqrt{3}$,所以 $x = 1$,即 $AD = 2$.

4. 知识提炼

1. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径. 其功能主要是进行边角转化.

2. 边角转化

边化角: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

角化边: $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$.

3. 余弦定理及其推论、变形

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

余弦定理的推论

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

余弦定理的变形

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos B), \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \geq 2ac - 2ac \cos B.$$

4. 射影定理

在 $\triangle ABC$ 中,有

$$a = b \cos C + c \cos B, \quad b = c \cos A + a \cos C, \quad c = a \cos B + b \cos A.$$

5. 三角形的面积公式

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ 其中 } p = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \text{ 其中 } R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径};$$

$$S = \frac{r}{2}(a+b+c), \text{ 其中 } r \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 内切圆的半径}.$$

6. 常用结论

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,常用的结论有:

(1) $A+B+C=\pi$;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中,大边对大角,大角对大边,比如 $a > b \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \sin A > \sin B$.

(3) 在斜 $\triangle ABC$ 中, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

(4) 若 $a^2 + b^2 < c^2$,则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形;若 $a^2 + b^2 > c^2$,则 C 为锐角,若此时 c 为最大边,则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

5. 方法提炼

解三角形常用到的方法有:

利用正弦定理进行边角转化;利用余弦定理求边或角;利用面积公式或者等面积法;利用射影定理;利用角平分线定理;建立直角坐标系,利用坐标法或者向量法.

6. 回归课标

借助向量运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理、正弦定理.

7. 考题溯源

2019年人教版B版《数学 必修第四册》第20页习题7:

已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,且 $AC=2, AB=3, A=60^\circ$,求 AD 的长.

解析 因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$,所以

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times AD \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 3 \times AD \times \sin 30^\circ,$$

$$\text{即 } \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}AD + \frac{3}{4}AD, \text{ 解得 } AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

对比高考题可见,高考题与溯源题在利用等面积法求解时如出一辙.同时高考试题对课本上的试题进行了特殊化的处理(将 $AB=3$ 特殊化处理为 $BC=\sqrt{6}$),使得解法更多样化,让更多的学生能够从不同角度解决问题.

8. 通关测试

1. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $c+b=2a\cos B$,则().

A. $A=B$

B. $A=2B$

C. $A=3B$

D. $A=4B$

2. (2025 年新高考 I 卷)已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$,若 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$,
 $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$,则().

A. $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$

B. $AB = \sqrt{2}$

C. $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $AC^2 + BC^2 = 3$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, BC=\sqrt{6}$,且 BC 边上的高 $AH = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,则 $AC =$ _____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=1+\sqrt{3}, B=75^\circ$,则角平分线 $AD =$ _____.

5. 如图 3.16 所示,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=1, AC=2, \angle BAC=60^\circ$,
 BC, AC 边上的两条中线 AM, BN 相交于点 P ,则 $\angle MPN$ 的余弦值为_____.

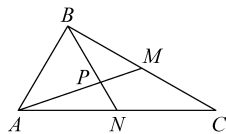


图 3.16

6. 设函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - ax$, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 则 a 的取值范围为_____.

5.3 函数的极值

1. 经典考题

(2023 年新高考 II 卷 · 多选题) 若 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a \neq 0$) 既有极大值也有极小值, 则 ().

A. $bc > 0$ B. $ab > 0$ C. $b^2 + 8ac > 0$ D. $ac < 0$

2. 试题分析

试题巧妙地将函数的极值问题、一元二次方程根的分布与韦达定理结合起来, 具有一定的综合性. 考查了考生的逻辑思维能力, 化归与转化的能力, 以及综合运用函数、导数、不等式解决数学问题的能力. 解题的关键是利用转化思想, 通过求导将函数 $f(x)$ 极值转化为其导函数的零点问题来解决, 巧妙化解问题难度. 在对函数求导后, 提取导函数有效部分讨论其给定范围下的零点问题, 讨论过程中做到所有情况不重不漏.

3. 一题多解

解法 1 借助含参二次函数的图像特点来讨论零点问题.

由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 求导可得

$$f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}.$$

因为函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个异号零点且函数在两个零点左右符号相反. 又因为 $a \neq 0$, 所以方程 $ax^2 - bx - 2c = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的实根 x_1, x_2 . 结合函数图像可知

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ \frac{b}{2a} > 0, \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + 8ac > 0, \\ ab > 0, \\ ac < 0. \end{cases}$$

故选 BCD.

解法 2 参变分离转化为直线与曲线的交点个数问题.

同解法 1 知方程 $ax^2 - bx - 2c = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根, 即方程 $b = ax - \frac{2c}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等的实根, 则问题等价于直线 $y_1 = b$ 与曲线 $y_2 = ax - \frac{2c}{x} (x > 0)$ 有两个交点.

$$y_2 = ax - \frac{2c}{x} = a\left(x - \frac{2c}{ax}\right) \quad (x > 0).$$

① 当 $\frac{2c}{a} \geq 0$ 时, $y_2 = a\left(x - \frac{2c}{ax}\right)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调, 显然不满足与直线 $y_1 = b$ 有两个不同交点的条件.

② 当 $\frac{2c}{a} < 0$ 时, $y_2 = a\left(x - \frac{2c}{ax}\right)$ 满足对勾函数的特征.

若 $a > 0, c < 0$, 易知当 $x = \sqrt{-\frac{2c}{a}}$ 时 y_2 取得最小值 $2\sqrt{-2ac}$, 因此 $y_1 = b$ 应满足 $b > 2\sqrt{-2ac} > 0$, 解得 $b^2 + 8ac > 0$.

若 $a < 0, c > 0$, 易知当 $x = \sqrt{-\frac{2c}{a}}$ 时 y_2 取得最大值 $-2\sqrt{-2ac}$, 则 $b < -2\sqrt{-2ac} < 0$, 解得 $b^2 + 8ac > 0$.

综上, 当 $a > 0, c < 0$ 时, 有 $b > 0, b^2 + 8ac > 0$; 当 $a < 0, c > 0$ 时, 有 $b < 0, b^2 + 8ac > 0$.

故选 BCD.

解法 3 参变分离转化为二次函数与一次函数交点问题.

同解法 1 知方程 $ax^2 - bx - 2c = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不等实根, 即方程 $x^2 = \frac{b}{a}x + \frac{2c}{a}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根.

记 $y_1 = x^2, y_2 = \frac{b}{a}x + \frac{2c}{a} (x > 0)$, 则问题等价于 y_1, y_2 的图像在 $(0, +\infty)$ 上有两个交点.

设与直线 $y_2 = \frac{b}{a}x + \frac{2c}{a}$ 平行且与 $y_1 = x^2$ 相切的直线切点为 (x_0, y_0) , 切线斜率 $k = y_1'|_{x=x_0} = 2x_0 = \frac{b}{a}$. 将 $x_0 = \frac{b}{2a}$ 代入 $y_1 = x^2$ 得 $y_0 = \frac{b^2}{4a^2}$, 因此平行于 $y_2 = \frac{b}{a}x + \frac{2c}{a}$ 且与 $y_1 = x^2$ 相切的切线方程为 $y - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{2a}\right)$, 即 $y = \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{4a^2}$.

若 $\frac{b}{a} > 0$, 则 $-\frac{b^2}{4a^2} < \frac{2c}{a} < 0$, 解得 $b^2 + 8ac > 0$.

若 $\frac{b}{a} \leq 0$, 结合图像易知不满足条件, 故舍去.

综上, 满足题设条件的关系为 $ab > 0, ac < 0, b^2 + 8ac > 0$. 故选 BCD.

4. 知识提炼

二次函数零点的分布讨论

已知 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 若 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点且 $x_1 < x_2$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 的零点满足 $x_1 < x_2 < k$, 则有 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ -\frac{b}{2a} < k, \text{成立}; \\ af(k) > 0 \end{cases}$
- (2) 若函数 $f(x)$ 的零点满足 $x_1 < k < x_2$, 则有 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ af(k) < 0 \end{cases}$ 成立;
- (3) 若函数 $f(x)$ 的零点满足 $k < x_1 < x_2$, 则有 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ -\frac{b}{2a} > k, \text{成立}. \\ af(k) > 0 \end{cases}$

5. 方法提炼

函数零点个数判断的方法总结如下:

定义法 令函数 $f(x) = 0$, 直接求满足条件的解.

图像法 画出函数 $y = f(x)$ 的图像, 寻找图像与 x 轴交点的个数.

定理法 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是一条连续不断的曲线, 且有 $f(a)f(b) < 0$, 则可判断函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上至少有一个零点. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是单调函数, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内存在唯一的零点. (函数零点存在定理及其推论)

转化法 将函数 $y = f(x)$ 转化为两个常见函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 相等的关系, 并绘出两个函数的图像, 通过两个函数图像的交点个数来判断原函数 $f(x)$ 的零点个数. 题设中含参数较多时, 更倾向于利用参变分离的方法将原函数转化为一个常值函数与一个含参函数来讨论.

整体来说, 函数极值与函数零点问题有着密不可分的联系. 讨论函数极值即讨论其导函数的零点, 因此在高考中将这两个知识点结合在一起考查是热点. 关于函数极值以其为背景的考法有着丰富的形式. 常会涉及多类函数极值问题的讨论, 如指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、二次函数、三次函数及分段函数, 考查其各种组合形式下的极值问题或函数关系式中的参数范围问题.

6. 回归课标

能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则, 求简单函数的导数. 能够借助函数的图像, 了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件. 能够利用导数求某些函数的极大值、极小值.

7. 考题溯源

1. 2019 年人教版 A 版《数学 必修第一册》第 155 页第 7 题:

设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0, b, c \in \mathbf{R}$), 且 $f(1) = -\frac{a}{2}$, 求证: 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内至少有一个零点.

2. 2019 年人教版 A 版《数学 选择性必修第二册》第 104 页第 9 题:

已知函数 $f(x) = x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值, 求 c 的值.

8. 通关测试

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 8ax + 1$ 在 $(-3, 0)$ 上有极大值, 无极小值, 则 a 的取值范围是().

- A. $(0, \frac{9}{2})$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, -3)$ D. $(-3, \frac{9}{2})$

2. 若函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - bx$ 有两个极值点, 则().

- A. $a < e^{-b}$ B. $e^{-b} > 0 > a$ C. $b < e^a$ D. $e^a > 0 > b$

3. (多选题) 如图 5.1 所示是 $y=f(x)$ 的导数 $y=f'(x)$ 的图像, 下列结论中正确的有().

- A. $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-1, 2), (4, +\infty)$
 B. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点
 C. $f(x)$ 在区间 $(2, 4)$ 上是减函数, 在区间 $(-1, 2)$ 上是增函数
 D. $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点

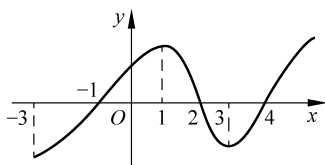


图 5.1

4. (2025 年新高考 II 卷) 若 $x=2$ 是函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点, 则 $f(0) =$ _____.

5. (2025 年新高考 II 卷 · 多选题) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则().

- A. $f(0) = 0$ B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$

C. $f(x) \geq 2$ 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$ D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

6. 已知 $a > 0$, 且 $x = 0$ 是函数 $f(x) = x^2 \ln(x + a)$ 的极大值点, 则 a 的取值范围为_____.

5.4 函数的最值

1. 经典考题

(2022 年全国甲卷理科) 当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 , 则 $f'(2) = (\quad)$.

A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2. 试题分析

该试题是一道关于函数最值的基础题, 考查导数的应用, 以及函数最值与极值的关系.

3. 试题解析

由题意知 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$, 又 $\begin{cases} f(1) = -2, \\ f'(1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b = -2, \\ a - b = 0, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} b = -2, \\ a = -2, \end{cases}$ 得 $f'(x) = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x^2}$, 所以 $f'(2) = \frac{-2}{2} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

4. 知识提炼

1. 函数最值的概念

前提	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足	
条件	对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(x) \leq M$;	对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(x) \geq M$;
	存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$	存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$
结论	M 为最大值	M 为最小值

6.1 等差、等比数列的判定

1. 经典考题

(2023 年新高考 I 卷) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则().

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

2. 试题分析

试题以等差数列的通项公式、前 n 项和公式为情境, 考查等差数列的前 n 项和及等差数列的判定. 判定一个数列是否为等差数列的方法有: 定义法、通项公式法、等差中项法. 用 a_1 和 d 来表示 a_n 和 S_n , 然后再选择方法进行判断.

3. 一题多解

解法 1 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其首项为 a_1 , 公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 所以 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$, 得 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$, 因此 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则甲是乙的充分条件.

反之, 若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{nS_{n+1} - (n+1)S_n}{n(n+1)} = \frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)}$ 为常数, 设为 D ,

即 $\frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)} = D$, 则

$$S_n = na_{n+1} - n(n+1)D, S_{n-1} = (n-1)a_n - n(n-1)D \quad (n \geq 2),$$

两式相减得 $a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - 2nD = n(a_{n+1} - a_n) + a_n - 2nD$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2D$, 对 $n=1$ 也成立, 因此 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则甲是乙的必要条件.

综上, 甲是乙的充要条件, 故选 C.

解法 2 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其首项为 a_1 , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 所以 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$, 故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 甲是乙的充分条件.

反之, 若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 设 $\frac{S_n}{n} = An + B$, 即

$$S_n = An^2 + Bn, S_{n-1} = A(n-1)^2 + B(n-1) \quad (n \geq 2).$$

两式相减得 $a_n = 2An + B - A$, 对 $n=1$ 也成立, 故 $\{a_n\}$ 为等差数列, 甲是乙的必要条件.

综上, 甲是乙的充要条件, 故选 C.

解法 3 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 则 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 所以 $\frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}$, 于是 $\frac{S_{n+2}}{n+2} + \frac{S_n}{n} = \frac{2a_1 + a_{n+2} + a_n}{2} = \frac{2(a_1 + a_{n+1})}{2} = \frac{2S_{n+1}}{n+1}$, 因此 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 甲是乙的充分条件.

下同解法 2.

4. 知识提炼

研究数列的性质, 通常可以从递推关系、通项公式、前 n 项和公式、通项与前 n 项和关系、函数形式等角度出发. 思路 1 和思路 3 从数列递推关系出发, 思路 2 从等差数列的函数形式出发, 即形如 $pn+q$ 的数列为等差数列. 从这些角度可以得到等差(等比)数列的不同性质.

我们知道, 等差数列的前 n 项和公式有两个, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 和 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$. 由解法 1 可得:

性质 1 $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列.

下面我们来证明:

性质 2 $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Leftrightarrow \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列.

证明 由上文可知, 我们只需证 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow \{a_n\}$ 是等差数列.

由 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 得 $2S_n = n(a_1 + a_n)$, 从而 $2S_{n+1} = (n+1)(a_1 + a_{n+1})$.

两式相减得 $na_n = a_1 + (n-1)a_{n+1}$, 从而 $(n+1)a_{n+1} = a_1 + na_{n+2}$.

两式相减得 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

总结 $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow a_n = pn + q \Leftrightarrow S_n = An^2 + Bn \Leftrightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Leftrightarrow \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列.

以上性质可类比到等比数列.

$\{a_n\}$ 是等比数列 ($q \neq 1$) $\Leftrightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$ ($q \neq 1$) $\Leftrightarrow a_n = cq^n$ ($c \neq 0, q \neq 1$).

当公比 $q \neq 1$ 时等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式有两个, 即 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = kq^n - k$ 和 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} = s + ta_n$. 经过探究, 得到如下性质.

性质 3 $\{a_n\}$ 为等比数列 ($q \neq 1$) $\Leftrightarrow S_n = kq^n - k$ ($k \neq 0, q \neq 1$) $\Leftrightarrow$ 存在非零常数 k , 使得 $\{S_n + k\}$ 为等比数列.

性质 4 $\{a_n\}$ 是等比数列 ($q \neq 1$) $\Leftrightarrow S_n = s + ta_n$ ($s \neq 0, t \neq 0, 1$).

总结 性质 3 从等比数列前 n 项和的特定函数形式出发, 性质 4 从等比数列通项与前 n 项和关系形式出发研究等比数列.

5. 方法提炼

1. 判定或者证明一个数列为等差数列的方法

方法 1: 定义法, $a_{n+1} - a_n = d$;

方法 2: 通项公式法, $a_n = pn + q$;

方法 3: 等差中项法, $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$;

方法 4: 前 n 项和公式, $S_n = An^2 + Bn$ 或 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列或 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

2. 判定或者证明一个数列为等比数列的方程

方法 1: 定义法, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($q \neq 0$);

方法 2: 通项公式法, $a_n = cq^n$ ($q \neq 0$);

方法 3: 等比中项法, $a_{n+2}a_n = a_{n+1}^2$ ($a_n \neq 0$);

方法 4: 前 n 项和公式, $S_n = kq^n - k$ ($k \neq 0, q \neq 1$) 或 $S_n = s + ta_n$ ($s \neq 0, t \neq 0, 1$).

6. 回归课标

探索并掌握等差数列的前 n 项和公式, 理解等差数列的通项公式与前 n 项和公式的关系. 体会等差数列与一元一次函数的关系.

7. 考题溯源

2019 年人教版 A 版《数学 选择性必修第二册》第 25 页第 7 题:

已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 证明 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列;

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4=12, S_8=40$, 求 T_n .

分析 第(1)问的结论就说明了甲是乙的充分条件. 第(2)问是求等差数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和

T_n , 只需根据题意求出 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的首项和公差即可, 答案是 $T_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{5}{4}n$.

8. 通关测试

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n + k$, 则“ $k \neq 0$ ”是“ $\{a_n\}$ 为等比数列”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 定义: 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它前一项的和都等于同一个常数, 那么这个数列就叫作等和数列, 这个常数叫作等和数列的公和. 设甲: 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}^2 - a_n^2 = 4a_{n+1} - 4$; 乙: 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列或公和为 2 的等和数列, 则甲是乙的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. (多选题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, 若 $a_1 = a_2 \neq 0$, 则().

A. $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列

B. $\{a_{n+2} - a_n\}$ 是等比数列

C. $\{S_{n+1} - 2S_n\}$ 是等差数列

D. $\{a_{2n+1} - S_{2n}\}$ 是等差数列

4. (多选题) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1=1, a_{n+1}=3S_n, n \in \mathbb{N}^*$, 则().

A. $S_2=4$

B. $a_6=16a_4$

C. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

D. 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列

5. 已知等差数列满足 $a_2 + a_4 + 2a_7 = 12$, 则 $2a_9 - a_{13}$ 的值为_____.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 3^n + m$. 若 $m = 2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____; 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $m =$ _____.

6.2 等差、等比数列的简单计算

1. 经典考题

(2023 年全国乙卷理科) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_2 a_4 a_5 = a_3 a_6$, $a_9 a_{10} = -8$, 则 $a_7 =$ _____.

2. 试题分析

试题主要考查了等比数列的定义、等比数列的通项公式及相关性质. 考查等比数列的重点内容及基本思想, 考查考生运算能力、逻辑推理能力.

3. 一题多解

解法 1 设 $\{a_n\}$ 公比为 $q (q \neq 0)$, 则 $a_2 a_4 a_5 = a_1 q \cdot a_1 q^3 \cdot a_1 q^4$, $a_3 a_6 = a_1 q^2 \cdot a_1 q^5$, 显然 $a_n \neq 0$. 由 $a_2 a_4 a_5 = a_3 a_6$ 可得 $a_1 q \cdot a_1 q^3 \cdot a_1 q^4 = a_1 q^2 \cdot a_1 q^5$, 则 $a_1 q = 1$. 又 $a_9 a_{10} = a_1 q^8 \cdot a_1 q^9 = (a_1 q)^2 \cdot q^{15} = q^{15} = (q^5)^3 = -8$, 则 $q^5 = -2$, 故 $a_7 = a_1 q^6 = a_1 q \cdot q^5 = -2$.

解法 2 因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $a_4 a_5 = a_3 a_6$, 又 $a_2 a_4 a_5 = a_3 a_6$, 则 $a_2 = 1$. 又 $a_9 a_{10} = a_2 q^7 \cdot a_2 q^8 = q^{15} = (q^5)^3 = -8$. 故 $a_7 = a_1 q^6 = a_1 q \cdot q^5 = -2$.

解法 3 利用等比数列性质推广:

$\{a_n\}$ 为等比数列 $\Leftrightarrow a_{p_1} a_{p_2} \cdots a_{p_k} = a_{s_1} a_{s_2} \cdots a_{s_k}$ (其中 $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$).

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, 又 $2 + 4 + 5 + 9 + 10 = 3 + 6 + 7 + 7 + 7$, 所以 $a_2 a_4 a_5 a_9 a_{10} = a_3 a_6 a_7 a_7 a_7$, 故 $(a_7)^3 = -8$, 即 $a_7 = -2$.

4. 知识提炼

1. 等差数列

$\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow a_n = pn + q$,

5. $p \in \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$ 【解析】 $\sin A + \sin C = p \sin B$, 即 $a + c = pb$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 又 B 是锐角, 则 $\cos B \in (0, 1)$, 即 $0 < \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < 1$, 则 $0 < \frac{(a+c)^2 - b^2 - 2ac}{2ac} < 1$, 即 $0 < \frac{p^2 b^2 - b^2 - \frac{2}{4} b^2}{2 \cdot \frac{1}{4} b^2} < 1$, 整理得 $0 < p^2 - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, 故 $\frac{3}{2} < p^2 < 2$, 又 $a + b = pb$, 则 $p > 0$, 则 $p \in \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

3.6 图形问题

1. B 【解析】 因为 $c + b = 2a \cos B$, 所以 $\sin C + \sin B = 2 \sin A \cos B$. 因为 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 所以 $\sin B = \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A - B)$, 则 $B - (A - B) = 2k\pi$, 或 $B + (A - B) = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$, 又 $A \in (0, \pi), B \in (0, \pi)$, 则 $B = A - B$, 所以 $A = 2B$.
2. ABC 【解析】 由 $\cos 2A + \cos 2B + 2 \sin C = 2$ 可得 $1 - 2 \sin^2 A + 1 - 2 \sin^2 B + 2 \sin C = 2$, 则 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin C$, A 正确. 因为 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin C$, 又 $a \sin A + b \sin B = c = a \cos B + b \cos A$ (射影定理), 则 $a \sin A - b \cos A = a \cos B - b \sin B = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - b \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$, 令 $g(x) = a \sin x - b \cos x$, 则 $g(A) = g\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$, 又易知 $g(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4} > 0$, 则 $A, B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2} - B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 又 $g(A) = g\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$, 则 $A = \frac{\pi}{2} - B$, 即 $A + B = \frac{\pi}{2}$, 则 $C = \frac{\pi}{2}$. 因为 $\cos A \cos B \sin C = \sin A \sin B \sin C = \sin A \sin B = \frac{1}{4}$, 又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \times 2R \sin A \cdot 2R \sin B = 2R^2 \sin A \sin B = \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{4}$, 则 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 于是 $AB = c = 2R \sin C = 2R = \sqrt{2}$, B 正确. $AC^2 + BC^2 = AB^2 = 2$, D 错误. 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{4}$, 则 $ab = \frac{1}{2}$, 又 $a^2 + b^2 = 2$, 故 $a + b = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{3}$, 所以 $\sin A + \sin B = \frac{a+b}{2R} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, C 正确.

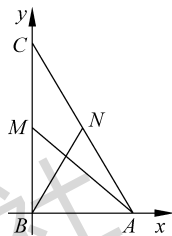
3. $1 + \sqrt{3}$ 【解析】 由 $\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 得 $\cos B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, 由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B =$

$4 + 2\sqrt{3}$, 故 $AC = 1 + \sqrt{3}$.

4. 2 【解析】 由正弦定理得 $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2}{\sin C}$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $C = 45^\circ, \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\angle ADB = 75^\circ$, 即 $\triangle ABD$ 是等腰三角形, 故 $AD = AB = 2$.

5. $\frac{\sqrt{7}}{14}$ 【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$, 即 $BC = \sqrt{3}$, 因此满足 $BC^2 + AB^2 = AC^2$, 可得 $\triangle ABC$ 是以 $\angle ABC = 90^\circ$ 的直角三角形.

以 B 为坐标原点, BA, BC 分别为 x 轴、 y 轴建立坐标系.

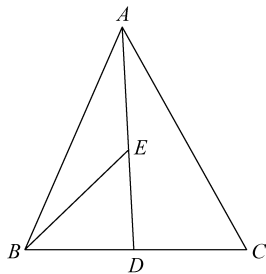


$A(1, 0), B(0, 0), C(0, \sqrt{3}), M\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{AM} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 易知 $\angle MPN$ 即为向量 $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ 的夹角, 所以 $\cos \angle MPN = \cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN} \rangle = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{BN}|} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$.

第4章 平面向量与复数

4.1 向量的线性运算

1. D 【解析】 因为 M 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC, BD 的交点, 所以 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OD}$, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$.
2. A 【解析】 如图所示, 由题可得 $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.



可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f'(x) = 6 \cdot \frac{x^3 e^x - 3x^2 e^x}{x^6} = \frac{6e^x(x-3)}{x^4}$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 3$, 可知 $f(x)$ 的单调增区间为 $(3, +\infty)$. 若满足“ $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 且 $b-a=1$ ”, 则 $\begin{cases} a \geq 3, \\ b = a+1, \end{cases}$ 例如 $a=3$, 则符合条件的区间 $[a, b]$ 可以为 $[3, 4]$.

6. $[1, +\infty)$ 【解析】由 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - ax$ 得 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - a$, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 所以 $f'(x) \leq 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立, 即 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - a \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- 设 $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 当 $x=0$ 时, $g(0)=0$. 当 $x>0$ 时, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$. 因为 $x>0$, 所以 $\frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} < 1$, 因此当 $x>0$ 时, $0 < g(x) < 1$.
- 当 $x<0$ 时, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$, 因为 $x<0$, 所以 $\frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} < 1$, 因此当 $x<0$ 时, $-1 < g(x) < 0$, 因此有 $-1 < g(x) < 1$, 于是有 $a \geq 1$.

5.3 函数的极值

1. A 【解析】由题意可得 $f'(x) = x^2 - 2ax - 8a$ 在 $(-3, 0)$ 上有下穿变号零点, 无上穿变号零点, 则 $\begin{cases} f'(-3) = 9 + 6a - 8a > 0, \\ f'(0) = -8a < 0, \end{cases}$ 即 $0 < a < \frac{9}{2}$.
2. A 【解析】 $f'(x) = \ln x + 1 - ax - b$, 因为 $f(x)$ 有两个极值点, 所以 $f'(x)$ 有两个变号的零点.
- 令 $g(x) = \ln x + 1 - ax - b$, 则 $g'(x) = \frac{1-ax}{x}$.
- 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 至多有一个零点, 不符合题意.
- 当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在区间

$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} + 1 - 1 - b = -\ln a - b$. 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 所以要使 $g(x)$ 有两个变号零点, 只需 $g(x)_{\max} > 0$, 即 $-\ln a - b > 0$, 即 $a < e^{-b}$.

3. ABC 【解析】根据图像知当 $x \in (-1, 2) \cup (4, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数在 $(-1, 2), (4, +\infty)$ 上单调递增; 当 $x \in (-3, -1) \cup (2, 4)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数在 $(-3, -1), (2, 4)$ 上单调递减, 故 AC 正确.
- 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极小值, $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 故 B 正确.
- 当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得极大值, $x = 2$ 不是 $f(x)$ 的极小值点, 故 D 错误.
4. -4 【解析】由题意有 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$, 所以 $f'(x) = (x-a)(x-1) + (x-1)(x-2) + (x-a)(x-2)$. 因为 2 是函数 $f(x)$ 极值点, 所以 $f'(2) = 2 - a = 0$, 得 $a = 2$. 当 $a = 2$ 时, $f'(x) = 2(x-2)(x-1) + (x-2)^2 = (x-2)(3x-4)$. 当 $x \in (-\infty, \frac{4}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\frac{4}{3}, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $x = 2$ 是函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极小值点, 符合题意, 故 $f(0) = -1 \times (-2) \times (-a) = -2a = -4$.
5. ABD 【解析】因为 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上奇函数, 则 $f(0) = 0$, 故 A 正确.
- 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $f(x) = -f(-x) = -[((-x)^2 - 3)e^{-x} + 2] = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$, 故 B 正确.
- 因为 $f(-1) = -(1-3)e^{-2} = 2(e^{-1}) > 2$, 故 C 错误.
- 当 $x < 0$ 时, $f(x) = (3-x^2)e^{-x} - 2$, 则 $f'(x) = -(3-x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 3 (舍去). 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减, 则 $x = -1$ 是 $f(x)$ 极大值点, 故 D 正确.
6. $(0, 1)$ 【解析】 $f'(x) = 2x \ln(x+a) + \frac{x^2}{x+a} = x \left[2 \ln(x+a) - \frac{a}{x+a} + 1 \right]$.
- 令 $g(x) = 2 \ln(x+a) - \frac{a}{x+a} + 1$, 易知 $g(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增, $g(0) = 2 \ln a$.
- 当 $a \in (0, 1)$ 时, $g(0) = 2 \ln a < 0$, 则存在 $m \in (0, +\infty)$, 使得 $g(m) = 0$. 当 $-a < x < 0$ 时, $f'(x) = xg(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $0 < x < m$ 时, $f'(x) = xg(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 故 $x = 0$ 是函数 $f(x) = x^2 \ln(x+a)$ 的极大值点.

当 $a \in (1, +\infty)$ 时, 存在 $m \in (-a, 0)$, 使得 $g(m) = 0$, 当 $m < x < 0$ 时, $f'(x) = xg(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $0 < x$ 时, $f'(x) = xg(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 不符合 $x=0$ 是函数 $f(x) = x^2 \ln(x+a)$ 的极大值点.

当 $a=1$ 时, $g(0)=0$, 故 $-a < x < 0$, $f'(x) > 0$, $0 < x$, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 不符合 $x=0$ 是函数 $f(x) = x^2 \ln(x+a)$ 的极大值点.

综上, a 的取值范围为 $(0, 1)$.

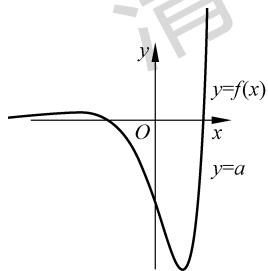
5.4 函数的最值

1. B 【解析】 因为最值在 $f(0)=b$, $f(1)=1+a+b$, $f(-\frac{a}{2})=b-\frac{a^2}{4}$ 中取, 所以最值之差一定与 b 无关.

2. D 【解析】 由题意知 $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x-1)(x+3)e^x$, 则当 $x < -3$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-3 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-3, 1)$ 上单调递减.

$f(x)$ 极大值 $= f(-3) = \frac{6}{e^3}$, $f(x)$ 极小值 $= f(1) = -2e$, 当 $x < -\sqrt{3}$ 或 $x > \sqrt{3}$ 时, $f(x) > 0$, 则当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $f(1)$ 也是最小值, $f(x)$ 无最大值.

作出 $y=f(x)$ 的图像和直线 $y=a$, 如图所示. 当 $a=1$ 或 $a > \frac{6}{e^3}$ 时, $f(x)=a$ 有一个根; 当 $0 < a < \frac{6}{e^3}$ 时, $f(x)=a$ 有三个根.



3. D 【解析】 由题意得 $F(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} 1 - (\frac{1}{2})^x, & x \geq 0, \\ 1 - 2^x, & x < 0, \end{cases}$ 即 $F(x) = 1 - (\frac{1}{2})^{|x|}$, 因为 $|x| \geq 0$, 则 $0 < (\frac{1}{2})^{|x|} \leq 1$, 有 $0 \leq 1 - (\frac{1}{2})^{|x|} < 1$, 故 $0 \leq F(x) < 1$, 则 $m \geq 1$.

4. ACD 【解析】 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$, 则 $f'(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. 由 $f'(x) = (x-2)(x+2) > 0$ 得 $x > 2$ 或 $x < -2$, 此时函数单调递增; 由 $f'(x) = (x-2)(x+2) < 0$ 得 $-2 < x < 2$, 此时函数单调递减, 故 C 正确.

当 $x = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(-2) = \frac{28}{3}$; 当 $x = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(2) = -\frac{4}{3}$, 故 A 正确.

当 $x \in [3, 4]$ 时, $f(x)$ 单调递增, 它的最大值为 $f(4) = \frac{4^3}{3} - 4 \times 4 + 4 = \frac{28}{3}$, 最小值为 $f(3) = \frac{3^3}{3} - 4 \times 3 + 4 = 1$, 故 B 错误. $f'(0) = -4$, $f(0) = 4$, 则它在点 $(0, 4)$ 处的切线方程为 $y = -4x + 4$, 故 D 正确.

5. 2 【解析】 函数 $f(x) = \left| \ln \frac{a}{x} - 2 \right| + \left| \frac{a}{x} - 1 \right|$, 令 $\frac{a}{x} = t > 0$, $g(t) = \left| \ln t - 2 \right| + |t - 1| = \begin{cases} 3 - t - \ln t, & 0 < t \leq 1, \\ 1 + t - \ln t, & 1 < t < e^2, \\ t + \ln t - 3, & t \geq e^2. \end{cases}$

当 $0 < t \leq 1$ 时, $g'(t) = -1 - \frac{1}{t} < 0$, 函数 $g(t)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减;

当 $1 < t < e^2$ 时, $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0$, 函数 $g(t)$ 在 $[1, e^2]$ 上单调递增;

当 $t \geq e^2$ 时, $g'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0$, 函数 $g(t)$ 在 $[e^2, +\infty)$ 上单调递增;

因此当 $t=1$ 时, $g(t)_{\min} = g(1) = 2$, 所以当 $x=a$ 时, $f(x)$ 取得最小值 2.

6. $\frac{1}{2}$ 【解析】 由题意可得 $2b \leq ax - \ln x$ 对一切 $x \in (0, +\infty)$

恒成立, 令 $f(x) = ax - \ln x$, 则 $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$.

当 $a < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无最小值, 不符合题意.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 有 $x > \frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 有 $0 < x < \frac{1}{a}$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递

增, 故 $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{a}) = a \cdot \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} = 1 + \ln a$, 即 $2b \leq 1 + \ln a$, 则 $\frac{b}{a} \leq \frac{1 + \ln a}{2a}$. 令 $g(x) = \frac{1 + \ln x}{2x}$, 则 $g'(x) =$

$\frac{\frac{1}{x} \cdot 2x - 2(1 + \ln x)}{4x^2} = \frac{-2 \ln x}{4x^2}$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) <$

0; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $g(x)_{\max} = g(1) = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{b}{a} \leq$

$\frac{1}{2}$, 当 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 满足题意, 即 $\frac{b}{a}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

5.8 构造(三角)函数比较大小

1. C 【解析】 设 $f(x) = x - \sin x, x \in [0, 1]$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 故 $f\left(\frac{1}{3}\right) > f(0) = 0$, 即 $\frac{1}{3} - \sin \frac{1}{3} > 0$, 所以 $a = \sin \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$. 因为 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3$, 所以 $2\ln \frac{3}{2} < 1 < 3\ln \frac{3}{2}$, 即 $\frac{1}{3} < b = \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$. 又 $c = 3^{-\frac{1}{2}} > 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, 则 $a < b < c$.

2. B 【解析】 因为 $f(x) = 2\sin x + \cos x - \sqrt{5}x$, 故 $f'(x) = 2\cos x - \sin x - \sqrt{5} = \sqrt{5} \cos(x + \varphi) - \sqrt{5} \leq 0$, 其中 $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 因此 $f(x) = 2\sin x + \cos x - \sqrt{5}x$ 为减函数. 因为 $0 < \lg 2 < 1, (-1)^0 = 1, \ln 3 > 1$, 故 $\lg 2 < (-1)^0 < \ln 3$, 所以 $f(\lg 2) > f((-1)^0) > f(\ln 3)$, 即 $a > c > b$.

3. D 【解析】 因为 $\tan x > x > \ln(1+x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 从而当 $x = 0.21$ 时, $a = \tan 0.21 > b = \ln 1.21$.

令 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}, x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$, 所以 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g(0.21) = \ln 1.21 - \frac{0.21}{1.21} > g(0) = 0$, 即 $b = \ln 1.21 > c = \frac{0.21}{1.21}$.

综上所述, $a = \tan 0.21 > b = \ln 1.21 > c = \frac{0.21}{1.21}$.

4. C 【解析】 令 $f(x) = e^x - 1 - \sin x$, 则 $f'(x) = e^x - \cos x$. 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, 则 $e^x - \cos x > 0$, 故 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 单调递增, 则 $f(0.1) > f(0)$, 即 $e^{0.1} - 1 - \sin 0.1 > 0$, 得 $e^{0.1} - 1 > \sin 0.1$, 即 $b > c$.

令 $g(x) = \ln(x+1) - \sin x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \cos x = \frac{1-(x+1)\cos x}{x+1} = \frac{1-x\cos x-\cos x}{x+1}$. 令 $h(x) = 1-x\cos x-\cos x$, 则 $h'(x) = (x+1)\sin x - \cos x$. 令 $\varphi(x) = (x+1)\sin x - \cos x$, 则 $\varphi'(x) = 2\sin x + (x+1)\cos x$. 当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时,

$\varphi'(x) > 0$, 则 $h'(x)$ 单调递增, 故 $h'(x) < h'\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$\left(\frac{\pi}{6} + 1\right)\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi+6(1-\sqrt{3})}{12} < 0$, 即 $h(x)$ 在 $x \in$

$(0, 0.1)$ 上单调递减, 有 $h(x) < h(0) = 0$, 则 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $x \in (0, 0.1)$ 上单调递减, 有 $g(0.1) < g(0) = 0$, 即 $\ln 1.1 - \sin 0.1 < 0$, 即 $c > a$.

综上所述, $b > c > a$.

5. B 【解析】 令 $f(x) = \frac{3}{2}x - \tan x$, 则 $f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} - \tan^2 x$, 当 $x \in (0, 0.01)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 0.01)$ 上单调递增, 故 $f(0.01) > f(0) = 0$, 所以 $0.015 > \tan 0.01$, 即 $c > a$.

令 $g(x) = x^2 + \cos x - 1, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $g'(x) = 2x - \sin x$,

令 $h(x) = 2x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $h'(x) = 2 - \cos x > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故 $h(x) > h(0) = 0$, 即

$g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故 $g(0.01) >$

$g(0) = 0$, 所以 $0.01^2 > 1 - \cos 0.01$, 故 $0.01 > \sqrt{1 - \cos 0.01}$.

令 $r(x) = \tan x - x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $r'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 =$

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} > 0$, 故 $r(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 有 $r(0.01) > r(0) =$

0 , 即 $\tan 0.01 > 0.01$, 故 $\tan 0.01 > 0.01 > \sqrt{1 - \cos 0.01}$, 即

$a > b$.

综上所述, $c > a > b$.

6. D 【解析】 因为 $e^x > 1+x (x \neq 0)$, 所以 $a = \sqrt{e} - 1 > \frac{1}{2}$. 因为 $\ln(1+x) < x (x > 0)$, 所以 $c = \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$. 因为 $\sin x <$

$x (x > 0)$, 所以 $b = \sin \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, 从而 $a > c, a > b$.

下面比较 b 和 c 的大小: 设 $f(x) = \ln(1+x) - \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{6}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \cos x = \frac{1-\cos x-x\cos x}{1+x}$. 设 $g(x) =$

$1-\cos x-x\cos x, 0 < x < \frac{\pi}{6}$, 则 $g'(x) = \sin x - (\cos x -$

$x\sin x) = (x+1)\sin x - \cos x$, 易知 $g'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调

递增, 则 $g'(x) < g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, 所以 $g(x)$

在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减, $g(x) < g(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0$ 在

$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上恒成立, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减, 又 $\frac{1}{2} \in$

$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(0) = 0$, 即 $\ln \frac{3}{2} < \sin \frac{1}{2}$, 则 $c < b$.

综上所述, $c < b < a$.

第6章 数列

6.1 等差、等比数列的判定

1. C 【解析】 $k \neq 0$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 2a_1 + k$, 所以 $a_1 = -k$;

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} + k$, 所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n +$

$k - (2a_{n-1} + k) = 2a_n - 2a_{n-1}$, 可得 $a_n = 2a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} =$

2, 可得 $\{a_n\}$ 是公比为 2、首项 $a_1 = -k$ 的等比数列. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 可得当 $n=1$ 时, $a_1 = 2a_1 + k$, 所以 $a_1 = -k \neq 0$, 即 $k \neq 0$, 则“ $k \neq 0$ ”是“ $\{a_n\}$ 为等比数列”的充要条件.

2. A 【解析】 对于甲: 由 $(a_{n+1} - 2)^2 = a_n^2$ 得 $(a_{n+1} + a_n - 2) \cdot (a_{n+1} - a_n - 2) = 0$, 即 $a_{n+1} + a_n = 2$ 或 $a_{n+1} - a_n = 2$, 则数列 $\{a_n\}$ 是公和为 2 的等和数列或公差为 2 的等差数列, 又因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = 1$ 或 $a_n = 2n - 1$.

对于乙: 当数列 $\{a_n\}$ 是公和为 2 的等和数列或公差为 2 的等差数列时, 通项未必为 $a_n = 1$ 或 $a_n = 2n - 1$, 如摆动数列 $-1, 3, -1, 3, -1, 3, \dots$ 和 $a_n = 2n + 3$ (其中 $a_1 = 5$), 所以甲是乙的充分不必要条件.

3. ABD 【解析】 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n)$, 且 $a_2 - 2a_1 = -a_1$, 所以 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是以 $-a_1$ 为首项、公比为 -1 的等比数列, 所以 A 正确.

$a_{n-3} - a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+2} - a_n)$, 且 $a_3 - a_1 = 2a_1$, 所以数列 $\{a_{n+2} - a_n\}$ 是以 $2a_1$ 、公比为 2 的等比数列, 所以 B 正确.

$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, 可得 $S_{n-2} - S_{n+1} = S_{n+1} - S_n + 2(S_n - S_{n-1})$ ($n \geq 2$), 即当 $n \geq 2$ 时, $S_{n+2} - 2S_{n+1} = S_n - 2S_{n-1}$, 又 $S_2 - 2S_1 = 0, S_3 - 2S_2 = a_1$, 所以 $\{S_{n+1} - 2S_n\}$ 的奇数项均为 0, 偶数项均为 a_1 , 则 $\{S_{n-1} - 2S_n\}$ 的奇数项为等差数列, 偶数项为等差数列, 所以 C 错误.

当 $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 时, $S_{2k+1} - 2S_{2k} = a_{2k+1} - S_{2k} = a_1$, 所以 $\{a_{2n+1} - S_{2n}\}$ 是每项均为 a_1 的常数列, 也是等差数列, 所以 D 正确.

4. ABD 【解析】 因为 $a_{n+1} = 3S_n$, 所以 $a_n = 3S_{n-1}$, $n \geq 2$. 当 $n \geq 2$ 时, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 3a_n$, 即 $a_{n+1} = 4a_n$, 因为 $a_2 = 3S_1 = 3$ 不适合上式, 故数列 $\{a_n\}$ 是从第二项开始的等比数列, 公比为 4, $a_2 = 3$, C 错误.

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$, A 正确.

$\frac{a_6}{a_4} = q^2 = 16$, B 正确.

因为 $a_{n+1} = 3S_n = S_{n+1} - S_n$, 所以 $S_{n+1} = 4S_n$, 即数列 $\{S_n\}$ 是以 1 为首项、以 4 为公比的等比数列, D 正确.

5. 3 【解析】 由题意可得 $a_2 + a_4 + 2a_7 = 2a_3 + 2a_7 = 4a_5 = 12$, 则 $a_5 = 3$, 所以 $2a_9 - a_{13} = a_5 + a_{13} - a_{13} = a_5 = 3$.

6. $\begin{cases} 5, & n=1, \\ 2 \cdot 3^{n-1}, & n \geq 2; \end{cases}$ -1 【解析】 因为 $m=2$, 所以 $S_n = 3^n + 2$.

当 $n=1$ 时, $S_1 = 3 + 2 = 5$, 即 $a_1 = 5$; 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 3^{n-1} + 2$, 所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n + 2) - (3^{n-1} + 2) = 2 \cdot$

3^{n-1} ($n \geq 2$).

检验: $a_1 = 5$ 不符合上式, 所以 $a_n = \begin{cases} 5, & n=1, \\ 2 \cdot 3^{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$

$S_n = 3^n + m$, 当 $n=1$ 时, 有 $S_1 = 3 + m$, 即 $a_1 = 3 + m$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 3^{n-1} + m$, $a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n + m) - (3^{n-1} + m) = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$), 所以 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} > 0$ ($n \geq$

2), $a_{n+1} = 2 \cdot 3^n$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ ($n \geq 2$). 当 $n \geq 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$

为等比数列. 又因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $a_1 = 3 + m$ 符合上式, 即 $3 + m = 2 \times 3^0$, 解得 $m = -1$.

6.2 等差、等比数列的简单计算

1. A 【解析】 因为 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 所以 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等比数列, 所以 $S_2 = 4, S_4 - S_2 = 6 - 4 = 2$, 则 $S_6 - S_4 = 1$, 故 $S_6 = 1 + S_4 = 1 + 6 = 7$.

2. A 【解析】 由题意知 $\begin{cases} S_4 = 4a_1 + \frac{d}{2} \times 4 \times 3 = 0, \\ a_5 = a_1 + 4d = 5, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a_1 = -3, \\ d = 2, \end{cases}$ 则 $a_n = 2n - 5$.

3. C 【解析】 设正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则

$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 15, \\ a_1q^4 = 3a_1q^2 + 4a_1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2, \end{cases}$ 则 $a_3 = a_1q^2 = 4$.

4. 4 【解析】 因为 $a_2 = 3a_1$, 所以 $a_1 + d = 3a_1$, 即 $2a_1 = d$, 所

以 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d}{5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d} = \frac{100a_1}{25a_1} = 4$.

5. ± 2 【解析】 解法 1 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4, S_8 = 68$, 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

当 $q=1$ 时, $S_4 = 4a_1 = 4$, 即 $a_1 = 1$, 则 $S_8 = 8a_1 = 8 \neq 68$, 显然不成立, 舍去.

当 $q \neq 1$ 时, 则 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 4, S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 68$,

两式相除得 $\frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{68}{4}$, 即 $\frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 17$, 则 $1+q^4 =$

17, 解得 $q = \pm 2$, 所以该等比数列公比为 ± 2 .

解法 2 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4, S_8 = 68$. 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 所以 $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4, S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1q^4 + a_2q^4 + a_3q^4 + a_4q^4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(1+q^4) = 68$, 所以 $4(1+q^4) = 68$, 则 $1+q^4 = 17$, 解得 $q = \pm 2$, 所以该等比数列公比为 ± 2 .

解法 3 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4, S_8 = 68$. 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $S_8 - S_4 = a_5 + a_6 +$