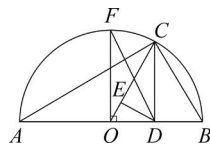


第3章 不等式

不等式是数学里面很重要的一块知识,跟各个模块都很契合进而形成各类不等式问题。不等式主要培养发散思维,不等式的思想是开放的、相对的,不同于等式的绝对。我们需要灵活掌握不等式的思想,从而灵活解决各类不等式问题。

基本不等式的几何证明:

在半圆中, $AD = a, BD = b$, 则 $OC = OF = \frac{a+b}{2}$, $AC \perp BC, CD \perp AB$,
 $OF \perp AB, DE \perp OC, CD = \sqrt{ab}, CE = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, FD = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, 由 $CE \leq CD \leq$

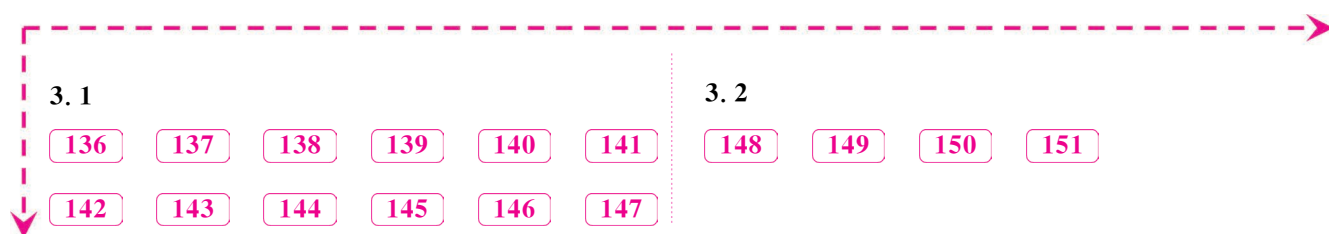


$OC = OF \leq FD$ 得 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ 。

刷题散点图

让我们用数学的思想来备战高考数学,如统计中的散点图可展示出数据的分布和聚合情况,甚至可以得到趋势线公式。大道至简,请在刷题后完成属于你的本章刷题散点图,直接用你刷题的黑笔在题号上标出即可,做对画√,做错画×。

完成后,根据题号的分布和聚合情况,合理安排你的二刷甚至三刷。



3.1 基本不等式



核心笔记

基本不等式是解决不等式问题的重要工具,既可以求解相关代数式的范围,也可以用于放缩,使用的核心在于弄清代数式之间的关联。

1. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号。

2. 若 $a, b \in \mathbf{R}^*$, 则 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号。

变式: $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号。

3. 重要结论: 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号。

【136】(2022·新高考全国二·12·) (多选题)

对任意 $x, y, x^2 + y^2 - xy = 1$, 则

()。

- A. $x + y \leqslant 1$ B. $x + y \geqslant -2$
C. $x^2 + y^2 \leqslant 2$ D. $x^2 + y^2 \geqslant 1$

【137】(2013·天津·14·) (多选题)

设 $a + b = 2, b > 0$, 则当 $a =$ _____ 时,

$\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 取得最小值。

【138】(2020·江苏·12·) (多选题)

已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 _____。

【139】(2017·天津·12·)

若 $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为_____。

【140】(2020·天津·14·)

已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____。

【141】(2010·四川·11·)

设 $a > b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是()。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【142】(2011·天津·12·)

已知 $\log_2 a + \log_2 b \geq 1$, 则 $3^a + 9^b$ 的最小值为_____。

【143】(2013·山东·理·12·)

设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值为()。

A. 0 B. 1 C. $\frac{9}{4}$ D. 3

【144】(2013·山东·文·12·)

设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时, $x + 2y - z$ 的最大值为()。

- A. 0 B. $\frac{9}{8}$ C. 2 D. $\frac{9}{4}$

【145】(2014·辽宁·理·16·)

对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 且使 $|2a + b|$ 最大时, $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$ 的最小值为_____。

【146】(2014·辽宁·文·16·)

对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + b^2 - c = 0$, 且使 $|2a + b|$ 最大时, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}$ 的最小值为_____。

【147】(2011·重庆·15·)

若实数 $2^a + 2^b = 2^{a+b}$, $2^a + 2^b + 2^c = 2^{a+b+c}$, 则 c 的最大值是_____。

3.2 不等式综合问题

核心笔记

不等式的综合问题对学生基础要求较高,既要掌握关于不等式的基础知识和各类其他知识,也要有敏锐的观察力和缜密的数学思维能力,要能从多个角度对问题进行剖析并寻求内部关联和转化。

【148】(2012·浙江·17·★★★★)

设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $x > 0$ 时, 均有 $[(a-1)x - 1] \cdot (x^2 - ax - 1) \geq 0$, 则 $a =$ _____。

【149】(2020·浙江·9·★★★★)

已知 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 对于任意 $x \geq 0$ 均有 $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$, 则 ()。

A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $b < 0$ D. $b > 0$

【150】(2015·浙江·14·★★★★)

若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $|2x + y - 2| + |6 - x - 3y|$ 的最小值是 _____。

【151】(2014·浙江·16·★★★★)

已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 则 a 的最大值为 _____。

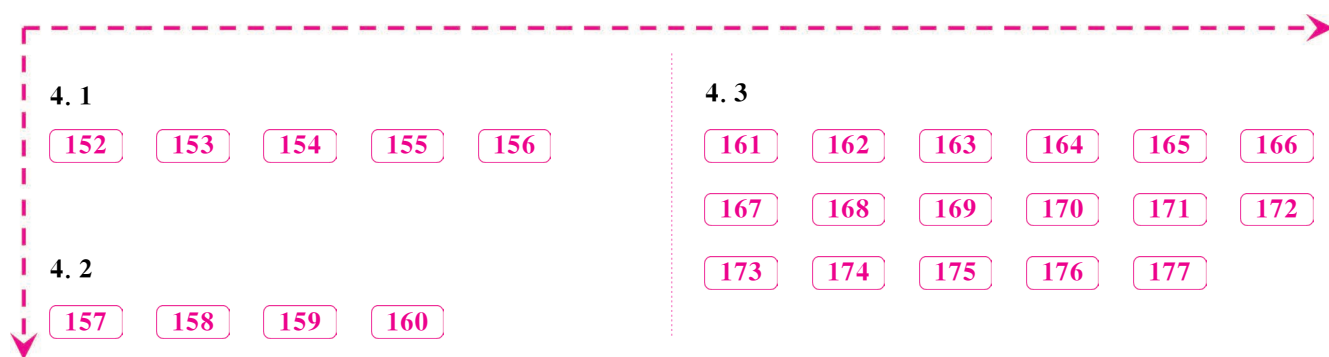
第 4 章 三角函数

三角函数是高中数学重要的内容之一,主要包含了三角函数的性质及其应用、三角恒等变换。这里需要同学们深刻掌握三角函数的性质并在解题中加以应用。而三角恒等变换需要同学们掌握各类公式及其变形和转换关联。三角函数也是一种函数,只不过是角度为自变量的,因而在具体解题中函数思想是适用的。

刷题散点图

让我们用数学的思想来备战高考数学,如统计中的散点图可展示出数据的分布和聚合情况,甚至可以得到趋势线公式。大道至简,请在刷题后完成属于你的本章刷题散点图,直接用你刷题的黑笔在题号上标出即可,做对画√,做错画×。

完成后,根据题号的分布和聚合情况,合理安排你的二刷甚至三刷。



4.1 恒等变换



核心笔记

要熟练掌握恒等变换,需要注意以下几个方面:

(1) 和差倍半辅助角以及降幂公式的基本应用;

(2) 角度统一: 利用公式使题目中出现的角统一;

(3) 角度配凑: 三角恒等变换中常见的方式, 利用已知角配凑要求的角, 方法主要包括加减和二倍角, 进而引入和差或诱导公式进行解决;

(4) 切化弦: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 弦化切: 同除以 $\cos\alpha$ 或 $\cos^2\alpha$;

(5) 正切恒等式: 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi$, 所以 $A+B=\pi-C$, 两边同时取正切, 化简可得 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$;

(6) 范围: 一定要考虑角的范围, 其决定最后取值正负。

【153】(2005·北京·5·★★★★)

对任意的锐角 α, β , 下列不等关系中正确的是()。

A. $\sin(\alpha + \beta) > \sin\alpha + \sin\beta$

B. $\sin(\alpha + \beta) > \cos\alpha + \cos\beta$

C. $\cos(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$

D. $\cos(\alpha + \beta) < \cos\alpha + \cos\beta$

【154】(2015·上海·16·★★★★)

已知点 A 的坐标为 $(4\sqrt{3}, 1)$, 将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 至 OB , 则点 B 的纵坐标为()。

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{11}{2}$ D. $\frac{13}{2}$

【152】(2021·新高考全国一·9·★★★★)

(多选题) 已知 O 为坐标原点, 点 $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $P_2(\cos\beta, -\sin\beta)$, $P_3(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$, $A(1, 0)$, 则()。

A. $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

【155】(2016·江苏·14·★★★★)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A = 2\sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值是_____。

【156】(2021·浙江·8·) ()

已知 α, β, γ 是互不相同的锐角, 则在 $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\alpha$ 三个值中, 大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值是()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4.2 函数图像

核心笔记

三角函数图像的考查主要包括图像识别、图像变换以及性质综合应用, 相关的知识点已经在《基础 2000 题》中展现, 在本书中我们更多侧重的是知识的综合应用, 需要对三角函数相关的性质、单调性、奇偶性、周期性以及对称性等做到非常熟悉。除此以外, 三角恒等变换与三角函数的结合是常见的考法, 需要重视!

类型一：函数图像识别

方法：特殊点代值验证是一个不错的选择。当然, 三角函数图像及基本性质需要熟悉!

【157】(2015·湖南·9·) ()

将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图像向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像, 若对满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ ()。

- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

类型二：函数图像变换

方法：(1) 函数 $y = A_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1)$ 与 $y = A_2 \sin(\omega_2 x + \varphi_2)$ 的图像重合, 则满足 $A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$; 余弦型函数同上, 正切型函数中 $\varphi_1 = \varphi_2 + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 。

(2) 函数名称不一致时, 首先需要通过诱导公式将函数名称化为一致。常见化法如下:

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) = A \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \omega x + \varphi\right);$$

$$y = A \cos(\omega x + \varphi) = A \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega x + \varphi\right).$$