

第 00 章

Introduction

绪论

看到公式背后的几何之美



0.1 聊聊线性代数和《线性代数不难》

简单来说，线性代数是研究向量、矩阵及其线性变换关系的数学分支。

线性代数是现代科学和工程的数学语言。线性代数不仅是从单变量微积分过渡到多变量微积分的桥梁，更是从一元概率统计走向多元统计分析的核心工具。在机器学习、计算机视觉、自然语言处理、机器人控制、图像处理、量化金融、数据分析等前沿领域，线性代数几乎无处不在。

线性代数是一门本科阶段普遍开设的基础课程。笔者认为，大学本科教育的核心使命是培养专业人才，而不是“筛选”或“淘汰”学生；因此，高中时期那种以“死记硬背”“刷题”“分数”为导向的教学模式，已不再适用于高等教育。

因此，线性代数的教学不应成为一道人为设置的门槛，而应当成为帮助学生建立现代科学思维的重要起点。每一位大学毕业生，都应能将线性代数作为工具箱中游刃有余、得心应手的数学工具，在未来的学习、科研与工作中自如运用。

这也对教师教学、课程设计、教材编排提出了更高要求。线性代数的教学不应仅停留在符号堆砌和公式推导，更应结合图形直观、实际应用与编程计算工具，帮助学生理解向量空间、线性变换、矩阵运算背后的几何与结构。现代教学可以充分利用可视化、编程实践、建模案例，让学生“看见数学之美”“活学活用数学”，从而激发他们的学习兴趣与应用能力。

笔者认为现在的线性代数教学确实存在一些问题，具体来说：

- ◀ 忽视几何直觉。很少用二维/三维图像展示抽象概念，导致学生“看不懂也想不到”。比如，很多教材开篇就引入行列式，几乎不解释其几何直观含义。
- ◀ 重计算、轻理解。练习题偏向套路、技巧、难题怪题，忽视几何本质理解和建模能力的培养。很多教材“定义-定理-例题”模式过于机械，只关注“答题”，不关注“学懂”“会用”。

- ◀ 不注重理论联系实际。缺乏和实际问题、真实世界或其他学科的联系。多数教材极少提及线性代数在现实中的应用案例，比如数据分析、图像处理、机器学习、图论与网络等等。
- ◀ 教学脱离现代工具。需要结合Python编程、可视化、动画来教学。大部分教材满纸公式，不主动结合图形、Python编程、可视化工具来加深理解，构建应用场景。

《线性代数不难》试图解决这些问题：

- ◀ 系统性引入几何直觉。用大量图形、动画展示诸如向量、矩阵、矩阵乘法、线性变换、行列式、逆矩阵、线性方程、特征值分解、奇异值分解等概念背后的几何直觉，甚至试图让读者领略“数学之美”！
- ◀ 将重点从“解题”转向理解和应用。通过引入实际应用，比如主成分分析、图像压缩、最小二乘拟合等等，让读者真正看到数学工具的实际用途，真正做到“学有所用”。
- ◀ 合理设计知识结构。先从向量、矩阵入手，配齐矩阵乘法、行列式、逆矩阵、向量空间等核心工具之后，再深入线性方程组求解、线性变换、特征值分解、奇异值分解等高阶话题，其中穿插线性代数工具的应用案例。
- ◀ 边学数学，边学编程，边学可视化。将Python编程、Jupyter Notebook、图形化交互工具、大语言模型等融入教学，让学生在“写代码”中学懂数学，在“动手可视化”中建立模型思维。

0.2 本书结构

《线性代数不难》分上下两册。上册包括向量、矩阵、矩阵乘法、行列式、逆矩阵、向量空间、线性方程组等相对比较基础的话题；下册则会涉及高阶线性代数、矩阵论、数据分析机器学习话题，比如线性变换、特征值分解、奇异值分解、主成分分析、最小二乘拟合、瑞利商、矩阵范数、判别分析等等。

本书是《线性代数不难》的上册，一共有7章，下面简单介绍每章的核心内容。

向量

向量可以说是线性代数中最具几何直觉的概念，因此我们把向量相关话题放在了本书的第一章。这一章先是从代数角度介绍了向量，特别引出了RGB颜色作

为实例，这个例子将会贯穿本章始终。然后，我们把向量放在坐标系中，开始建立向量的几何直觉。接着，介绍向量的各种常见运算，比如加减、标量乘法、单位化、内积、投影、范数等等。这些话题的引出都和几何图形紧密相连。

矩阵

行向量、列向量都是特殊的矩阵。自然而然地，第2章我们开始介绍矩阵。先是介绍了矩阵的常见性质、形状、基本运算。请大家特别关注矩阵形状，因为很多线性代数运算都是以特殊矩阵形状为前提条件。矩阵转置很简单，但是也是大家常常犯错的话题之一，因此本章特地拿出一节讲解矩阵转置。然后，本章专门拿出三节初探矩阵乘法，我们首先关注的是矩阵乘法的规则，然后用四组例子解释矩阵乘法中蕴含的几何变换；有了几何变换这个视角，再来学习矩阵乘法性质就变得特别容易。

矩阵乘法

在线性代数体系中，矩阵乘法扮演极其核心的角色。因此，我们专门拿出一章讲解矩阵乘法。这一章关注矩阵乘法的不同视角，比如内积、外积、列向量线性组合、行向量线性组合。内积是理解矩阵乘法规则的最朴素的视角。外积视角将会在后续的谱分解、奇异值分解、主成分分析等话题中发挥重要作用。列向量、行向量线性组合视角实际上在铺垫向量空间、线性方程组、线性变换等话题。这一章最后又从分块矩阵乘法角度将内容进一步“升华”。

行列式

和很多上来就讲行列式的教材不同，本册把行列式放在相对靠后的位置。本书把行列式看作是计算逆矩阵、求解线性方程组等应用中的一个工具。但是，在讲解行列式时，本书则关注行列式的几何直觉。这一章的第一节先介绍了 2×2 方阵的行列式和平行四边形面积的关系；这一节我们将看到不同方阵类型对应的平行四边形。第二节进一步“升维”介绍了 3×3 方阵的行列式和平行六面体的关系。有了这些几何视角的铺垫，理解行列式性质就特别容易。这一章最后还介绍了用拉普拉斯展开求解行列式。

逆矩阵

几何视角让逆矩阵的理解变得特别直接！简单来说，逆矩阵就是完成几何操作的逆变换。矩阵乘法对应的几何操作存在逆操作，矩阵便可逆；否则，便不可逆。这一章就是按照这个思路安排的。我们先用缩放、旋转、剪切等几何变换介

绍了逆矩阵；然后，同样利用几何视角，探讨了逆矩阵性质。这章最后介绍了如何利用伴随矩阵法计算逆矩阵；同时，也回顾了拉普拉斯展开计算行列式。

向量空间

有了前文的向量、矩阵、矩阵乘法、行列式、逆矩阵等话题的铺垫，理解向量空间核心概念变得特别轻松。这一章还是用RGB颜色空间的例子。注意，RGB颜色空间显然不是向量空间，但是不妨碍我们用颜色丰富的RGB空间来讲解向量空间的各种概念。本章在介绍各种基底时，也给大家展示了各种平行四边形网格，这是本书的“传统技能”了。

线性方程组

同样和很多线性代数教材不一样，本书把线性方程组放在了最后。线性方程组被视作矩阵乘法、行列式、逆矩阵等线性代数概念的一个应用案例。本章还是用几何视角，先把二元一次方程看作是直线，探讨线性方程组解的特点。然后，再用矩阵乘法第三视角（列向量线性组合）进一步分析线性方程组。这一章最后介绍初等行变换求解线性方程组、逆矩阵，讲解过程也糅合各种几何视角。

下面，让我们正式开始《线性代数不难》之旅，让线性代数变得真的不难！