“101 计划”核心教材
力学领域

流体力学
（第 3 版）

Fluid Mechanics
(3rd edition)

林建忠 阮晓东 陈邦国
王建平 周 洁 任安禄 编著

清華大學出版社
北 京

内 容 简 介

本书共分 12 章，内容包括流体的物理性质、流体运动及其基本方程、流体静力学、无黏性流体的一维和平面运动、黏性流体的一维运动、层流和湍流基本问题的解法、可压缩气体动力学、两相流动基础、计算流体力学以及流体力学实验基础等. 本书的特点是简明清晰的系统表述、理论与工程应用的有机贯穿、涵盖较宽的专业题材、提供较全的公式图表.

本书可作为力学、动力、机械、能源、化工、航空航天、水利、造船、海洋工程等本科专业的基础课教材或教学参考书，也可供有关专业从事科研、教学及工程工作的研究生和科技人员参考.

版权所有，侵权必究. 举报：010-62782989，beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目（CIP）数据

流体力学 / 林建忠等编著. -- 3 版. -- 北京 ：清华大学出版社，2026. 10.

ISBN 978-7-302-72949-5

Ⅰ. O35

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20261FW876 号

责任编辑：佟丽霞

封面设计：常雪影

责任校对：欧　洋

责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社

网　　址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com

地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：河北龙大印务有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：31　　**字　　数**：750 千字

版　　次：2005 年 9 月第 1 版　2026 年 10 月第 3 版　　**印　　次**：2026 年 10 月第1 次印刷

定　　价：95.00 元

产品编号：116895-01

出版说明

为深入实施科教兴国战略、人才强国战略、创新驱动发展战略，统筹推进教育科技人才体制机制一体化改革，推动新一轮科技革命与产业变革时期的拔尖创新人才培养，2021 年 12 月 31 日，教育部决定在部分高校实施计算机领域本科教育教学改革试点工作计划，简称“101 计划”.2023 年 4 月，教育部启动数学、物理学、化学、生物科学、基础医学、中药学、经济学、哲学 8 个领域的基础学科系列“101 计划”.2024 年 4 月以来，第二批“101 计划”在力学、集成电路、人工智能、大气、海洋、统计学等领域陆续启动.

力学是基础科学与工程技术的中枢和桥梁，在推动基础理论发展、科技创新、解决“卡脖子”工程问题等方面发挥着关键作用.力学领域“101 计划”由浙江大学牵头，面向世界科技前沿和国家重大战略需求，联合北京大学、清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、天津大学、大连理工大学、哈尔滨工业大学、同济大学、上海交通大学、南京航空航天大学、中国科学技术大学、华中科技大学、西安交通大学、西北工业大学、国防科技大学（以上按院校代码排序）共 16 所高校共建，面向工程力学、理论与应用力学两个专业，以实验、理论、计算、数据驱动四大范式交叉融合为导向，以兼具传承经典和探索新知的课程、教材、实践项目建设为引擎，着力推进卓越人才自主培养，激发学生的科学志趣和创新潜力，推动教师为学生成长成才提供学术引领、精神感召和人生指导.

在教育部高等教育司指导下，力学领域“101 计划”成立了由力学领域 11 位院士组成的专家指导委员会和一批权威专家组成的工作组，涵盖“力学导论”“数学物理方法”“理论力学”“材料力学”“弹性力学”“流体力学”“动力学与控制”“计算力学”“数据力学”“实验力学”“力学基本问题”“力学工程问题”12 门核心课程和“入门级夏令营”“国际化夏令营”“虚拟仿真实践项目”“航天类实践项目”“航空类实践项目”“工程类实践项目”6 门核心实践项目，通过数字赋能带动线下课程与实践项目改革，努力探索一种以“建构双脑（电脑与人脑）、人在回路、具身智能”为特征的教育教学新模式.

力学领域“101 计划”系列教材编写团队汇聚国内顶尖高校力学学科带头人及中青年骨干教师，立足中国力学教育特色和借鉴国际先进经验，将知识内容拆分为知识点和知识关系，以循序渐进的方式模块化重构与关联，打造符合学习记忆特征、逻辑完整而不失个性化的教材体系，并强化学生的范式训练与跨学科思维培养.每部教材均经过多轮专家评审，确保体系的系统性、内容的先进性与教学的适应性.

本系列教材由高等教育出版社领衔，联合浙江大学出版社、北京大学出版社、科学出版社等单位共同出版，配套慕课、虚拟仿真平台及力学教育大模型，构建“教材-资源-平台-工具”一体化生态，为高等学校提供可定制的教学解决方案.教材不仅适用于力学类专业，也可

作为航空航天、机械、土木、能源、海洋等相关工程科学类专业的重要参考资料.

“101 计划”是我国本科教育教学改革的一项筑基性工程.教学改革,改到深处是课程,改到痛处是教师,改到实处是教材.感谢教育部高等教育司的悉心指导,感谢浙江大学及各参与高校的大力支持,感谢全体教材编写专家、主审专家及出版团队的辛勤付出! 本教材系列的出版,是力学领域“101 计划”实施的标志性成果和重要里程碑,与其他基础要素建设相得益彰,将为我国力学及相关专业全面深化本科教育教学改革、构建高质量人才培养体系提供有力支撑.我们将以此为起点,持续推动教学创新,为培养“明理、求是、数智、创新”的力学领军人才贡献力量,助力我国从“教育大国”向“教育强国”、从“力学大国”向“力学强国”迈进.

力学领域“101 计划”工作组

第3版前言

本书自2005年9月出版以来，得到了流体力学教学与研究工作者的认可.因此，在出版社的建议下，本书进行再版.第3版中，作者结合近年来在教学授课过程中所发现的问题对教材内容进行了修订和完善，并且根据本领域的发展，对相关章节进行了适当补充.

由于作者水平有限，书中谬误和疏漏在所难免，恳请读者批评指正.

作　者

2026年5月于浙江大学求是园

第1版前言

大千世界，被冠之以“流体”的流动介质无所不在.流体力学研究在各种力的作用下，流体的静止和运动状态以及流体和其他物体有相对运动时的相互作用和流动规律.流体力学既是探索自然规律的基础学科，也是解决工程实际问题的应用学科，它在现代科学中占有重要的地位.事实上，它已成为当今科学和工程技术的基础之一.

有鉴于此，目前很多专业和学科都把流体力学作为专业的基础课程，国内外也出版了很多的流体力学教科书，其中不乏上乘之作.可以把目前有关的教科书分为两类，一类侧重于基本概念和基础理论的描述，适合于力学专业的学生；另一类则侧重于流体力学在工程技术中的应用，适合于工科专业的学生.本书试图将系统的理论叙述与实际的工程应用有机地结合起来，同时尽可能涉及当今构成流体力学的基本元素，诸如流体力学问题的计算和实验，并且涵盖与气体动力学相关的可压缩流动、黏性流体动力学和两相流动，使得本书具有较宽的适用面.

本书作者长期从事本科生和研究生流体力学课程的授课工作，在流体力学的教学方面积累了较丰富的经验.全书共 12 章，其中陈邦国编写第 1、3、4 章；阮晓东编写第 2，6.2.1，6.3～6.8，11 章；林建忠编写第 7、8 章以及第 6 章的 6.1，6.2.2～6.2.4；王建平编写第 9、10 章；周洁编写第 5 章；任安禄编写第 12 章.最后由林建忠负责定稿.

由于编者水平有限，谬误和疏漏在所难免，恳请读者批评指正.

作　者

2005 年 4 月于浙江大学求是园

符 号 表

英文符号	量的含义
a	声速；动能修正系数
$\boldsymbol{a}$	加速度
A	面积
B	压缩系数；驻点速度
c_i，c_r	波相速度
c_p，c_V	比定压热容和比定容热容
C	常数
C_m	流量系数
D	阻力；扩散系数
e	比内能
e_{ij}	应变率张量
E	内能；偏心距；杨氏弹性模量
$\boldsymbol{E}$	应变率张量
$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{F}$	力
f，g	相似变量
$\boldsymbol{g}$	重力加速度
G	质量流量；切变模量
h	能量损失；比焓；水头；管道厚度
h_0	驻点焓
H	形状因子（δ^*/θ）；焓
$\boldsymbol{I}$	单位张量
J	惯性矩；射流动量
k	导热系数或热导率；粗糙高度；湍动能
$\boldsymbol{k}$	动量
K	体积模量；管道入口段压降参数；绝热指数
l	分子平均自由程；混合长度
L	特征长度
m	质量
$\dot{m}$	质量流量
M	相对分子质量
$\boldsymbol{M}$	力矩
n	黏度幂次律指数；量纲指数；转速
N	功率
p	压力，压强
$\boldsymbol{p}$	应力矢量
$\hat{p}$	有效压力（$p+\rho g z$）
P	压力；浮力；管道周长
$\boldsymbol{P}$	应力张量；压力
$\boldsymbol{q}$	热流密度
Q	热量；流量
(r,θ,z)	柱坐标
$\boldsymbol{r}$	位置矢径
r	恢复因子；汽化潜热
r_h	水力半径
r_0	圆柱半径
R	半径；气体常数
(R,θ,φ)	球坐标
s	比熵；滑动比
t	时间
T	热力学温度
u，v，w	笛卡儿速度分量
u'，v'，w'	湍流脉动速度分量
U，V，W	平均速度分量
v	比体积；速度
v_r，v_θ，v_z	柱坐标速度分量
v_r，v_θ，v_φ	球坐标速度分量

v_1, v_2, v_3	一般速度分量
v^*	壁摩擦速度$(\tau_w/\rho)^{1/2}$
$\boldsymbol{V}$	速度矢量
$\boldsymbol{V}_r$	相对速度
w	比功
w_0	循环速度
W	功;尾迹函数
x, y, z	笛卡儿坐标
$\boldsymbol{x}$	坐标矢量
x_1, x_2, x_3	坐标分量
Z	气体可压缩性$p/(\rho RT)$

希腊文符号　　量的含义

α	热扩散率$K/(\rho c_p)$;波数;压力梯度参数;楔角
β	热体胀系数;克劳泽(Clauser)参数;热传递参数;容积含气率;动量修正系数
γ	重度;比热比;表面张力;间隙因子
Γ	欧拉常数;速度环量
δ, δ_u	速度边界层厚度
δ_T	温度边界层厚度
δ_h	焓厚度
δ_s	耗散厚度
δ_c	热传导厚度
Δ	管壁绝对粗糙度;亏损厚度
ε	湍流耗散;相对偏心距
ε_m	涡黏性系数
ζ	圆柱绕流变量
η	相似变量;效率
θ	动量损失厚度,转动角度
Θ	无量纲热力学温度
κ	卡门(Kármán)常数,0.4
λ	管道摩擦因子或沿程阻力系数;速度系数
Λ	波毫森(Pohlhausen)参数
μ	动力黏度
ν	运动黏度
Π	科尔斯(Coles)尾流参数;质量力势函数
ρ	密度
σ	分子碰撞直径;湍射流增长参数;气穴系数
τ	体积,切应力
τ_{ij}	应力张量
ϕ	速度势;速度系数;真实含气率(空隙率)
Φ	黏性耗散函数
χ	湿周;质量含气率(干度)
X	黏性相互作用参数
ψ	流函数
$\boldsymbol{\omega}$	涡量;角频率
Ω_v, Ω_D	分子势函数
$\boldsymbol{\Omega}$	角速度矢量

量纲为 1 的参数

C_a	空泡数
C_D	阻力系数
C_f	表面摩擦系数
St	斯坦顿(Stanton)数
C_P	压力系数
C_M	力矩系数
Ec	埃克特(Eckert)数
Eu	欧拉(Euler)数
Fr	弗劳德(Froude)数
Gr	格拉晓夫(Grashof)数
Kn	克努森(Knudsen)数
Le	路易斯(Lewis)数
Ma	马赫(Mach)数
Ne	牛顿(Newton)数
Nu	努塞尔(Nusselt)数
Pe	贝克来(Peclet)数
Pr	普朗特(Prandtl)数
Ra	瑞利(Rayleigh)数
Re	雷诺(Reynolds)数
Ro	罗斯比(Rossby)数
Sc	施密特(Schmidt)数
Sr	斯特劳哈尔(Strouhal)数

We	韦伯(Weber)数

下角符号	含　义
a	空气
B	布拉修斯(Blasius)层
c	临界值
e	自由来流;外部势流
f	流体
g	气体
l	液体;层流
m	模型
n	法向
o	特征量
r	恢复
t	湍流;实物
tr	转捩
x	在 x 处
ν	黏性
w	水;壁面
0	初始值;滞止状态
∞	无穷远

上角符号	含　义
$'$	微分;湍流脉动;液相物理量
$''$	气相物理量
0	量纲为 1 的量
$*$	量纲为 1 的量
$+$	壁面律变量

上标符号	含　义
$\bar{}$	平均
$\hat{}$	小扰动变量

目　录

第 1 章　流体物理性质与运动的描述/1

1.1　流体质点与连续介质假设/2

1.1.1　流体的定义和特征/2

1.1.2　流体力学的研究内容和方法/2

1.1.3　流体质点与连续介质假设/3

1.1.4　流体物理量/4

1.2　流体的可压缩性与热膨胀性/4

1.2.1　流体的密度与比体积/4

1.2.2　流体的可压缩性与热膨胀性/5

1.2.3　不可压缩流体假设/6

1.3　流体的黏性与导热性/6

1.3.1　流体的黏性/6

1.3.2　牛顿黏性定律/7

1.3.3　流体的黏度/7

1.3.4　牛顿流体与非牛顿流体/8

1.3.5　无黏性流体的假设/8

1.3.6　流体的导热性/9

1.4　流体运动的两种描述方法及互相转换/9

1.4.1　拉格朗日描述法/10

1.4.2　欧拉描述法/10

1.4.3　拉格朗日描述法与欧拉描述法之间的联系/11

1.5　质点的随体导数/11

1.5.1　拉格朗日描述中的随体导数/11

1.5.2　欧拉描述中的随体导数/12

1.5.3　拉格朗日描述法与欧拉描述法的互相转换/13

1.6　迹线与流线、流管与流量/15

1.6.1　迹线/16

1.6.2　流线/16

1.6.3　脉线/18

1.6.4　流管与流束/19

1.7 运动流体的应变率张量/20
1.7.1 亥姆霍兹速度分解定理/20
1.7.2 流体微团的运动分析/22
1.7.3 流体运动的分类/25
1.8 流体中的作用力与应力张量/26
1.8.1 体积力/26
1.8.2 表面力与应力/27
1.8.3 流场中任一点上的应力状态——应力张量/28
1.8.4 静止流体与运动的无黏性流体中的应力张量/29
附录Ⅰ 笛卡儿张量简介/29
习题/35

第 2 章 流体静力学/41
2.1 流体静压强及其特性/42
2.2 静止流体的平衡微分方程/43
2.3 重力场中静止流体内的压力分布/46
2.4 静压力的计量/47
2.5 流体的相对平衡/47
2.6 静止流体作用在物面上的总压力计算/50
2.6.1 平面和曲面上的总压力/50
2.6.2 浮力/53
2.7 大气的平衡/53
习题/58

第 3 章 流体运动基本方程/63
3.1 流体的系统与控制体/64
3.1.1 流体的系统/64
3.1.2 流场中的控制体/64
3.1.3 流体运动应遵循的基本定律/64
3.1.4 体积分的随体导数/65
3.1.5 基本方程表达形式的选择/66
3.2 流体运动的连续性方程/67
3.2.1 积分形式的连续性方程/67
3.2.2 微分形式的连续性方程/68
3.2.3 体积分随体导数的另一种表达式/71
3.3 流体的运动方程/71
3.3.1 积分形式的运动方程/71
3.3.2 微分形式的运动方程/72
3.3.3 黏性流体的运动微分方程/74

3.3.4 无黏性流体的运动微分方程/77
3.4 流体运动的能量方程/77
3.4.1 积分形式的能量方程/78
3.4.2 微分形式的能量方程/78
3.4.3 牛顿流体的内能方程/79
3.5 流体的热力学状态方程/81
3.5.1 流体的热动平衡假设/81
3.5.2 流体的状态方程/81
3.5.3 常比热容完全气体的热力学关系式/82
3.5.4 正压流体与斜压流体/83
3.6 流体动力学基本方程组的封闭性及定解条件/83
3.6.1 流体力学分析方法的一般过程/83
3.6.2 流体力学的理论模型/84
3.6.3 几种常用模型的封闭方程组/84
3.6.4 初始条件与边界条件/89
附录Ⅱ 正交曲线坐标系中流体运动的基本方程组/93
习题/99

第 4 章 无黏性流体的一维流动/103
4.1 流体运动的一维模型及基本方程/104
4.1.1 一维流动模型/104
4.1.2 无黏性流体一维流动的基本方程/104
4.2 不可压缩流体的伯努利方程及其应用/109
4.2.1 无黏性流体运动方程的简化/110
4.2.2 定常流动的伯努利积分/110
4.2.3 伯努利方程的物理意义和几何意义/112
4.2.4 伯努利方程的基本应用/113
4.2.5 伯努利方程的推广应用/117
4.2.6 非定常流动中的伯努利方程/120
4.2.7 非惯性坐标系中的伯努利方程/122
4.3 动量定理及其应用/124
4.3.1 动量方程及其简化/125
4.3.2 动量方程的应用/126
4.3.3 轴流式涡轮机的欧拉方程/127
4.3.4 非惯性坐标系中的动量定理/130
4.4 动量矩定理及其应用/131
4.4.1 积分形式的动量矩方程/132
4.4.2 径流式涡轮机的欧拉方程/132
4.4.3 非惯性坐标系中的动量矩定理及其应用/133

习题/135

第 5 章　无黏性流体的平面二维流动/141

5.1　流体的有旋运动和无旋运动/142
5.2　涡线、涡管、涡束、涡通量/144
5.3　速度环量、斯托克斯定理/146
5.4　无黏性流体兰姆-葛罗米柯型微分方程及应用/149
5.5　欧拉积分式和伯努利积分、伯努利方程/150
5.6　汤姆孙定理、亥姆霍兹旋涡定理/152
5.6.1　汤姆孙定理/153
5.6.2　亥姆霍兹旋涡定理/154
5.7　有势流动、速度势函数、流函数、流网/155
5.7.1　有势流动和速度势函数/155
5.7.2　流函数与流网/158
5.8　不可压缩平面二维无旋基本流动/162
5.8.1　均匀直线流动(平行流)/163
5.8.2　点源和点汇/163
5.8.3　涡流和点涡/165
5.9　简单的平面无旋流动的叠加/168
5.10　无环量绕圆柱体的不可压缩二维无旋流动/173
5.11　有环量绕圆柱体的不可压缩二维无旋流动/177
5.12　不可压缩流体绕流平面叶型的库塔-儒可夫斯基升力定理/180
习题/183

第 6 章　黏性不可压缩流体的一维流动/185

6.1　量纲数为 1 的 N-S 方程及流动相似律/186
6.1.1　量纲数为 1 的 N-S 方程/186
6.1.2　量纲为 1 的参数/186
6.1.3　流动相似律/187
6.2　黏性流体运动的两种流态——层流和湍流/188
6.2.1　雷诺实验/188
6.2.2　湍流的一般定义和描述/189
6.2.3　湍流的统计平均/190
6.2.4　不可压缩湍流平均运动的基本方程/192
6.3　圆管中的充分发展层流与湍流/192
6.3.1　圆管中的层流/193
6.3.2　圆管中的湍流/195
6.4　管流的沿程压力损失和局部阻力损失/203
6.4.1　沿程压力损失/203

6.4.2 局部阻力损失/207
6.5 黏性总流的伯努利方程及其应用/210
6.5.1 黏性总流的伯努利方程/210
6.5.2 伯努利方程的应用/212
6.5.3 沿程有能量输入或输出的伯努利方程/214
6.6 管路的水力计算/214
6.6.1 短管/215
6.6.2 长管/219
6.7 缝隙中的流动/225
6.7.1 平行平板间缝隙流动/225
6.7.2 圆柱环形缝隙流动/228
6.7.3 倾斜平板间缝隙流动/230
6.7.4 圆锥缝隙流动/232
6.7.5 平行圆盘缝隙流动/233
6.8 孔口出流/236
6.8.1 孔口出流的分类和基本特征/236
6.8.2 薄壁孔口自由出流/237
6.8.3 薄壁孔口淹没出流/239
6.8.4 厚壁孔口自由出流/240
6.8.5 节流气穴与汽蚀/243
习题/244

第 7 章 黏性流体层流的基本运动/251

7.1 N-S 方程的小雷诺数近似解/252
7.1.1 斯托克斯方程/252
7.1.2 绕圆球小雷诺数流动的斯托克斯解/252
7.1.3 绕圆球小雷诺数流动的奥辛解/255
7.2 两平行平板间的二维流动/256
7.2.1 二维泊肃叶流/256
7.2.2 纯剪切流/257
7.2.3 二维库特流/257
7.3 附壁面流动边界层的基本概念与特征量/258
7.4 不可压缩二维层流边界层微分方程/259
7.5 不可压缩二维边界层的动量积分关系式/261
7.5.1 位移厚度/261
7.5.2 动量损失厚度/261
7.5.3 能量损失厚度/262
7.5.4 卡门动量积分方程/262
7.6 定常不可压缩二维层流边界层的布拉修斯相似性解/263

7.7 可压缩层流边界层/267
7.7.1 可压缩二维层流边界层方程/267
7.7.2 完全气体定常可压缩二维层流边界层的相似性解/268
7.7.3 可压缩二维边界层的积分关系式/269
习题/270

第 8 章 黏性流体湍流的基本运动/273
8.1 湍流的模式理论/274
8.1.1 湍流模式建立的依据/274
8.1.2 一阶封闭模式/275
8.1.3 雷诺应力模式/278
8.1.4 代数应力模式/280
8.1.5 二方程模式/280
8.1.6 双尺度模式/281
8.1.7 一方程模式/281
8.1.8 各种模式的比较/281
8.2 二维边界层/282
8.2.1 湍流边界层的结构/282
8.2.2 二维湍流边界层方程/284
8.2.3 边界层的转捩过程/285
8.2.4 影响边界层转捩的几个因素/287
8.2.5 转捩位置的预测/288
8.2.6 层流边界层分离/289
8.2.7 湍流边界层分离/289
8.2.8 边界层分离后的再附/291
8.3 平板不可压缩二维湍流和混合边界层的近似计算/291
8.3.1 定常不可压缩二维湍流边界层的动量积分关系式解法/291
8.3.2 平板不可压缩二维层流-湍流混合边界层的近似计算/296
8.4 绕圆柱体的不可压缩二维流动/297
8.4.1 绕圆柱体不可压二维边界层/297
8.4.2 绕圆柱流场与 Re 数的关系/298
8.5 湍尾流场/300
8.6 可压缩二维湍流边界层方程/304
8.7 绕流阻力与边界层控制/305
8.7.1 绕流阻力/305
8.7.2 边界层控制/306
习题/307

第 9 章　气体动力学基础/309

9.1　压力波的传播、声速/310
9.2　运动点扰源产生的扰动场、马赫数与马赫角/312
9.3　可压缩流体运动的三种参考状态/313
9.4　可压缩流体一维定常等熵流动的伯努利方程及其应用/314
9.4.1　一维定常等熵流动的基本方程/314
9.4.2　一维定常等熵流动的伯努利方程及其应用——喷管/316
9.5　流动通道中两个不同截面上参数变化与马赫数的关系/320
9.5.1　任意两截面间同名参数比与马赫数的关系/320
9.5.2　任意截面上的参数与临界参数、滞止参数之间的关系及其速度系数 λ/321
9.6　不可压缩流体伯努利方程的应用范围/324
9.7　正激波/325
9.7.1　正激波的形成机理、传播速度及蓝金-许贡纽公式/325
9.7.2　正激波前、后气流参数的关系/327
9.8　超声速气流绕流外凸或内凹固壁面的流动/330
9.8.1　膨胀波/330
9.8.2　微弱压缩波/331
9.9　斜激波/332
9.9.1　斜激波的形成/332
9.9.2　斜激波前、后气流参数的关系/333
9.9.3　超声速气流折转角 δ 和斜激波角 β 的关系/335
9.10　超声速喷管在非设计工况下的流动分析/337
附录Ⅲ　气体动力函数表/339
附录Ⅳ　正激波表/341
习题/347

第 10 章　两相流动基础/351

10.1　气液两相流动的参数及其意义/352
10.1.1　气液两相流动的参数/352
10.1.2　气液两相流动的流型/356
10.2　气液两相流动的均流模型与分流模型/359
10.2.1　气液两相流动的均流模型/359
10.2.2　两相流动的分流模型/362
10.3　气液两相流动中摩擦阻力、局部阻力及真实含气率的计算/365
10.3.1　气液两相流动中摩擦阻力的计算/365
10.3.2　气液两相流动中真实含气率的计算/373
10.3.3　气液两相流动的局部阻力/376
10.4　固定床气固两相流的基本原理/379
10.4.1　床层结构参数/379

10.4.2 床层阻力/380
10.5 流化床气固两相流的基本原理/381
10.5.1 流化现象/382
10.5.2 临界流化速度和流化床的压降/383
10.6 悬浮状气固两相流的基本原理/384
习题/385

第 11 章 流体力学实验基础/387
11.1 相似理论和量纲分析/388
11.1.1 相似理论/388
11.1.2 量纲分析/392
11.2 流体力学实验设备简介/395
11.2.1 风洞的功能与分类/396
11.2.2 低速风洞/396
11.2.3 超声速风洞/400
11.2.4 水流循环系统/402
11.3 流动参数测量/403
11.3.1 压力的测量/403
11.3.2 流速的测量/408
11.3.3 流量的测量/409
11.4 流动显示技术/413
11.4.1 常规流动显示/414
11.4.2 粒子图像测速技术/415
习题/419

第 12 章 计算流体力学基础/421
12.1 计算流体力学概述/422
12.2 有限差分法/423
12.2.1 有限差分法概念/423
12.2.2 相容性、收敛性和稳定性/425
12.3 模型方程的差分格式/426
12.3.1 波动方程/426
12.3.2 热传导方程/427
12.3.3 无黏性伯格斯方程/428
12.4 冯·诺伊曼稳定性分析法和其他著名的差分格式/428
12.5 稳定性分析的其他方法和修正方程的概念/431
12.6 二维、三维模型方程的差分格式/433
12.7 无旋流动的差分计算方法/434
12.7.1 高斯-赛德尔迭代法/435

12.7.2 线迭代法/435
12.7.3 等步长点迭代法/436
12.8 二维不可压缩黏性流动涡量流函数法/437
12.8.1 网格设计/440
12.8.2 程序框图/440
12.9 平板边界层方程的差分解法/441
12.10 N-S 方程的有限差分法/442
12.10.1 压强校正法/444
12.10.2 投影法和人工压缩性法/447
12.10.3 哈罗-泊松方程法和非交错网格下的应用/450
12.10.4 Beam-Warming 差分格式/451
12.11 非结构网格有限体积法/452
12.11.1 非结构网格的几何描述/452
12.11.2 扩散方程的离散格式/453
12.11.3 对流扩散方程的离散格式/454
12.11.4 流动方程组的离散格式/455
习题/457

习题答案/459

中英文人名对照表/469

参考文献/471

第1章

流体物理性质与运动的描述

本章内容包括两部分：一部分是关于流体的宏观物理性质，着重介绍流体的可压缩性与黏性；另一部分则为流体运动物理量的描述，着重介绍流体运动的欧拉描述方法以及在欧拉描述下流体的运动学分析.

1.1 流体质点与连续介质假设

1.1.1 流体的定义和特征

在自然界，物质的常见聚集（存在）状态是固态、液态和气态，简称物质的三态或三相，处在这三种形态下的物质分别称为固体、液体和气体.液体和气体又合称为流体.固体和流体在宏观表象上的差别是显而易见的.一定量的固体具有一定的几何外形和体积，不易变形；而一定量的液体则无一定的形状，易于变形.也就是说，和固体相比，流体明显具有易流动和不能保持一定形状的特性.

流体和固体在宏观表象上的差别从物理学的角度来解释是由构成物质的内部微观结构、分子热运动和分子间的作用力不同造成的.在体积相同的常规条件下，流体中所含的分子数目比固体少得多，分子间的空隙就大得多.因此，流体分子间的作用力小，分子的无规则热运动强烈，从而决定了流体的易流动性.从力学的角度来解释，流体的易流动性是因为流体在静止时不能承受剪切力，这一点显然与固体不同.固体在静止时也能承受剪切力，它可以通过微小变形以抵抗外力，达到平衡后，只要剪切力保持不变，固体就不再发生变形.因此，可以给流体下这样一个力学的定义：在任何微小剪切力的持续作用下能够连续不断变形的物质称为流体.

在流体的特性上需要再做点补充说明的是，虽然液体和气体统称为流体，具有相同的特性，但由于液体和气体在分子结构上存在较大差别，它们之间还会有一些不同的特性，或虽有相同的特性但程度上差异较大.例如，虽然两者都具有易流动性，但液体只能局限在固体界面或容器内，一定质量的液体一般都占有固定的体积，若空间或容器的体积大于液体的体积，则会有自由液面存在.而气体则完全没有这个特性.

1.1.2 流体力学的研究内容和方法

流体力学主要研究在各种力的作用下，流体本身的静止状态和运动状态特性，以及流体和相邻固体界面间有相对运动时的相互作用和流动规律.

在自然界和各种工程中，流体的存在是很普遍的，因而决定了流体力学应用的广泛性，如在机械、动力、建筑、水利、化工、能源、航空、环境、生物等工程领域，存在着大量与流体运动有关的问题，其中一些是基础性的，一些是关键性的.就某种意义而言，正是在流体力学问题的开发研究中不断取得成果的前提下，才促进了这些工程技术领域的大力发展；反过来，也正是在工程技术部门有许多重要的流体力学问题需要解决，才使得流体力学学科不断发展.

目前，解决流体力学问题的方法有实验、理论分析和数值方法等三种.实验方法包括对流动现象的现场观测、实验室模拟和实验论证等内容，通过实验方法能直接解决工程技术中的复杂流动问题，能发现流动中的新现象和新原理，实验结果可以用于检验理论分析或数值

计算结果的正确性及应用范围；理论分析方法包括对实际流动作适当简化，建立正确的力学模型和恰当的数学模型，运用数学物理方法寻求流动问题的精确或近似解析解，明确地给出各种流动物理量之间普适的变化关系；而数值方法目前是指利用计算机进行流动的数值模拟和数值计算.为了使流体力学问题得到圆满解决，三种方法相辅相成，相互促进，缺一不可.

1.1.3 流体质点与连续介质假设

流体力学主要是研究流体的宏观运动，而研究途径有微观和宏观两种.微观途径是从研究分子和原子的运动出发，采用统计平均方法建立宏观物理量应满足的方程，并确定流体的宏观性质.这种途径取决于分子运动论的发展，目前应用较少.宏观的途径是先给流体建立一个宏观的“抽象化”的物质模型，然后直接应用基本物理定律来建立宏观物理量应满足的方程，并确定流体的宏观性质.这是一条常用的途径，其基础就是流体质点与连续介质假设.下面以密度这个宏观物理量为例来简单说明连续介质模型的建立.

如图 1-1(a)所示，在某一时刻 t，在流体中取一包含 $P(x, y, z)$点的微小体积 $\Delta\tau$，在此体积内的流体质量为 Δm，显然，$\Delta\tau$ 内流体的平均密度为 $\bar{\rho}=\Delta m/\Delta\tau$.如果在同一时刻，对包围 P 点的流场取大小不同的微小体积 $\Delta\tau$ 并测出相应不同的 Δm，则会有不同的 $\bar{\rho}$，结果如图 1-1(b)所示.

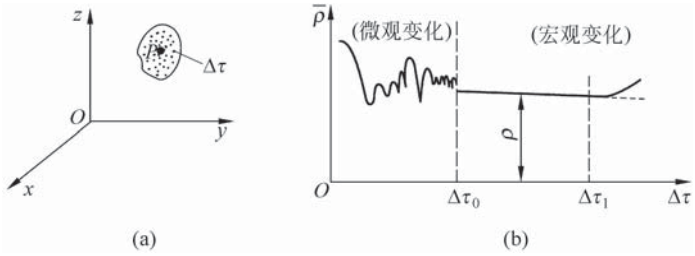


图 1-1 一点上密度的定义

当包围 P 点的微小体积 $\Delta\tau$ 趋向于某一极限体积 $\Delta\tau_0$ 时，$\bar{\rho}$ 将趋于一个确定的极限值 ρ，而且该值不再因为 $\Delta\tau$ 的增大而发生变化，说明此时流体的分子个性不起作用.但是，当体积 $\Delta\tau$ 缩到小于 $\Delta\tau_0$ 时，$\bar{\rho}$ 将随机波动，不再具有确定的极限值，这是因为此时 $\Delta\tau$ 中所含有的分子数目太少，分子随机进出 $\Delta\tau$ 对 Δm 产生了明显影响.

由此可见，极限体积 $\Delta\tau_0$ 具有这样的特性：它在宏观上必须足够小，可以认为它是一个没有空间尺寸的几何点；同时，在微观上又必须足够大，使得它包含足够多的分子数目，分子的个别行为对宏观特性的影响可忽略不计.这样在 $\Delta\tau_0$ 内进行空间和时间上的统计平均都具有确定的意义和数值.

在流体力学中，把极限体积 $\Delta\tau_0$ 中所有流体分子的总体称为流体质点，同时认为，流体是一种由无限多连续分布的流体质点所组成的物质，这就是流体的连续介质假设.大量的实际应用和实验都证明，在一般情况下，基于连续介质假设而建立的流体力学理论是正确的.

对某一种实际流动能否按连续介质假设下的理论来研究，有一个简单的判断式：$l \ll d \ll L$，其中，d 就是前面所定义的极限体积的特征尺度，例如，取 $d=10^{-3}\,\mathrm{cm}$，则 $\Delta\tau_0 \approx 10^{-9}\,\mathrm{cm}^3$，在 0℃ 和标准大气压下，在 $10^{-9}\,\mathrm{cm}^3$ 体积的气体中仍含有 2.7×10^{10} 个分子，同样

体积的液体中有 3×10^{13} 个分子.由这么多分子构成一个体积足以得到与分子数无关的统计平均物理量;l 是所研究的流体分子运动的平均自由程,在标准状态下,气体的 l 约为 10^{-7} cm,液体的 l 约为 10^{-8} cm;L 则为所研究流动中,宏观物理量将发生显著变化的特征长度,例如,所研究的是管道中的流动,则特征长度可取管道直径或长度,如果研究的是流体绕过物体的流动,则可取物体的长度、宽度或高度等作为特征长度.

由判断式可见,如果所研究的流动问题,其宏观物理量发生显著变化的空间尺度不小于 10^{-3} cm,时间尺度不小于 10^{-6} s(保证分子间有足够多的碰撞次数),那么,采用连续介质假设应该是没有问题的,只是在某些特殊流动问题中,这个假设可能不成立.例如,在研究高空稀薄气体中的物体运动、血液在微细血管(直径$<10^{-3}$ cm)中的运动、冲击波(厚度$<10^{-4}$ cm)内气体的运动、微机电系统及纳米级器件中的流体力学问题时,就不能把流体看成是连续介质,此时必须考虑分子的运动特性,采用微观或者宏观与微观相结合的途径来研究.

本书只涉及基于流体质点和连续介质假设的流体力学理论及其问题.

1.1.4 流体物理量

根据连续介质假设,流体已抽象为一种在时间和空间上无限可分的连续体.通常把流体所占据的空间称为流场,那么,在流场中,任何瞬时和每一个空间点上都有一个而且只有一个流体质点存在,流体质点没有空间尺度但具有确定的宏观物理量,如密度、速度、压力和温度等.在流场中,它们都应该是空间和时间的连续函数,从而可以运用连续函数的解析方法来描述流体的宏观物理性质以及流体的平衡和运动规律.

1.2 流体的可压缩性与热膨胀性

1.2.1 流体的密度与比体积

单位体积的流体所具有的质量称为密度,常用 ρ 表示,其单位为 kg/m^3.根据连续介质假设,在流场中给定点上流体的密度是指该点上流体质点的密度,如上节所述,ρ 可以定义为

$$\rho=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\Delta m}{\Delta\tau}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau},$$

它是空间位置及时间的连续分布函数,在直角坐标系中,有 $\rho=\rho(x,y,z,t)$.

如果已知在有限体积 τ 内的密度分布 ρ,则微元体积 $\mathrm{d}\tau$ 内的流体质量应为 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}\tau$,而 τ 内的流体总质量应为 $m=\int_\tau\rho\mathrm{d}\tau$.如果在同一时刻,$\tau$ 内的密度处处相同,则 $m=\rho\tau$.

密度的倒数称为比体积,即单位质量流体所占有的体积,常用 v 表示,则 $v=1/\rho$,或 $\rho v=1$,其单位为 m^3/kg.

在一些介质为液体的工程流体力学问题中,还常常用到重度与相对体积质量的概念.单位体积流体所具有的重量称为重度,用 γ 表示,在重力场中,$\gamma=\rho g$,其单位是 N/m^3.流体的相对体积质量是该流体的重量与 4℃同体积纯水重量之比,在重力场中,也就是该流体的密度与 4℃同体积纯水密度之比,因此,相对体积质量又称相对密度,它是量纲为 1 的量.

密度 ρ 是流体力学中一个重要的物理标量.不同的流体有不同的密度;同一种流体,特

别是气体的密度通常随压力和温度的变化而变化，换言之，不管流体运动与否，同一时刻、同一点上流体的密度 ρ 与压力 p 和温度 T 都应满足热力学平衡态的状态方程，即 $\rho=\rho(p,T)$.（见 3.5 节）

表 1-1 中列出了几种常见流体的密度.可以看到，在标准大气压下，277K 时纯水的密度为 1000kg/m^3，288K 时空气的密度为 1.226kg/m^3.

当流体是一种多组分的混合物时，例如，海水是水与各种溶解盐的混合物，锅炉烟气是一种混合气体等，密度还是各种组分浓度的函数.在研究流体运动规律时，通常把多组分的混合物折算成单一组分流体.本书只讨论单一组分的流体.

表 1-1　常见流体的密度（标准大气压下）

流体名称	温度/K	密度/(kg/m^3)	流体名称	温度/K	密度/(kg/m^3)
空气	273	1.293	纯水	277	1000
	288	1.226		293	998.2
	300	1.161		373	958.4
	380	0.586	水银	273	13595
水蒸气	400	0.554	汽油	288	725
	500	0.441	润滑油	300	884.1

1.2.2　流体的可压缩性与热膨胀性

流体在外力（主要是压力）作用下，其体积或密度发生变化的性质称为可压缩性，亦称体积弹性；而流体的体积或密度随温度改变的性质称为流体的热膨胀性.由于在一般情况下，$\rho=\rho(p,T)$，因此

$$\mathrm{d}\rho=\frac{\partial\rho}{\partial p}\mathrm{d}p+\frac{\partial\rho}{\partial T}\mathrm{d}T=\rho B\,\mathrm{d}p-\rho\beta\mathrm{d}T,$$

式中，$\beta=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}=\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$，称为热体胀系数，$B=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}=-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$，称为等温压缩系数.

β 表示在一定压强下温度增加 1℃时，流体密度的相对减小率或体积的相对膨胀率.不同流体的 β 值不同，β 值越大表示热膨胀性越大，一般而言，气体的热膨胀率比液体大.

B 表示在一定温度下压强增加一个单位时，流体密度的相对增加率或体积的相对缩小率.B 的倒数就是流体的弹性体积模量（或体积弹性模量），用 K 表示：

$$K=\frac{1}{B}=\rho\frac{\partial p}{\partial\rho}=-v\frac{\partial p}{\partial v},\tag{1-1}$$

显然，K 表示流体体积或密度产生相对变化所需的压强增量，K 与压强 p 的单位相同，均为 N/m^2(Pa).

K 是用来表征流体可压缩性最为方便的物理量.不同流体的 K 值不同，K 越大则可压缩性越小.同一种流体的 K 值随压强和温度的变化而变化.对液体而言，K 值可通过实验确定.实验表明，液体的 K 值都很大，且受压强和温度变化的影响很小，几乎为定值，可见液体是很难压缩的.例如，水的 K 值约为 2.04×10^9 N/m^2，当水压增加一个大气压强（1.013×10^5 N/m^2）时，其体积仅缩小 $1.013\times10^5/K$，约为万分之零点五.对气体而言，K 值可按

式(1-1)计算.若将气体视为完全气体,由状态方程 $p=\rho RT$(见 3.5 节)可知,气体在等温压缩时,其弹性体积模量 $K=p$,即气体的 K 值不是常数,而与压强成正比.例如,当气体处在标准大气压时,K 值约为 $1.013\times10^5\,\mathrm{N/m^2}$,如果此时气压等温增加 0.1 个大气压,则其体积将缩小 1/10,可见气体的可压缩性要比液体大得多.

1.2.3 不可压缩流体假设

严格地说,任何流体都是可压缩的,只是程度不同而已.但是,考虑可压缩性意味着密度 ρ 是一个变量,这增加了处理问题的复杂性.因此,在流体力学中,特别是在工程流体力学问题的处理中,为了抓住主要矛盾,使问题简化,常常将可压缩性很小的流体近似地视为不可压缩流体,简单地记作 $\rho=$常数,这就是不可压缩流体假设.

运动中的流体是否可以假设为不可压缩,不能简单地只看其 K 值的大小,不妨把式(1-1)近似改写为

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\approx\frac{\Delta p}{K}. \tag{1-2}$$

如果要将密度视作常数,则要求 $\Delta\rho/\rho\ll1$,通常要求 $\Delta\rho/\rho<0.05$.有两种状况可使条件满足,一种是流体的 K 值很大,即使 Δp 并不很小,但仍然保持流体的密度变化很小,大多数液体的流动就属于这种状况.因此,通常将液体的流动视为不可压缩流动,除非是在 Δp 特别大的状况,例如水下爆炸、封闭管道中的水击现象等特殊问题.另一种可能的状况是,在研究的范围内,运动流体中的压强变化 Δp 很小,以至于 K 值并不太小时,$\Delta\rho/\rho$ 还是很小,气体的大多数低速流动就属于这种状况.理论和大量实验都表明,对于那些压强的变化是由于流动速度的变化而引起的气体流动,例如,静止大气中的低速飞行物周围的流场、风绕过建筑物的流动以及变截面管道中气体的低速流动等问题,当流动速度小于 100m/s 时,$\Delta\rho/\rho$ 很小,此时可以忽略可压缩性,把低速气体流动视为不可压缩流动.

需要强调的是,严格地说,不可压缩流体和流体的不可压缩流动是两个概念.但只要是一种均质的不可压缩流体,两种提法都意味着密度 ρ 时时、处处为同一常数,都记作 $\rho=$常数.

此外,所有流体也都具有热体胀性.但在一般情况下,忽略可压缩性时也同时忽略热体胀性,除非流动主要是由于温度分布不均匀所造成的(如自然对流等).

1.3 流体的黏性与导热性

1.3.1 流体的黏性

当两块平板沿接触面作相对滑动时,它们之间存在阻止滑动的摩擦力.在流体中,当相邻的两层流体之间存在相对运动时,也会产生平行于接触面的剪切力,运动快的流层对运动慢的流层施以拖曳力,运动慢的流层对运动快的流层施以阻滞力,这一对力大小相同、方向相反,是一种内摩擦力.

流体所具有的抵抗两层流体相对滑动或剪切变形的性质称为流体的黏性或黏滞性.换言之,流体的黏性是一种在流体中产生内摩擦力的性质,因此,通常称流体中的内摩擦力为黏性剪切力.黏性的作用表现为阻滞流体内部的相对滑动,这是流体黏性的重要特征.

1.3.2 牛顿黏性定律

在自然界，流体的黏滞现象随处可见，也很容易在实验室中演示.如图 1-2 所示，两块表面积为 A、水平放置的平行平板间充满某种流体（例如水或油），两板间距为 h，下板固定不动，上板在力 F 的作用下沿 x 方向以等速度 U 平移.由于流体的黏性，流体与平板间存在附着力，与上板接触的流体黏附于上板，并与上板同速移动，而与下板接触的流体黏附于下板亦固定不动.只要两板间距 h 和平移速度 U 都选择得恰当的小，那么，两板间的各流体薄层将在上板的带动下，一层带一层地作平行于平板的流动，其流动速度如图 1-2 所示，由上及下逐层递减而呈线性分布：$u=u(y)$.

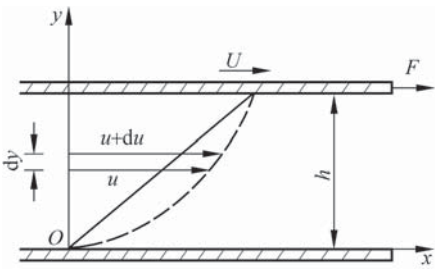


图 1-2 流体黏性实验

上述实验表明，使上板平移的外力 F 的大小与平移速度 U 以及平板表面积 A 成正比，而与两板间距 h 成反比，即

$$F \propto \frac{AU}{h}.$$

牛顿通过大量的实验，把结果总结为一个数学表达式

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}. \tag{1-3}$$

这就是著名的牛顿黏性定律，也称牛顿内摩擦定律.当两板间流体速度分布可以近似假定为线性分布时，$\tau = F/A$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = U/h$.式(1-3)中，$\tau$ 是作用在单位接触面积流体上的内摩擦力，称为黏性切应力，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ 称为速度梯度或剪切应变率，μ 称为动力黏度或动力黏性系数.

式(1-3)适用于有黏性流体的一维平行层状流动.在 3.4 节中，将把它推广到黏性流体的任意流动状态.

1.3.3 流体的黏度

流体的动力黏度 μ 是由流体本身固有的物理性质所决定的量，其值是流体黏性大小的一种直接度量，也是流体在运动中抵抗剪切变形能力强弱的一种度量.在相同的环境条件下，μ 大表示黏性大，反之亦然，μ 的单位是 Pa·S，即 N·S/m^2.

不同流体的 μ 值不同，μ 值主要通过实验或专门的黏度计测量给出，同一种流体的 μ 值一般随压力和温度的不同而变化.实验表明，压力的变化对 μ 的影响较小，在低于 10 个大气压的变化范围内，压力变化的影响可忽略不计.但温度的变化对 μ 的影响较大，而且液体和气体的动力黏度 μ 随温度的变化呈现出相反的趋势，液体的动力黏度随温度的升高而减小，气体的动力黏度随温度的升高而增大.已有不少的实验曲线、图表和经验公式给出动力黏度 μ 随温度变化的结果，例如，纯水的动力黏度与温度的经验关系式为

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0.0337t + 0.000221t^2},$$

式中，$\mu_0=1.792\times10^{-3}$ Pa·S，是纯水在 $t=1$℃时的动力黏度.在小于 10 个大气压的低压情况下，气体的动力黏度与温度的经验关系式为

$$\mu=\mu_0\frac{273+C}{T+C}\left(\frac{T}{273}\right)^{3/2},$$

式中，T 是气体的热力学温度(K)，C 是按气体种类给出的常数，μ_0 是气体在 $T=273$K 时的动力黏度.对于空气，$C=111$，$\mu_0=1.71\times10^{-5}$Pa·S.

在流体力学中，除了动力黏度 μ，还常用到运动黏度 ν，它定义为：$\nu=\mu/\rho$，单位是 m^2/s.运动黏度没有明确的物理意义，ν 的大小不是流体黏性大小的直接度量，它的引入只是为了公式书写简便而已.不过，我国现行的机械油牌号数与运动黏度有关联，比较粗略地说，所谓的××号机械油就表示该机械油在 50℃时的运动黏度约为纯水在 20.2℃时运动黏度的××倍.

表 1-2 给出的是一些常见流体的动力黏度和运动黏度值，从表中可以看到，液体的动力黏度都要比气体大，但对于常见的水与空气，动力黏度都不大.

表 1-2　几种常见流体的动力黏度和运动黏度值

流体	温度/K	动力黏度 μ/(Pa·S)	运动黏度 ν/(m^2/s)
空气	300	1.846×10^{-5}	1.590×10^{-5}
水蒸气	400	1.344×10^{-5}	2.426×10^{-5}
水	293	1.005×10^{-3}	1.007×10^{-6}
水银	300	1.532×10^{-3}	1.113×10^{-7}
汽油	293	0.310×10^{-3}	4.258×10^{-7}
润滑油	300	0.486	0.550×10^{-3}

1.3.4　牛顿流体与非牛顿流体

式(1-3)表示了黏性流体作一维平行剪切流动时，流体中的黏性切应力与剪切应变率成线性关系.但大量实验又表明，在同样的流动状况下，并不是所有的流体都能满足这个牛顿黏性定律.在流体力学中，通常把能服从牛顿黏性定律的流体称为牛顿流体，而把有黏性但不服从牛顿黏性定律的流体称为非牛顿流体.在自然界和工程中，常见的水、空气、水蒸气、各种气体和润滑油等都属于牛顿流体，但牛奶、蜂蜜、油脂、油漆、高分子聚合物溶液、水泥浆和动物血液等则属于非牛顿流体.本书只涉及牛顿流体.

1.3.5　无黏性流体的假设

一切真实的流体都具有黏性，但流体力学的发展史和应用实践表明，并不是所有的流体力学应用问题都必须考虑流体的黏性.根据式(1-3)，当流体的动力黏度很小而运动的速度梯度不大，或者当运动的速度梯度很小而流体的动力黏度不大时，流体中的黏性切应力就很小(或者与其他的作用力相比将是比较小的)，此时，往往可以忽略其黏性效应.这种在流动中忽略黏性效应的流体称为无黏性流体或理想流体，此时可以简单地令流体的动力黏度 $\mu=0$.把黏性流体假设为无黏性流体，即用理想流体替代真实流体，将使问题的处理变得简

单，因而可以比较容易地得到流动的基本规律.对于一些实际流动，如液体表面波、不脱体绕某个物体流动的压力分布及产生的升力等问题的研究中，用无黏性流体假设所得到的结果具有足够的精确度，但是，用无黏性流体的假设不能解释流动中的阻力以及能量损失实质等问题.

对于那些黏性效应不能忽略的流动问题，比较简单而实用的处理方法就是先假设流体无黏性，在得到流动的基本规律后，再用近似理论或实验方法对黏性效应进行补偿和修正.

1.3.6 流体的导热性

流体中的传热现象主要以三种方式进行：热辐射、热对流和热传导.热辐射是通过电磁波在流体中产生热量，在绝大多数流动问题中可以不考虑热辐射，但在少数确实存在热辐射的流动中，往往把它作为已知的热源项处理.热对流是由于流体宏观运动产生的热量迁移，它分自然对流和强迫对流两种.只有热传导是流体固有的物理性质，它是由于流体分子的热运动所产生的热能的输运现象.

无论流体运动与否，当流体中的温度分布不均匀时，由于分子的热运动，流体的热能从温度高的一层流体向温度低的一层流体输运，这种热能的输运性质称为流体的导热性.

表征流体导热性的物理定律就是傅里叶(Fourier)热传导定律，其数学表达式为

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T, \tag{1-4}$$

式中，$\boldsymbol{q}$ 是单位时间内通过单位面积流体的热量(又称热流密度矢量)；∇T(或写成 grad$T$) 称为温度梯度，它也是一个矢量；k 称为流体的导热系数，或热导率，一般流体的导热性是各向同性的，因而它是一个标量；式中负号表示热量的流向与温度梯度的方向相反.热流密度的单位是 $\mathrm{W/m^2}$，即 $\mathrm{J/(s\cdot m^2)}$，温度梯度的单位是 K/m，因而导热系数的单位是 $\mathrm{W/(m\cdot K)}$.

当流体中的温度分布为一维时，例如 $T=T(y)$，则式(1-4)简化为一维的热传导定律

$$q_y = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}.$$

不同的流体，导热系数 k 值也不同，同一种流体的 k 值一般随压力和温度的不同而变化，它的值通过实验来测定.

通常情况下，液体的导热性要比气体好.但在大多数流动问题中，由于流动中的温度梯度较小，或者由于流动速度较快、流体来不及进行热传导等，常常可以忽略导热性，此时简单地令导热系数 $k=0$.忽略导热性的流体(流动)称为绝热流体(流动).对于假定为无黏性不可压缩的流体，它也必定可以假定为绝热流体，无黏性绝热流体的流动必定是等熵流动.

1.4 流体运动的两种描述方法及互相转换

在 1.1 节中提到，通常把充满运动流体的空间称为流场.

根据流体的连续介质假设，在流场中，任一时刻、任一空间点上，总有且只有一个流体质点存在，即一个空间点对应一个流体质点.因此，描述流体运动就有两种不同着眼点的方法，分别称为拉格朗日(Lagrange)描述法和欧拉(Euler)描述法.

1.4.1 拉格朗日描述法

这是一种着眼于流体质点的描述方法.通过对各流体质点的运动规律(也就是它们的位置随时间变化的规律)的观察来确定整个流场的运动规律.由于整个流场是由无数密集分布的流体质点所组成,因此,采用这种描述法时,首先必须用某种编号方法来区别不同的流体质点.因为每一时刻,每一个流体质点都占有唯一确定的流场空间位置,因此通常利用初始时刻 $t=t_0$ 时,流体质点所处的空间坐标(a,b,c)作为区分不同流体质点的标号参数.在人为选定的某种空间坐标系中,一个流体质点只有一组固定不变的(a,b,c)值,即不同的(a,b,c)值代表不同的流体质点.有了流体质点的标号参数后,其运动规律若用矢量形式给出,则为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t), \tag{1-5}$$

式中,$\boldsymbol{r}$ 是流体质点的位置矢径;(a,b,c)称为拉格朗日变数或随体坐标.式(1-5)可在选定的空间坐标系中写成标量形式,例如,在直角坐标系中有

$$\left.\begin{aligned} x&=x(a,b,c,t),\\ y&=y(a,b,c,t),\\ z&=z(a,b,c,t), \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式(1-6)中的(a,b,c)就是指 $t=t_0$ 时$(x,y,z)=(a,b,c)$.

在拉格朗日描述中,流体质点所具有的任一物理量 B(如速度、压力、密度、温度等)都将表示为

$$B=B(a,b,c,t). \tag{1-7}$$

给出或者求得式(1-5)~式(1-7)这样的表达式是拉格朗日描述法的关键所在.

1.4.2 欧拉描述法

这是一种着眼于流场空间点的描述方法.通过在流场中各个固定空间点上对流动的观察,来确定流体质点经过该空间点时其物理量的变化规律.在同一个空间点上,虽然在不同的时刻被不同的流体质点所占据,该点上的物理量随时间变化,但所观察到的物理量总是与该空间点位置相联系的.如果在所有不同的空间点上进行同样的观察,就可以获得整个流体物理量的空间分布及变化规律.显然,采用欧拉描述法时,流体质点的物理量 B 都将表示为空间坐标和时间的函数:

$$B=B(\boldsymbol{r},t)=B(q_1,q_2,q_3,t), \tag{1-8}$$

式中,(q_1,q_2,q_3)称为欧拉变数或空间坐标,$\boldsymbol{r}$ 是空间坐标点的矢径.在直角坐标系中,$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$(q_1,q_2,q_3)=(x,y,z)$,于是

$$B=B(x,y,z,t), \tag{1-9}$$

式(1-8)或式(1-9)表示了 t 时刻流场各物理量的分布函数,它们所构成的是一个物理量的场,例如,速度场、加速度场、压力场和密度场等.

给出或者求得各物理量的分布函数是欧拉描述法的关键所在.对于运动流体来说,最关键的物理量是速度场 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)$.在直角坐标系中,习惯将 $\boldsymbol{V}$ 写成 $\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$,于是 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(x,y,z,t)$,或者

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y,z,t),\\ v &= v(x,y,z,t),\\ w &= w(x,y,z,t). \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

1.4.3 拉格朗日描述法与欧拉描述法之间的联系

两种描述法只是着眼点不同，实质上是等价的.如果标号参数为(a,b,c)的流体质点，在t时刻正好到达(x,y,z)这个空间点上，则有

$$B = B(x,y,z,t) = B[x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t),t] = B(a,b,c,t). \tag{1-11}$$

可见两者描述的是同一种流动，这说明两种描述法之间存在联系，可以互相转换(见1.5.3节).

1.5 质点的随体导数

在流体力学问题中，经常需要求解流体质点的物理量随时间的变化率，这种变化率称为质点的随体导数，也称为物质导数或质点导数.顾名思义，随体导数就是跟随流体一起运动时所观察到的流体物理量随时间的变化率.

1.5.1 拉格朗日描述中的随体导数

在拉格朗日描述中，流体质点的物理量表示为$B=B(a,b,c,t)$，其随体导数很直观，就是B对时间的偏导数：$\partial B/\partial t$.因为(a,b,c)与时间t无关，所以，$\partial B/\partial t = \mathrm{d}B/\mathrm{d}t$.例如，在拉格朗日描述中，流体速度$\boldsymbol{V}$就是质点的位置矢径$\boldsymbol{r}$对时间的偏导数

$$\boldsymbol{V}(a,b,c,t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}(a,b,c,t). \tag{1-12}$$

流体加速度$\boldsymbol{a}$则为$\boldsymbol{V}$对时间的偏导数

$$\boldsymbol{a}(a,b,c,t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{V}(a,b,c,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{r}(a,b,c,t). \tag{1-13}$$

在直角坐标系中，式(1-12)和式(1-13)可写成

$$\left.\begin{aligned} u(a,b,c,t) &= \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t},\\ v(a,b,c,t) &= \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t},\\ w(a,b,c,t) &= \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

和

$$\left.\begin{aligned} a_x(a,b,c,t) &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\\ a_y(a,b,c,t) &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\\ a_z(a,b,c,t) &= \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

1.5.2 欧拉描述中的随体导数

在欧拉描述中，任一流体物理量 B 在直角坐标系中表示为 $B=B(x,y,z,t)$，这里的 (x,y,z) 可以有双重意义，一方面它代表流场的空间坐标，另一方面它又代表 t 时刻某个流体质点的空间位置.根据随体导数的定义，从跟踪流体质点的角度看，x,y,z 应视为时间 t 的函数.因此，物理量 B 随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{D}B(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial t}.$$

利用式(1-14)，上式为

$$\frac{\mathrm{D}B}{\mathrm{D}t}=u\frac{\partial B}{\partial x}+v\frac{\partial B}{\partial y}+w\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{1-16}$$

式(1-16)可以写成与坐标系无关的矢量表达式

$$\frac{\mathrm{D}B}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial B}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)B, \tag{1-17}$$

其中，$\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)$，$\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 称为随体导数或全导数；$\dfrac{\partial}{\partial t}$ 称为局部导数或当地导数，表示流场的非定常性，如果流动是定常的，则有 $\dfrac{\partial}{\partial t}=0$；$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)$ 称为迁移导数或位变导数，表示流场的非均匀性，如果 $\nabla B=0$，则表示 B 场是均匀的.∇ 称为哈密顿(Hamilton)算子，它具有矢量和微分的双重性质，在直角坐标系中，$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

根据式(1-17)，在欧拉描述中，流体质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}. \tag{1-18}$$

式(1-18)说明，在流场的欧拉描述中，流体质点的加速度由两部分组成：第一部分 $\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}$ 称为局部加速度或当地加速度，它表示在同一空间点上流体速度随时间的变化率，对于定常速度场，有 $\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}=0$；第二部分 $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$ 称为迁移加速度或位变加速度，它表示在同一时刻由于不同空间点的流体速度差异而产生的速度变化率，对均匀的速度场，有 $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=0$.

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{a}(x,y,z,t)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{V}(x,y,z,t)=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial z}, \tag{1-19}$$

或写成分量形式

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\ a_y&=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\ a_z&=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

式(1-18)在柱坐标系和球坐标系中的表达式见附录Ⅱ.

1.5.3 拉格朗日描述法与欧拉描述法的互相转换

拉格朗日描述法与欧拉描述法之间具有联系，可以互相转换.

1. 由拉格朗日描述转换为欧拉描述

在直角坐标系中，这个转换过程可以归结为：已知流体质点的运动规律

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t),\\ y &= y(a,b,c,t),\\ z &= z(a,b,c,t), \end{aligned}\right\} \tag{1-21}$$

以及流体物理量的拉格朗日描述 $B=B(a,b,c,t)$，求流体物理量的欧拉描述 $B=B(x,y,z,t)$.

对于式(1-21)，如果其函数行列式满足下列关系：

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial a}\\ \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial b}\\ \dfrac{\partial x}{\partial c} & \dfrac{\partial y}{\partial c} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}\neq 0 \text{ 或 } \infty,$$

则可以从式(1-21)反解得到

$$\left.\begin{aligned} a &= a(x,y,z),\\ b &= b(x,y,z),\\ c &= c(x,y,z), \end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

把式(1-22)代入 $B=B(a,b,c,t)$即完成了转换.

当式(1-21)在形式上比较简单时，这种转换也就比较容易.

例 1.1

已知一平面流动的拉格朗日描述为

$$x=a\mathrm{e}^{t},\quad y=b\mathrm{e}^{-t}, \tag{①}$$

求流动速度和加速度的欧拉描述.

解 从已知条件可见，在本例中，$t=0$：$(x,y)=(a,b)$，根据式(1-14)和式(1-15)，该流动的速度和加速度的拉格朗日描述为

$$u=\frac{\partial x}{\partial t}=a\mathrm{e}^{t},\quad v=\frac{\partial y}{\partial t}=-b\mathrm{e}^{-t}, \tag{②}$$

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}=a\mathrm{e}^{t},\quad a_y=\frac{\partial v}{\partial t}=b\mathrm{e}^{-t}, \tag{③}$$

按求解程序，首先要计算式①的函数行列式以判别是否存在单值解.

因为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial a}\\ \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix}=1\quad(\neq 0,\infty)$$

所以，可反解得到

$$a = xe^{-t}, \quad b = ye^{t}. \tag{④}$$

本例中，式①很简单，不通过上述程序也立即可得式④.

将式④代入式②和式③，即可得速度和加速度的欧拉描述

$$u = x, \quad v = -y, \tag{⑤}$$

$$a_x = x, \quad a_y = y, \tag{⑥}$$

式⑥也可以从式⑤出发，根据随体导数公式(1-20)来计算.

2. 由欧拉描述转换为拉格朗日描述

这种转换的最典型过程就是已知在直角坐标系中，流动的速度场(也就是欧拉描述)为：$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x,y,z,t)$，或者已知：$u = u(x,y,z,t)$，$v = v(x,y,z,t)$，$w = w(x,y,z,t)$和$B = B(x,y,z,t)$，求流体质点的运动规律及$B = B(a,b,c,t)$.

根据式(1-12)或式(1-14)，流体质点的速度为$\boldsymbol{V} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$，或者

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= u(x,y,z,t), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= v(x,y,z,t), \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= w(x,y,z,t), \end{aligned}\right\} \tag{1-23}$$

在u、v、w已知的情况下，式(1-23)构成一个一阶的常微分方程组.

求解后可得

$$\left.\begin{aligned} x &= x(c_1,c_2,c_3,t), \\ y &= y(c_1,c_2,c_3,t), \\ z &= z(c_1,c_2,c_3,t), \end{aligned}\right\} \tag{1-24}$$

式中的c_1，c_2，c_3为积分常数，它们应由初始条件来确定.若设$t = t_0$(可根据需要自定，通常设$t = 0$)时，$(x,y,z) = (a,b,c)$，即设

$$\left.\begin{aligned} a &= x(c_1,c_2,c_3,t_0), \\ b &= y(c_1,c_2,c_3,t_0), \\ c &= z(c_1,c_2,c_3,t_0), \end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

解式(1-25)可得

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= c_1(a,b,c,t_0), \\ c_2 &= c_2(a,b,c,t_0), \\ c_3 &= c_3(a,b,c,t_0). \end{aligned}\right\} \tag{1-26}$$

把式(1-26)代入式(1-24)即得到欧拉变数与拉格朗日变数之间的关系式

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t), \\ y &= y(a,b,c,t), \\ z &= z(a,b,c,t). \end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

这就是流体质点的运动规律，也就是运动的拉格朗日描述.只要把式(1-27)代入$B = B(x,y,z,t)$就完成了转换.在上述转换过程中，获得一阶常微分方程组式(1-23)的解析解是关键所在.

例 1.2

已知一平面流动的速度分布(即欧拉描述)为

$$u=x+t,\quad v=-y-t, \tag{①}$$

和初始条件：$t=0$ 时 $(x,y)=(a,b)$，求流动速度和加速度的拉格朗日描述.

解 根据式(1-23),有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+t, \tag{②}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y-t, \tag{③}$$

在本例中,式②和式③为各自独立的一阶常微分方程,可分别求解得到

$$\left.\begin{aligned}x&=c_1\mathrm{e}^{t}-t-1,\\ y&=c_2\mathrm{e}^{-t}-t+1.\end{aligned}\right\} \tag{④}$$

根据已知的初始条件：$t=0$ 时 $(x,y)=(a,b)$,即得

$$c_1=a+1,\quad c_2=b-1, \tag{⑤}$$

代入式④得

$$\left.\begin{aligned}x&=(a+1)\mathrm{e}^{t}-t-1,\\ y&=(b-1)\mathrm{e}^{-t}-t+1.\end{aligned}\right\} \tag{⑥}$$

这是流体质点的运动规律,也就是流动拉格朗日描述的关键表达式.

若要求速度和加速度的拉格朗日描述,可对式⑥直接求偏导得到

$$u=\frac{\partial x}{\partial t}=(a+1)\mathrm{e}^{t}-1,\quad v=\frac{\partial y}{\partial t}=-(b-1)\mathrm{e}^{-t}-1,$$

$$a_x=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=(a+1)\mathrm{e}^{t},\quad a_y=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=(b-1)\mathrm{e}^{-t}.$$

需要强调的是,拉格朗日描述法与欧拉描述法是同一种流动的两种描述法,在解决具体流动问题时,一般只要选择其中一种即可.在流体的连续介质假设下,采用欧拉描述法要比拉格朗日描述法优越,其原因有三条：一是欧拉描述法表示的是物理量的场,便于采用场论这一数学工具来研究;二是采用欧拉描述法时,流动加速度是一阶导数,而采用拉格朗日描述法时变为二阶导数,换言之,采用欧拉法描述控制流体运动的偏微分方程组要比采用拉格朗日描述法低一阶,相应的边界条件和数学处理会变得容易一些;三是在大多数的工程实际流动中,并不关心每一个流体质点的来龙去脉.如果有的问题一定要求出每一个流体质点的运动规律,那么,只要在得到速度分布后,通过从欧拉描述到拉格朗日描述的转换即可.

本书在以后的内容中,若没有特别说明,均采用欧拉描述法.

1.6 迹线与流线、流管与流量

在表示流场的理论分析、实验或数值计算结果时,常常采用直观形象的几何图像来描述,其中用得最多的是迹线、流线和脉线.

1.6.1 迹线

迹线是流体质点在流场中运动的轨迹，也就是流体质点运动位置的几何表示.显然，迹线的概念是着眼于流体质点，因此，采用拉格朗日描述法时，质点的位置矢径表达式：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t)$，或在直角坐标系中的分量表达式：

$$x=x(a,b,c,t),\quad y=y(a,b,c,t),\quad z=z(a,b,c,t),$$

就是流体质点迹线的参数方程.例如，在例 1.1 中，$x=a\mathrm{e}^{t}$，$y=b\mathrm{e}^{-t}$，就表示了 $t=0$ 时位于 (a,b) 点上的流体质点的运动轨迹.在本例中可消去 t，则得：$xy=ab$，说明在此流动中，流体质点的迹线是一条平面双曲线，凡是 $t=0$ 时位于 (a,b) 点上的流体质点都将沿此双曲线运动.

当流动采用欧拉描述时，求流场中迹线的过程就是从欧拉描述转换为拉格朗日描述的过程.因此，迹线的微分方程可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{V}\mathrm{d}t, \tag{1-28}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是迹线上的微元弧长矢量，$\boldsymbol{V}$ 是在欧拉描述下的速度矢量.

在直角坐标系中，式(1-28)可以写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=u(x,y,z,t),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=v(x,y,z,t),\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=w(x,y,z,t),\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)}=\mathrm{d}t. \tag{1-30}$$

只要注意到式(1-28)～式(1-30)中，应把 x,y,z 都看成 t 的函数，通过求解常微分方程组就可以得到迹线的代数表达式.

1.6.2 流线

流线是流场中这样的一条曲线：某一时刻，位于该曲线上的所有流体质点的运动方向都与这条曲线相切.显然，流线是流体运动速度分布的几何表示.流线的微分方程可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}=0, \tag{1-31}$$

式中，$\boldsymbol{V}$ 为某一时刻 t、流场中任一点处的速度矢量，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为通过该点的流线上的微元弧长矢量，根据流线的定义，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,//\,\boldsymbol{V}$，故得式(1-31).

在直角坐标系中，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$，因而有

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)}. \tag{1-32}$$

这是 t 时刻流线的微分方程，积分后就是流线方程.需要指出的是，流线是对同一时刻而言的，因此，式(1-32)在积分时，应将时间 t 看成常参数(参变量).

例 1.3

已知一平面流动的速度分布为

$$u=-y+t\ ,\ v=x, \qquad ①$$

求：(1) $t=0$ 时，过平面(1,1)点的流体质点的迹线；

(2) $t=0$ 时，过平面(1,1)点的流线，并以图示之.

解 (1) 由迹线微分方程式(1-29)得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+t, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x. \tag{3}$$

和例 1.2 不同，在本例中，式②和式③是互相耦合的，不能各自独立求解.通过式③两边再对 t 求导一次，并将式②代入，可得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=t. \tag{4}$$

这是一个二阶线性非齐次的常微分方程，其解为

$$y=c_1\sin t+c_2\cos t+t, \tag{5}$$

再由式③得

$$x=c_1\cos t-c_2\sin t+1. \tag{6}$$

对于 $t=0$ 时，过(1,1)点的流体质点，可得积分常数 $c_1=0$，$c_2=1$，则所求迹线(参数)方程为

$$\left.\begin{aligned}x&=1-\sin t,\\ y&=\cos t+t,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

或者化为

$$(1-x)^2+(y-t)^2=1. \tag{8}$$

(2) 由流线微分方程式(1-32)得

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y+t}=\frac{\mathrm{d}y}{x}, \tag{9}$$

即

$$x\,\mathrm{d}x=(t-y)\mathrm{d}y.$$

由于上式积分时，将 t 看作常参数，因此有

$$x^2+(y-t)^2=c, \tag{10}$$

式中，c 是积分常数，由某时刻流线上通过的已知点位置来确定.不同的常数代表同一时刻过不同点的流线，因此，同一时刻，整个流场中将会有无数多条流线(流线簇)构成流动图景，称为流谱.对于本例所求的 $t=0$，由式⑩得到：$x^2+y^2=c$，说明在本例中，$t=0$ 时流场中的流谱是如图 1-3 所示的以原点为中心的同心圆簇.

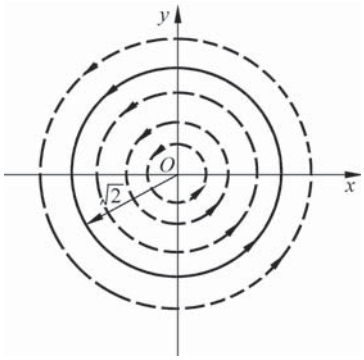


图 1-3　流线簇

对于过(1,1)点的流线，则根据式⑩，由 $(x,y)=(1,1)$ 的条件可以得到 $c=1+(1-t)^2$，于是流线为 $x^2+(y-t)^2=1+(1-t)^2$，说明该流动中，过(1,1)点的流线随时间 t 而变化.

对于 $t=0$ 时，过(1,1)点的流线，则为 $x^2+y^2=2$ 的这条流线，该线为图 1-3 中的实线.在画流线时，要同

时画上流动方向，否则就会失去画流线的意义.如果把连续的流线改用带箭头的间断短线来表示的话，还可以用短线的长度和密集程度来表示各点上速度的大小与变化.

由流线与迹线的定义及其微分方程式并结合例 1.3，可见流线具有下列特性：

(1) 在某一时刻，过某一空间点只能有一条流线，这称为流线的唯一性.换言之，在一般情况下，流线不能相交或分支.这是因为流场中的速度具有单值性，即在某一时刻、某一点上只能有一个流体速度的大小与方向.但在流体的连续介质假设下，允许流场中在孤立的点、线、面上存在物理量的不连续，因此，流场中可能会出现三种使流线相交或分支的点，一是速度为零的点，称为驻点；二是速度趋于无穷大的点，称为奇点；三是一种使流线相切的点，即在该点上有两个方向相同而大小不同的流体速度，称为速度的间断点.

(2) 对于非定常流动，流线具有瞬时性，即过一点的流线的形状随时间而变.

(3) 在一般情况下，流线与迹线不重合.这是因为两者的概念不同，描述的微分方程形式也不同.迹线是对同一个流体质点的不同时刻而言，而流线是对同一时刻的不同流体质点而言.但是，当流动为定常时，流线与迹线在几何上重合.

例 1.4

已知一平面流动的速度分布为

$$u=-x,\quad v=y+1,$$

求一般形式的迹线与流线方程.

解 由迹线的微分方程式(1-29)可知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y+1,$$

上两式可各自独立求解得到 $x=c_1\mathrm{e}^{-t}$，$y+1=c_2\mathrm{e}^{t}$，消去 t 得到

$$x(y+1)=c_1c_2=c.$$

这就是迹线的一般形式.

由流线的微分方程式(1-32)可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{-x}=\frac{\mathrm{d}y}{y+1},$$

解之得到

$$x(y+1)=c.$$

这就是流线的一般形式，和迹线的形式相同，这是因为在本例中，$\partial u/\partial t=\partial v/\partial t=0$，流动是定常的.

1.6.3 脉线

在流场的几何描述中，还有一种叫作脉线.在一段时间内，会有不同的流体质点相继经过同一空间固定点，在某一瞬时将这些质点所处的位置点光滑连接而成的曲线就称为脉线.如果该空间固定点是一个施放染色的源点，则在某一瞬时观察到的是一条有色的脉线，因此，脉线又称染色线.在流体力学的实验技术中(详见第 11 章)，有多种使脉线可视化的方法，例如，利用随流而动的染色液、烟丝、氢气泡等来显示流动图像，通过结合现代数字摄像

技术和计算机图像处理，能使流场的几何描述更形象、更生动.

脉线的方程可仿照迹线的描述方法来导出，这里不再细述.需要强调的是，当流动为定常时，流场中的脉线、迹线和流线在几何上三者重合，此时，流场可视化得到的也就是流线和迹线.

1.6.4 流管与流束

流线只是一个几何的概念，虽然可以用流线段的长短和疏密分布来显示流速的大小与变化，但毕竟是定性的.为了定量说明在不同速度下流过的流体量，还必须引进流面、流管和流束的概念.

1. 流面

在流场中作一条不是流线又不自相交的空间任意曲线 L，在某一时刻，过此曲线的每一点作流线，这些无数多密集分布的流线所构成的曲面称为流面.流面具有与流线相仿的特性，即在某一时刻，过一条非流线的曲线只有一个流面；当流动为非定常时，过该曲线的流面形状随时间而变化.另外，流体不能穿越流面，流面如同一个不可渗透的固壁面，或者说，流体在垂直流面方向上的速度为零.

2. 流管与流束

如果上述非流线的曲线 L 是自行封闭的，则流面成为一种管状的曲面，习惯上将此管状曲面连同管内的流体合称为流管，把最外层管状流面称为流管侧表面，如图 1-4 所示.显然，流管中流体的流动就像在不可渗透的固壁面管道或槽道中的流动一样.

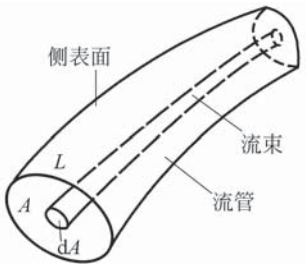


图 1-4 流管与流束

流管仍然具有与流线类似的性质，即在一般情况下流管不能相交，当流动为定常时，流管一经构成其位置和形状就保持不变.流管还有一个很重要的特性，即流管不能在流场的内部中断，因为在流场内部的流管中充满着运动的流体，流管中断，意味着通流截面趋向于零，而流管侧表面又不能让流体通过，只有使流动速度趋于无穷大，这是不符合实际的.但流管可以在流场内部自行封闭成环形，或伸长到无穷远处，或终止于流场的边界上(如固壁面或自由液面等).

以 L 为周界可以作许多的面，统称为流管的截面，它们的形状可为曲面或平面，一般来说，截面上各点的速度大小和方向不一定相同.如果在截面上的流速方向处处与该面垂直，则称这种截面为有效截面或过流断面.

截面面积很小的流管称为微元流管或流束，其极限就是一条流线.对于流束，可以认为其截面上的速度处处相同，且将此微小截面看成是平面.

3. 流量与平均流速

单位时间内通过某一空间曲面的流体体积称为体积流量；单位时间内通过某一空间曲面的流体质量称为质量流量.

如图 1-5 所示，在有限截面 A 上取一微元截面积 $\mathrm{d}A$，视 $\mathrm{d}A$ 为平面，其法向单位矢量以 $\boldsymbol{n}$ 表示，$\mathrm{d}A$ 上的速度和密度也可视为相同，以 $\boldsymbol{V}$ 和 ρ 表示，则通过 $\mathrm{d}A$ 面的体积流量和质量流量可分别表示为

$$\mathrm{d}Q = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}A,$$

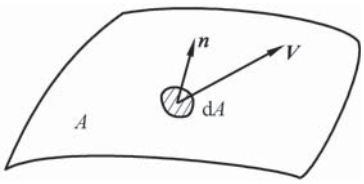


图 1-5 过 A 面的流量

与

$$\mathrm{d}Q_m = \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}A.$$

过整个 A 面的流量则为

$$Q = \int_A \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}A, \tag{1-33}$$

与

$$Q_m = \int_A \rho\ \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}A, \tag{1-34}$$

Q 的单位是 m^3/s，Q_m 的单位是 kg/s.

当流体为 ρ=常数的不可压缩流体时，则有 $Q_m=\rho Q$.因此，在不可压缩流动中通常使用体积流量，例如，在江河、水管、风机和泵等流体机械中，均采用以 m^3/s 为单位的体积流量.

由式(1-33)，还可以引入一个截面平均流速 V，它定义为

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A}\int_A \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}A. \tag{1-35}$$

因为流量 Q 的测量要比速度分布 $\boldsymbol{V}$ 的测量方便得多，所以，在工程计算中，使用平均速度 V 会带来很大的方便.

1.7 运动流体的应变率张量

在 1.3 节讨论流体的黏性时，曾经提到过速度梯度 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$，它是流体作一维平行剪切流动时，流体的一个剪切应变率分量.在本节中，将讨论流体作任意运动时的运动学特性，重点介绍运动流体的应变率张量及其各分量的物理意义.

1.7.1 亥姆霍兹速度分解定理

流体的运动是非常复杂的.为了掌握和分析流体复杂运动的规律，必须对运动进行分解.在研究固体(刚体)运动时，把运动分解为平移和转动两部分.但流体具有易流动性、可压缩性和黏性，流体在运动过程中，不仅没有一定的形状而且其体积还可能发生变化，因此，对于流动，除了平移和转动运动，一般还具有变形运动.在力学中，研究易变形物质的运动，常常采用微元体的分析方法.而在流体力学中，则是从分析流体微团的运动着手的.

所谓流体微团是指由足够多的连续分布的流体质点所组成、具有线性尺度效应的流体团.对于一定的流体微团，在初始时刻具有一定的质量和体积，但形状可根据需要取为规则的六面体或任意形状.

如图 1-6 所示，在 t 时刻，从流场中包含 M_0 点处取一个流体微团.设 M_0 点的空间坐标为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，M_0 点上流体的运动速度为

$$\boldsymbol{V}(M_0) = \boldsymbol{V}_0(x,y,z,t) = u_0(x,y,z,t)\boldsymbol{i} + v_0(x,y,z,t)j + w_0(x,y,z,t)\boldsymbol{k}$$

于同一时刻 t，在 M_0 点邻近再取一点 M，M 点的坐标点矢径为 $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}=(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$.$M$ 点上流体速度可表示为 $\boldsymbol{V}(M)=\boldsymbol{V}(x+\delta x, y+\delta y,$

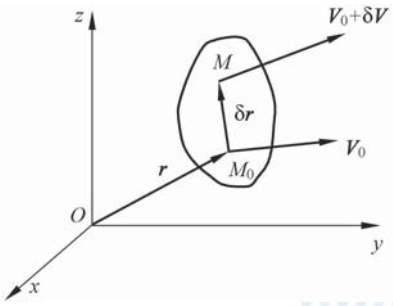


图 1-6 相对速度示意图

$z+\delta z,t)$.由于$|\delta r|$很小,当$\boldsymbol{V}$为连续分布函数且各阶偏导数存在时,则$\boldsymbol{V}(M)$可以在M_0点展开成多元函数的泰勒(Taylor)级数,在略去$(\delta x)^2$等二阶以上小量后有

$$\boldsymbol{V}(M)=\boldsymbol{V}_0+\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z=\boldsymbol{V}_0+\delta\boldsymbol{V}, \tag{1-36}$$

其中

$$\delta\boldsymbol{V}=\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z, \tag{1-37}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\delta u&=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z,\\ \delta v&=\frac{\partial v}{\partial x}\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y+\frac{\partial v}{\partial z}\delta z,\\ \delta w&=\frac{\partial w}{\partial x}\delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\delta y+\frac{\partial w}{\partial z}\delta z.\end{aligned}\right\} \tag{1-38}$$

显然,$\delta\boldsymbol{V}$表示了t时刻,M点相对于M_0点的相对运动速度.根据泰勒展开式,式(1-38)中的九个偏导数都在t时刻、$M_0(x,y,z)$点上取值.

式(1-38)也可用矩阵运算方法表示:

$$\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\\ \delta w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}&\dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial v}{\partial y}&\dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}&\dfrac{\partial w}{\partial y}&\dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}. \tag{1-39}$$

根据矩阵运算法则,可以把上式中由九个偏导数组成的方阵分解为一个对称方阵和一个反对称方阵

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}&\dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial v}{\partial y}&\dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}&\dfrac{\partial w}{\partial y}&\dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)&\dfrac{\partial v}{\partial y}&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)&\dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}+\\ &\begin{bmatrix}0&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)&0&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)&\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)&0\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{1-40}$$

式(1-40)也可以用张量分解定理来得到(见附录Ⅰ).

为了简单明了,现定义一些符号与量,令

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xy}&=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\ \varepsilon_{xz}&=\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \varepsilon_{yz}&=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\end{aligned}\right\}\tag{1-41}$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ \Omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \Omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}\tag{1-42}$$

把上述各式代入式(1-40)和式(1-39),可以得到

$$\left.\begin{aligned}\delta u&=\varepsilon_{xx}\delta x+\varepsilon_{xy}\delta y+\varepsilon_{xz}\delta z+\Omega_y\delta z-\Omega_z\delta y,\\ \delta v&=\varepsilon_{yx}\delta x+\varepsilon_{yy}\delta y+\varepsilon_{yz}\delta z+\Omega_z\delta x-\Omega_x\delta z,\\ \delta w&=\varepsilon_{zx}\delta x+\varepsilon_{zy}\delta y+\varepsilon_{zz}\delta z+\Omega_x\delta y-\Omega_y\delta x,\end{aligned}\right\}\tag{1-43}$$

或写成矢量表达式

$$\delta\boldsymbol{V}=\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Omega}\times\delta\boldsymbol{r}.\tag{1-44}$$

把式(1-44)代入式(1-36)即得

$$\boldsymbol{V}(M)=\boldsymbol{V}_0(M_0)+\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Omega}\times\delta\boldsymbol{r}.\tag{1-45}$$

这就是流体力学中的亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理,式中 $\boldsymbol{\Omega}$ 为流体的转动角速度矢量,$\boldsymbol{E}$ 为流体的应变率张量或变形速率张量.从引入过程可以看到,与速度 $\boldsymbol{V}_0(M_0)$ 一样,$\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都是 t 时刻在 $M_0(x,y,z)$ 点上取值,因此,它们也是流体中的一种物理场量.只不过 $\boldsymbol{E}$ 是一个由九个分量构成的张量物理量.按数学上的定义,$\boldsymbol{E}$ 是一个对称的二阶张量(见附录Ⅰ).

在直角坐标系中,$\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 可分别写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\Omega_x\boldsymbol{i}+\Omega_y\boldsymbol{j}+\Omega_z\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{E}&=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}&\varepsilon_{xy}&\varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx}&\varepsilon_{yy}&\varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}&\varepsilon_{zy}&\varepsilon_{zz}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{1-46}$$

1.7.2 流体微团的运动分析

流体中运动的分解并不是唯一的,只是亥姆霍兹速度分解定理具有较清晰的物理意义.

现假设所选取的流体微团是一个正六面体,这是一个适合于在直角坐标系中进行运动分析的微元体形状.为了简单明了,如图 1-7 所示,设 $abcd$ 为流体微团在 xOy 平面上的投影.根据速度分解定理,如果在 t 时刻,位于 xOy 平面上 $a(x,y)$ 点处的速度在 x 和 y 方向上的分量分别为 u 和 v,那么,同一时刻,在相邻的 b、c、d 点上的速度分量则如图 1-7(a)所标注.

由于在同一时刻矩形的 a、b、c、d 四点上的速度不同,因此,经过 Δt 时刻,此矩形将变形为近似的平行四边形,如图 1-7(b)所示.可以想象,原来所选取的正六面体流体微团,经

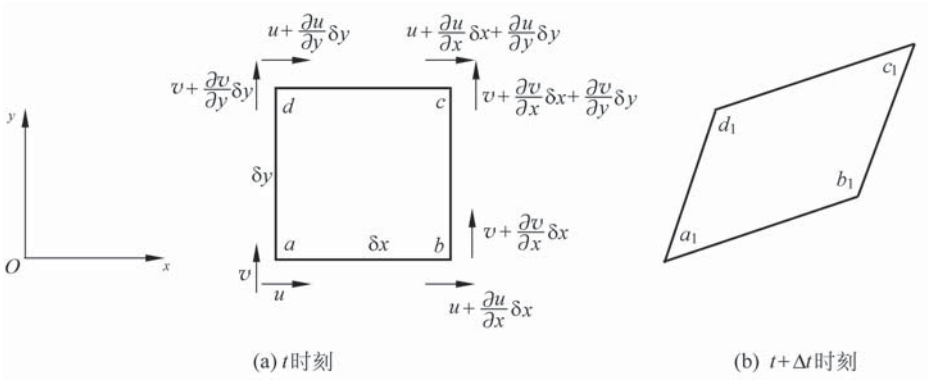


图 1-7　流体微团的运动分析

过 Δt 时刻后，将变形为近似的斜平面六面体.由于 Δt 取得无限小，因此，可以认为原来构成微元六面体的线和面保持了线的连续性和面的光滑性.

1. 线变形分析

若在流动中，只有 x 方向的速度 u 以及 $\partial u/\partial x$ 不为零，则在 Δt 时刻后，运动的流体微团只有 ab 边在 x 方向上发生了相对伸长，如图 1-8 所示.ab 边的相对伸长率——线应变率为

$$\frac{a_1b_1-ab}{ab\cdot\Delta t}=\frac{bb_1-aa_1}{ab\cdot\Delta t}=\frac{\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\Delta t-u\Delta t}{\delta x\cdot\Delta t}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x\cdot\Delta t}{\delta x\cdot\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_{xx}. \tag{1-47}$$

这说明 $\varepsilon_{xx}=\partial u/\partial x$ 表示运动流体沿 x 方向的线(正)应变率.同理可知，$\varepsilon_{yy}=\partial v/\partial y$ 表示运动流体沿 y 方向的线(正)应变率；$\varepsilon_{zz}=\partial w/\partial z$ 表示运动流体沿 z 方向的线(正)应变率.

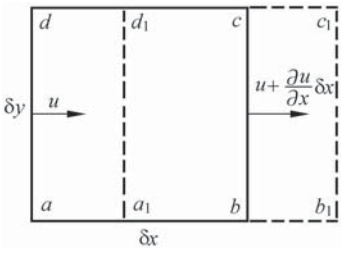


图 1-8　线变形分析

各边的相对伸长将引起流体微团体积的相对膨胀.由式(1-47)可知，微元六面体 x 方向的边长 ab，在 Δt 时刻后，伸长为 $a_1b_1=\delta x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x\Delta t=\delta x_1$，同理可得，在 y 和 z 方向的边长同时伸长为 $\delta y_1=\delta y+\dfrac{\partial v}{\partial y}\delta y\Delta t$ 和 $\delta z_1=\delta z+\dfrac{\partial w}{\partial z}\delta z\Delta t$，因此，流体微团的相对体积膨胀率为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta x_1\delta y_1\delta z_1-\delta x\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z\Delta t}\approx\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}. \tag{1-48}$$

这说明流体微团的相对体积膨胀率正好是三个线应变率之和，也就是应变率张量 $\boldsymbol{E}$ 的对角线上三个分量之和.根据数学的场论，它们又正好定义了速度矢量的散度，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1-49}$$

这就是说，在任一时刻，流场中一点上速度的散度就表示该点处运动流体的相对体积膨胀率.如果 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，则表示相对体积膨胀率为零，就是一种不可压缩流动；反之，如果流动是不可压缩的，则必有 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，如果流体又是均质的，则等价于 $\rho=$常数.

2. 角变形分析

若在流动中只有 x、y 方向上的速度 u、v 且 $\partial u/\partial y$ 和 $\partial v/\partial x$ 不为零，则在 xOy 平面上流体微团将发生如图 1-9 所示的角变形.在 t 时刻，a 点处为直角，到 $t+\Delta t$ 时刻，a 点位移到 a_1 点处成为锐角，角的减小量为 $\delta\alpha+\delta\beta$.由于 Δt 很小，$\delta\alpha$ 和 $\delta\beta$ 也很小，因而有

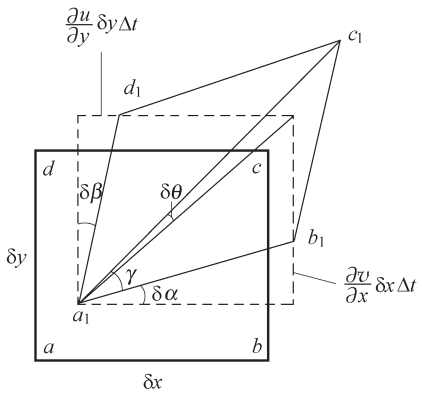


图 1-9　角变形与旋转分析

$$\delta\alpha \approx \tan(\delta\alpha)=\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\Delta t/\delta x=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t,$$

$$\delta\beta \approx \tan(\delta\beta)=\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\Delta t/\delta y=\frac{\partial u}{\partial y}\Delta t.$$

定义单位时间内 xOy 平面上角度的平均减小量为运动流体在 xOy 平面上的角变形速率——剪切应变率：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}(\delta\alpha+\delta\beta)/\Delta t=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}. \tag{1-50}$$

同理可以得到：$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ 表示运动流体在 xOz 平面上的剪切应变率；$\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ 表示运动流体在 yOz 平面上的剪切应变率.

这就是说，应变率张量 $\boldsymbol{E}$ 中另外的六个分量分别表示了在各坐标平面上的剪切应变率.

3. 流体微团的旋转分析

当流动中只有 x、y 方向上的速度 u、v 且 $\partial u/\partial y$ 和 $\partial v/\partial x$ 不为零时，流体微团除了发生角变形，还将发生如图 1-9 所示的旋转运动，在 t 时刻的对角线 ac 将在 $t+\Delta t$ 后旋转到 a_1c_1 位置.以逆时针方向旋转为正，在 Δt 时间内转角为：$\delta\theta=\gamma+\delta\alpha-45°$.由于 $\delta x\approx\delta y$，$a_1b_1c_1d_1$ 近似为菱形，则有

$$2\gamma+\delta\alpha+\delta\beta=90°,\text{从而},\delta\theta=(\delta\alpha-\delta\beta)/2\approx\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta t/2.$$

定义转动角速度分量 Ω_z 为

$$\Omega_z=\lim_{\Delta t\to 0}\delta\theta/\Delta t=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1-51}$$

它表示了流体微团以 (x,y,z) 为瞬心，绕平行于 z 轴旋转的平均角速度.相类似的分析可以解释式(1-42)中所定义的另外两个转动角速度分量的物理意义.

根据数学的场论，对于一个矢量 $\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$，其旋度(记作 $\nabla\times\boldsymbol{V}$ 或 $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$)在直角坐标系中定义为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1-52}$$

把式(1-52)与式(1-42)和式(1-46)相比较可以发现：$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{V})$.

在流体力学中，引入 $\boldsymbol{\omega}=(\nabla\times\boldsymbol{V})=2\boldsymbol{\Omega}$，并把 $\boldsymbol{\omega}$ 称为涡量，它是表征流体运动有旋的一个非常重要的物理量.

通过上述对流体微团运动的分析可以看到，由式(1-45)表示的流体运动的速度分解与自由刚体运动的速度分解相比较，具有两个重要差别：一是流体中的速度分解定理只在一点邻近的流体微团中才成立；二是流体微团除了平动和转动，还有复杂的线变形与剪切变形运动.

1.7.3 流体运动的分类

综合前面对流体的宏观物理性质、运动的描述方法和流体微团的运动分析等问题的讨论，在这里先作一些关于流体运动分类的介绍，提出一些流体运动的理论模型.至于这些理论模型应该如何在实际应用中正确建立和利用，在以后的有关章节中将作进一步的阐述.

1. 不可压缩流动和可压缩流动

这是一个从流体微团运动分析结合流体的物理性质的角度来分类的方法.如果流体在运动过程中，在质量保持不变的条件下，其体积的相对膨胀率很小，接近于零，则意味着流体密度基本保持不变，此时可以认为这种流动是不可压缩流动.令体积的相对膨胀率为零，则有 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$；密度保持不变，则可以简单记作 $\rho=$常数(时时、处处).对于如何考虑流体的可压缩效应的问题，在 1.2.3 节中已作过介绍，不再赘述.

2. 黏性流体流动和无黏性流体流动

这是一种从流体的运动和剪切变形角度来考虑的分类，基于牛顿黏性定律和流体微团的剪切变形的分析，在 1.2.5 节中已作过关于流体黏性的讨论.在实际流动问题中，还经常通过流体中黏性切应力与其他力(主要是流动惯性力)在大小量级上的比较来考虑黏性效应.关于这方面的内容将在第 6、7 章中作详细介绍.把忽略黏性效应的流动称作无黏性流体流动，简单地令 $\mu=0$.无黏性流动的研究在流体力学理论中占有重要地位.

3. 定常流动与非定常流动

这是在流动的欧拉描述下，从物理量对时间变量 t 的依赖关系来将流动分类的.流场中速度等物理量不随时间变化的流动称为定常流动，在数学上简单表示为 $\partial/\partial t=0$.从辩证的观点说，流动的非定常是绝对的，而定常是相对的，对于那些随时间的变化十分缓慢的流动，例如大容器中的小孔出流；在流量基本不变的情况下，管道或槽道中液体的流动；还有物体在流体中作匀速直线运动时引起的流体的流动等，都可以看成定常流动.一般而言，对定常流动的研究和处理比非定常流动简单得多.

4. 一维、二维和三维流动

这是在流动的欧拉描述下，按物理量对空间变量(例如 x,y,z)的依赖关系来分类的.如果流动中，所有的物理量只与一个空间变量有关则称此流动为一维流动，依此类推.在讲述牛顿黏性定律时已使用过一维流动这个概念.

在实际工程中几乎很难找到真正的一维流动，在微元流管(流束)中的流动是最接近一维的流动.在有限截面管道中的流动，有时为了简便，仅考虑按截面平均后的量，此时也可算一维流动，或称它为准一维流动.

二维流动有平面二维流动和轴对称二维流动两种，因此，把二维流动称为平面流动不确切，更何况平面流动并不一定都是二维流动.

三维流动肯定是一种空间流动，但空间流动并不一定是三维的.例如，像子弹、鱼雷等轴对称物体在流体中的运动，如果其运动方向与对称轴始终平行，则称该流动是一种轴对称二维流动.

严格地说，实际的流动绝大多数是三维流动，一维和二维流动是为了使流动的求解简化而作的假设.

5. 有旋流动与无旋流动

这是从流体微团的运动分析角度给出的分类.如果在整个流场中，流体微团的旋转角速度为零，则称这种流动为无旋流动，无旋流动又称有势流动.在流动速度分布 $\boldsymbol{V}$ 已知的情况下，可根据 $\nabla \times \boldsymbol{V}$ 是否为零来判断流动是否无旋.若流场中处处有 $\nabla \times \boldsymbol{V}=0$，则为无旋流动.在速度分布还未知的情况下，事先判别流动是否无旋就有一定难度.一般而言，黏性流体的流动总是有旋的；无黏性流体的流动可能有旋也可能无旋.当流体既忽略黏性又忽略重力时，从静止起动的流动，或者是来自无穷远处为均匀流的流动，或者是变截面管道中的一维流动等都是无黏性流体中典型的无旋流（详见第 5 章）.对无旋流动，在数学上有较成熟的处理方法，因而是一种应用广泛的流动模型.

流体的有旋运动也可以形象地称为涡运动，它们在自然界和工程中普遍存在.对黏性流体中涡运动的研究仍是 21 世纪的重要课题.除了黏性，流场的非正压性和质量力无势（如科氏力）也将引起流体的有旋运动，例如大气中的气旋和海洋环流等.

对流场的运动还有其他一些分类方法，例如，黏性流体运动中还有层流和湍流之分，可压缩流动还有亚声速流和超声速流之分等，这些在后面的内容中遇到时再作介绍.

1.8 流体中的作用力与应力张量

力学的三大要素是物质、运动和力.前面已经对流体这种物质及其物理性质和运动学特性做了介绍，接下来介绍力.

从力学的角度说，流体的静止就是力的平衡，流体的运动也是在各种力的作用下产生的，因此，分析作用在流体上的力是研究流体运动的基础.

按作用方式，作用在流体上的力分为体积力和表面力两大类.

1.8.1 体积力

体积力又称质量力，它是作用在每一个流体质点上的力，如重力、惯性力、电磁力等.体积力的大小与流体的体积或质量成正比，与该体积或质量之外的流体存在与否无关.因此，体积力是一种非接触力，具有外力的性质.

t 时刻，在流场中任取一流体团，其有限体积为 τ，表面积为 A，如图 1-10 所示.若 τ 中一点 (x,y,z) 上的流体密度为 ρ，则包围该点的微元体积 $\Delta\tau$ 内的

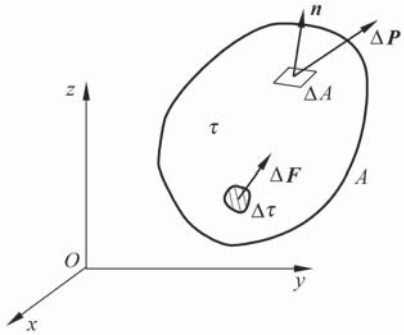


图 1-10 作用在流体上的力

流体质量为 $\Delta m=\rho\Delta\tau$.

如果作用在该质量为 Δm 的流体上的体积力为 $\Delta\boldsymbol{F}$,则可定义

$$\boldsymbol{f}(x,y,z,t)=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta m}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\rho}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta\tau}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\tau},\tag{1-53}$$

$\boldsymbol{f}$ 称为体积力分布密度,简称体积力,其单位是 $\mathrm{m/s^2}$,与加速度的单位相同,它表示 t 时刻,在(x,y,z)点上作用于单位质量流体的体积力.$\boldsymbol{f}$ 又称为单位质量力.若已知 $\boldsymbol{f}$,则作用在有限体积 τ 内流体上的总体积力为

$$\boldsymbol{F}_b=\int_\tau\rho\boldsymbol{f}\ \mathrm{d}\tau\ .\tag{1-54}$$

在大多数流体力学问题中,体积力都是已知的.如果流体在重力场中运动,而体积力只有重力,则 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}$(重力加速度);如果忽略体积力(例如,在重力场中的管道内的气体流动等),则 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$.

1.8.2 表面力与应力

表面力是外界作用在所考察流体接触界面上的力.这个界面可以是流体与流体的接触面,也可以是流体与固体的接触面.正是由于面的接触才会有力的相互作用,而且力的大小与接触面的大小成正比,与流体质量无关,因此这种力称为表面力.例如,流体中的压力、黏性剪切力等都是表面力.表面力是一种接触力,本质上具有内力的性质.但是,在流体与固体界面上的表面力,对流体来说是一种外力.

t 时刻,在 A 面上取一点(x,y,z),如图 1-10 所示.设作用在该点邻近微元表面积 ΔA 上的表面力为 $\Delta\boldsymbol{P}$,则可以定义

$$\boldsymbol{p}_n=\lim_{\Delta A\to 0}=\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}A},\tag{1-55}$$

$\boldsymbol{p}_n$ 称为表面应力矢量,简称应力,其单位是 $\mathrm{N/m^2}=\mathrm{Pa}$,它表示了 t 时刻,在点(x,y,z)上作用在以 $\boldsymbol{n}$ 为法线的单位面积流体上的表面力.

有两点需要强调:第一,$\boldsymbol{p}_n$ 的下标 n 表示所考察流体面的外法线方向,因此,作用在与之接触的面上的应力表示为 $\boldsymbol{p}_{-n}$,如图 1-11 所示.根据牛顿第三定律,有

$$\boldsymbol{p}_n=-\boldsymbol{p}_{-n},\tag{1-56}$$

这充分显示了应力的内力本质.

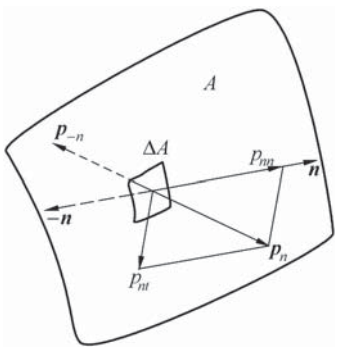


图 1-11 应力的定义

第二,在黏性不能忽略的运动流体中,$\boldsymbol{p}_n$ 的作用方向并不与考察面相垂直,此时可将 $\boldsymbol{p}_n$ 分解为垂直于作用面的法向分量 p_{nn} 以及与作用面相切的分量 p_{nt}

$$\boldsymbol{p}_n=p_{nn}\boldsymbol{n}+p_{nt}\boldsymbol{t}.\tag{1-57}$$

流体中的应力经常是需要求解的未知物理量.在以后的内容中,将对流体处于静止或不同运动状态时,应力的求解方法作详细介绍.一旦 $\boldsymbol{p}_n$ 已知(求解得到或用实验测量),则作用在整个 A 面上的表面力的合力为

$$\boldsymbol{P}=\int_A \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}A. \tag{1-58}$$

1.8.3 流场中任一点上的应力状态——应力张量

如上所述，$\boldsymbol{p}_n$ 首先是时间和空间位置的矢量函数，同时又与作用面的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 有关.

在任一时刻，过流场中任一点可以有无数多的面，从而作用在一点上就会有无数多个 $\boldsymbol{p}_n$.大量的实验表明，在静止流体或在运动的无黏性流体中，过流场一点的所有面上 $\boldsymbol{p}_n$ 的大小都相同，而力的方向始终垂直指向作用面.但在黏性流体的流场中，过一点的各个面上的 $\boldsymbol{p}_n$ 一般各不相同.那么，它们之间是否存在一定的联系？应该如何表达黏性流体的流场中一点上的应力呢？

过一点虽然可以作无数多个面，但三个面就可以唯一确定一个点.若于 t 时刻，在流场中取定一点 M 并过此点作三个互相正交且分别与某个坐标平面平行的面，例如在直角坐标系中，取三个面的外法线方向分别为 x、y、z 三个坐标方向，则作用在这三个面上的应力矢量分别表示为 $\boldsymbol{p}_x$，$\boldsymbol{p}_y$ 和 $\boldsymbol{p}_z$，由于它们又可以在各自的平面上分解为一个法向分量和两个切向分量，则形成了过一点三个面上共九个分量的状态，如图 1-12 所示.

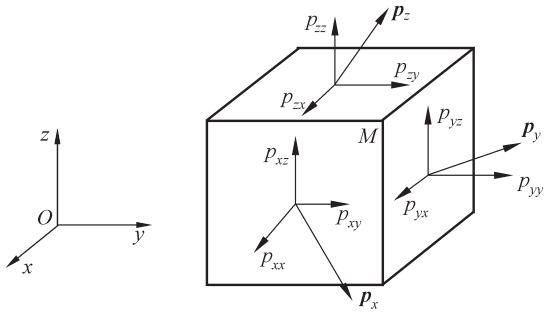


图 1-12　一点上的应力状态

当过 M 点的三个面取得很小且三个面都向 M 点收缩时，这九个量就表示了 M 点的应力状态.在直角坐标系中，它可以表示为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}, \tag{1-59}$$

或者写成

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{p}_z\boldsymbol{k}, \tag{1-60}$$

$\boldsymbol{P}$ 称为应力张量，由于它只是时间和空间坐标的函数，所以它也是流场中的一个物理量，表示了作用在流场中一点上的表面应力状态.式(1-59)是 $\boldsymbol{P}$ 的一种分量表达式，其中的各个分量用两个下标标注，第 1 个下标表示应力作用面的外法线方向，第 2 个下标表示应力的投影方向.投影方向与外法线方向一致的为正应力，与之垂直的为切应力.因此，$\boldsymbol{P}$ 中有三个正应力和六个切应力.在黏性流体的流场中，一点上的三个正应力 p_{xx}，p_{yy} 和 p_{zz} 一般互不相等，但相互垂直的两个面上的切应力互等，即 $p_{xy}=p_{yx}$，$p_{xz}=p_{zx}$，$p_{yz}=p_{zy}$（可以用动量矩定理来证明）.因此，应力张量 $\boldsymbol{P}$ 和 1.7 节引入的应变率张量 $\boldsymbol{E}$ 一样，也是一个对称的二阶张量.

式(1-60)是应力张量 $\boldsymbol{P}$ 的另一种表达形式，称为矢量并积表达式，简称并矢式(见附录Ⅰ)，它不仅可以形象地说明 $\boldsymbol{P}$ 是由三个面上的矢量所构成，而且还便于进行简单运算.由 $\boldsymbol{p}_x=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{p}_y=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{p}_z=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{P}$，可以得到

$$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}. \tag{1-61}$$

上式给出了流场中一点上的应力张量 $\boldsymbol{P}$、过这一点外法线方向为 $\boldsymbol{n}$ 的面以及该面上的应力矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 之间的关系.

1.8.4 静止流体与运动的无黏性流体中的应力张量

在 1.1 节和 1.3 节中已经说明，静止流体是不能承受切应力的，忽略流体的黏性也就忽略了流体中的黏性切应力，因此，对于静止流体与运动的无黏性流体而言，应力张量中的六个切应力分量均为零.若在直角坐标系中，记 $\boldsymbol{p}_n=p_{nx}\boldsymbol{i}+p_{ny}\boldsymbol{j}+p_{nz}\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=n_x\boldsymbol{i}+n_y\boldsymbol{j}+n_z\boldsymbol{k}$，则由式(1-61)得到

$$p_{nx}=n_xp_{xx},\quad p_{ny}=n_yp_{yy},\quad p_{nz}=n_zp_{zz}. \tag{1-62}$$

另一方面，$\boldsymbol{p}_n$ 也可以按式(1-57)分解为法向分量与切向分量两部分，由于切向分量为零，则由式(1-57)得到 $\boldsymbol{p}_n=p_{nn}\boldsymbol{n}$，或者

$$p_{nx}=n_xp_{nn},\quad p_{ny}=n_yp_{nn},\quad p_{nz}=n_zp_{nm}, \tag{1-63}$$

比较式(1-62)和式(1-63)即得

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_{nn}.$$

由于流体只能承受压力而不能承受拉力，因此令

$$-p=p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_{nn}, \tag{1-64}$$

p 称为流体压力(压强)或静压，它等同于流体质点的热力学压力.这样，静止流体或运动的无黏性流体中的应力张量为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{bmatrix}=-p\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=-p\boldsymbol{I}, \tag{1-65}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量(见附录Ⅰ).应力矢量则为

$$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{P}]=-p\boldsymbol{n}, \tag{1-66}$$

式(1-66)说明了流体中的静压(压力)有两个重要特性：①流场中一点上的静压(压力)大小各向等值，即与过同一点的作用面的方位无关，因此 p 是一个标量物理量；②一点上的静压(压力)总是垂直于指向过该点的作用面.

■ 附录Ⅰ 笛卡儿张量简介

本附录仅限于介绍二阶笛卡儿(Cartesian)张量的部分内容，目的有三个：一是认识本书或其他参考教材中出现的张量物理量；二是适当利用一些张量运算方法使方程的推导过程简单一些；三是利用张量标记方法使流体力学的基本方程组的书写变得简洁，易于记忆.

1. 张量的概念

在三维空间和选定的测量单位下，只需要用一个不依赖于坐标系的数字就能表征其性

质的量称为标量.例如,流体的质量、密度、压力和温度等都是标量;需要用 1～3 个不依赖于坐标系的数字及方向来表征其性质的量称为矢量,例如流体的速度、加速度和表面应力等都是矢量.至于究竟需要几个数字和方向,则依赖于坐标系的选择,在不同的坐标系中将有不同的数量表征.但对于所描述的同一个矢量物理量来说,不同坐标系下的不同数量表征之间必有确定的变换律.

张量可以看成矢量概念的一种推广,它也需要用几个不依赖于坐标系的数字及方向来表征其性质,在不同的坐标系中得到的不同数量表征之间也必有确定的变换律.只是张量比矢量需要用更多的数字及方向.例如,流体中的应变率张量 $\boldsymbol{E}$,它在三维空间和选定的坐标系中包含九个分量,它不仅与速度的方向有关,而且还与速度梯度的方向有关.又如流体中的应力张量 $\boldsymbol{P}$,它也有九个分量,它不仅与应力矢量的方向有关,而且还与作用面的法线方向有关.

简而言之,在三维空间和选定的坐标系中,需要同时用 3^n 个数来定义的量称为 n 阶张量.如果选定的坐标系是正交的笛卡儿坐标系(也就是通常说的直角坐标系),则称为笛卡儿张量;如果选定的坐标系是曲线坐标系(例如,柱坐标系和球坐标系等),则称为普遍张量.在本书中,只应用了二阶笛卡儿张量的部分知识.

2. 指标表示法与求和约定

在直角坐标系中,任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以写成

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \tag{1-67}$$

式中,a_x、a_y 和 a_z 是 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y 和 z 坐标方向上的分量,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 则是坐标轴 x、y 和 z 方向上的单位长度矢量,又称坐标基矢量.

为了便于使用张量标记并进行简单运算,记 $(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3)$;$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$;$(a_x,a_y,a_z)=(a_1,a_2,a_3)$,则可把矢量 $\boldsymbol{a}$ 改写为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3. \tag{1-68}$$

再进一步简化,也可以把矢量 $\boldsymbol{a}$ 表示成 $a_i(i=1,2,3)$,仅用 a_i 表示矢量 $\boldsymbol{a}$.这种表示矢量的方法称为指标表示法.指标表示法一般有上角标和下角标两种,分别称为逆变矢量和协变矢量,但在直角坐标系中,两者相同,只用下角标即可.

根据式(1-68)的结构特点,可以引入一种简化的表示法

$$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i. \tag{1-69}$$

这种表示规则称为“求和约定”,即如果在以指标表示的矢量或张量表达式中,某一指标(式(1-69)中是 i)在一项中出现两次,则表示该指标取遍 $i=1,2,3$ 的所有值,然后对不同指标值的结果求和,即 $a_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i$. 这种在同一项中重复出现的指标称为哑标,而单独出现的指标称为自由标.由于哑标取遍所有指标值并表示一种求和运算,因此,改变哑标的字母并不改变整个表达式的内容,例如:$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i=a_j\boldsymbol{e}_j$.善于利用这一性质,将会给矢量和张量运算带来方便.

3. 克罗内克尔(Kronecker)符号与置换符号

这是两个在张量理论中的重要符号.

(1) 克罗内克尔符号 δ_{ij},它定义为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1-70}$$

很容易验证，δ_{ij} 符号具有以下重要的性质：

$$\begin{aligned}&\delta_{ij}=\delta_{ji},\quad \delta_{ii}=\delta_{jj}=3,\\&\delta_{ij}\delta_{ij}=3,\quad \delta_{ij}\delta_{kj}=\delta_{ik},\\&a_i\delta_{ij}=a_j.\end{aligned}\tag{1-71}$$

(2) 置换符号 e_{ijk}，又称排列符号.它定义为

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_{ijk}\boldsymbol{e}_k,$$

$$\boldsymbol{e}_{ijk}=\begin{cases}1,\text{当三个指标为正循环轮换排列时，即只有 }\boldsymbol{e}_{123}=\boldsymbol{e}_{231}=\boldsymbol{e}_{312}=1;\\-1,\text{当三个指标为逆循环轮换排列时，即只有 }\boldsymbol{e}_{321}=\boldsymbol{e}_{213}=\boldsymbol{e}_{132}=-1;\\0,\text{有两个以上指标相同时.}\end{cases}\tag{1-72}$$

(3) $\boldsymbol{e}_{ijk}-\delta_{ij}$ 恒等式

$$\boldsymbol{e}_{ijk}\boldsymbol{e}_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jl}&\delta_{jm}&\delta_{jn}\\\delta_{kl}&\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix}.\tag{1-73}$$

通过直接计算可以得到 $\boldsymbol{e}_{ijk}$ 的一些重要性质，如

$$\boldsymbol{e}_{ijk}\boldsymbol{e}_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{il},\quad \boldsymbol{e}_{ijk}\boldsymbol{e}_{ljk}=2\delta_{il},\quad \boldsymbol{e}_{ijk}\boldsymbol{e}_{ijk}=6.$$

(4) 矢量运算和场论公式的指标表示法

设 φ 为一标量函数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为矢量函数，则有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=a_i\pm b_i\quad(i=1,2,3),\\&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot b_j\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i=a_jb_j,\\&\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=a_ib_k\boldsymbol{e}_{ijk}\boldsymbol{e}_i.\end{aligned}$$

若将哈密顿(Hamilton)算子∇ 和拉普拉斯(Laplace)算子∇^2分别写成

$$\begin{aligned}&\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i},\\&\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i},\end{aligned}$$

则可将场论中一些主要公式写成

$$\nabla\varphi=\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\\\dfrac{\partial}{\partial x_1}&\dfrac{\partial}{\partial x_2}&\dfrac{\partial}{\partial x_3}\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}=\frac{\partial a_k}{\partial x_j}e_{ijk}\boldsymbol{e}_i,$$

$$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i}.$$

对于矢量场论中的其他一些基本运算公式(恒等式)如

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{a},$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}),$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}),$$
$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}(\nabla\times\boldsymbol{b}),$$
$$\nabla\left(\frac{a^2}{2}\right)=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}),$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0,\ \nabla\times(\nabla\varphi)=0.$$

等，都可以利用指标表示法通过简单运算来验证.

(5) 二阶笛卡儿张量的标记方法

常用的二阶笛卡儿张量的标记方法有两种，在 1.7 节和 1.8 节中都已使用过.现在改用指标表示法并以应变率张量为例来作说明.

① 分量表示法或称矩阵表示法

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{bmatrix},\quad \text{或 } \boldsymbol{E}=\varepsilon_{ij}\quad (i,j=1,2,3), \tag{1-74}$$

在不引起误会的情况下，用 ε_{ij} 表示 $\boldsymbol{E}$.

② 实体表示法，又称矢量并积表示法

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_1\varepsilon_1+\boldsymbol{e}_2\varepsilon_2+\boldsymbol{e}_3\varepsilon_3=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_i,$$

由于 $\varepsilon_i=\varepsilon_{i1}\boldsymbol{e}_1+\varepsilon_{i2}\boldsymbol{e}_2+\varepsilon_{i3}\boldsymbol{e}_3=\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_j$，从而

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, \tag{1-75}$$

式中，$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 称为并积基矢量.式(1-75)中 i,j 排列顺序一般不能随便交换，换言之 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\neq\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$.

③ 单位张量、对称张量和反对称张量

二阶单位张量 $\boldsymbol{I}$ 定义为

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \tag{1-76}$$

显然，$\boldsymbol{I}$ 的分量即为 δ_{ij}.

对于分量为 B_{ij} 的二阶张量，如果 $B_{ij}=B_{ji}$，则称该张量为二阶对称张量.如果 $B_{ij}=-B_{ji}(i\neq j)$，则称为二阶反对称张量.

(6) 二阶笛卡儿张量的代数运算

在张量的代数运算过程中，根据标记方法不同，可采用矩阵运算方法或矢量运算方法.

① 张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 加减后为一同阶的张量 $\boldsymbol{C}$，即

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\quad 或\quad A_{ij}\pm B_{ij}=C_{ij}.$$

② 纯数 c 与张量 $\boldsymbol{A}$ 相乘仍为同阶的张量

$$c\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\quad 即\quad B_{ij}=cA_{ij}.$$

③ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 相乘称为内积，它有左向内积和右向内积之分，其结果为一矢量.

左向内积

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}=e_iB_{ij}\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_ka_k=\boldsymbol{e}_iB_{ij}\delta_{jk}a_k=B_{ij}a_j\boldsymbol{e}_i, \tag{1-77}$$

右向内积

$$a \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_k a_k \cdot \boldsymbol{e}_i B_{ij} \boldsymbol{e}_j = a_k \delta_{ki} B_{ij} \boldsymbol{e}_j = a_i B_{ij} \boldsymbol{e}_j = B_{ji} a_j \boldsymbol{e}_i , \tag{1-78}$$

由此可见，当 $B_{ij} \neq B_{ji}$ 时，$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}$.

在式(1-77)和式(1-78)的演算中，已经应用了张量的一种特殊运算——缩并，其结果是使张量降阶.

④ 张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的点积(点乘)，其结果仍为同阶张量：

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_i A_{ij} \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k B_{kl} \boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{e}_i A_{ij} \delta_{jk} B_{kl} \boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{e}_i A_{ij} B_{jl} \boldsymbol{e}_l . \tag{1-79}$$

由此可见，当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中有一个为非对称张量时，$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

⑤ 张量 $\boldsymbol{A}$ 与张量 $\boldsymbol{B}$ 的双点积(数乘)，其结果为一标量.

这是因为二阶张量可用矢量并积来表示，并积基矢量可以进行二次点积.用“:”来表示双点积，则

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_i A_{ij} \boldsymbol{e}_j : \boldsymbol{e}_k B_{kl} \boldsymbol{e}_l = A_{ij} B_{kl} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) = A_{ij} B_{ij} . \tag{1-80}$$

双点积可以形象地看成是并联点积，其结果就是各对应分量相乘后相加变为一个标量.作为特例

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = A_{ij} A_{ij} . \tag{1-81}$$

(7) 张量的散度和广义奥高公式

① 一个矢量的梯度是一个张量

例如，有一个速度矢量 $\boldsymbol{V} = u_i \boldsymbol{e}_i$，它的梯度是一个张量，可以用矢量并积表示为

$$\nabla \boldsymbol{V} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j , \tag{1-82}$$

$\nabla \boldsymbol{V}$ 简称为并矢张量.由此可以推断，二阶张量的梯度为三阶张量.

② 张量的散度

张量的散度可以用类似于矢量散度的方法来定义，例如对于流体中的应力张量 $\boldsymbol{P}$，如式(1-60)，用矢量并积表示法写成

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{p}_3 ,$$

则定义散度为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = \mathrm{div} \boldsymbol{P} = \frac{\partial}{\partial x_1} \boldsymbol{p}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \boldsymbol{p}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \boldsymbol{p}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{p}_i = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_j , \tag{1-83}$$

式中已利用了 $\boldsymbol{p}_i = p_{ij} \boldsymbol{e}_j$.由此可知，二阶张量的散度是一个矢量.

③ 广义奥高公式

在高等数学中，把面积分化为体积分的奥高公式为

$$\oint_A (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}A = \oint_\tau \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z ,$$

式中，A 是体积 τ 的封闭表面，$\cos\alpha$、$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是 A 的外法线方向余弦.

如果 P，Q，R 正好是某一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x，y，z 方向上的分量，例如：$\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$，则根据矢量场论的公式，可以写成一个与坐标系无关的奥高公式

$$\oint_A \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\tau , \tag{1-84}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是 A 的外法线方向单位矢量.

如果把矢量 $\boldsymbol{a}$ 改换成一个二阶张量，例如应力张量 $\boldsymbol{P}$，则上式可以推广为

$$\oint_A \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=\int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau, \tag{1-85}$$

式(1-85)可称为广义奥高公式.

(8) 二阶实对称张量的一些性质

在流体力学中出现的应变率张量和应力张量是二阶实对称张量,这类张量在数学上有特殊性质,特在此作简单介绍.

① 二阶张量的分解定理

任何一个二阶张量都可以唯一地分解为一个对称张量和一个反对称张量之和.设 B_{ij} 为任意二阶张量,则有

$$B_{ij}=\frac{1}{2}(B_{ij}+B_{ji})+\frac{1}{2}(B_{ij}-B_{ji}), \tag{1-86}$$

显然,右边第一项为对称张量,右边第二项为反对称张量.

若把式(1-40)写成:$\delta\boldsymbol{V}=\nabla\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}$,$\nabla\boldsymbol{V}$ 实际上就是一个二阶张量,称为速度梯度张量,根据式(1-82),其分量为$\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$,则可仿照式(1-86)得到

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{ij}+A_{ij}, \tag{1-87}$$

显然,ε_{ij} 就是应变率张量;A_{ij} 的分量与流体微团的旋转角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量相对应,因此,A_{ij} 称为旋转张量.

② 二阶实对称张量的性质

现以应变率张量 $\boldsymbol{E}$ 为例加以说明.

性质 1 张量的对称性不因坐标转换而改变.如果在柱坐标系和球坐标系中给出应变率张量 $\boldsymbol{E}$,它仍具有对称性(见附录Ⅱ).

性质 2 二阶实对称张量的三个主值均为实数,而且一定存在三个互相垂直的主轴.

已知应变率张量 $\boldsymbol{E}$ 为二阶实对称张量,设 $\boldsymbol{a}$ 为一个非零矢量,λ 为标量,若有 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或写为

$$\varepsilon_{ij}a_j=\lambda a_i, \tag{1-88}$$

则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向为张量 $\boldsymbol{E}$ 的主轴方向,λ 为张量 $\boldsymbol{E}$ 的主值.

为了求出主值和主轴方向,根据式(1-74),可将式(1-88)展开为

$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon_{11}-\lambda)a_1+\varepsilon_{12}a_2+\varepsilon_{13}a_3&=0,\\ \varepsilon_{21}a_1+(\varepsilon_{22}-\lambda)a_2+\varepsilon_{23}a_3&=0,\\ \varepsilon_{31}a_1+\varepsilon_{32}a_2+(\varepsilon_{33}-\lambda)a_3&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1-89}$$

a_1、a_2 和 a_3 有非零解的条件是

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_{11}-\lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\lambda & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{1-90}$$

行列式(1-90)展开是一个关于 λ 的三次方程,可以解得三个实主值 λ_1、λ_2 和 λ_3,代回到式(1-89)可解出主轴方向矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$,也正好是三个.

当三个主值 λ_1、λ_2 和 λ_3 互不相同时,与之相对应的主轴方向 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 互相垂直,则

在以主轴为坐标轴的主轴坐标系中，将 $\boldsymbol{E}$ 化为最简单的标准形式

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}. \tag{1-91}$$

性质 3 二阶实对称张量有三个不变量

当 λ_1、λ_2 和 λ_3 为式(1-90)的三个根时，有等价方程

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0, \tag{1-92}$$

式(1-92)与式(1-90)的展开式相比较，可以得到

$$\begin{aligned}I_1&=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\\ I_2&=\begin{vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varepsilon_{22} & \varepsilon_{32}\\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33}\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1,\\ I_3&=\begin{vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned} \tag{1-93}$$

因为 I_1，I_2 和 I_3 都是由标量 λ_1，λ_2 和 λ_3 所组成，它们不随坐标系的转换而改变，因此，分别称为张量 $\boldsymbol{E}$ 的第一、第二和第三不变量.把第一不变量具体应用到应变率张量 $\boldsymbol{E}$ 和应力张量 $\boldsymbol{P}$，可以看到，$\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 以及 $(p_{11}+p_{22}+p_{33})$ 都将是线性不变量 I_1.

习题

1.1 在油罐内充满石油，压力为 $1\times10^5\,\mathrm{N/m^2}$，然后再强行注入质量为 20kg 的石油后，压力增至 $5\times10^5\,\mathrm{N/m^2}$，石油的体积弹性模量 $K=1.32\times10^9\,\mathrm{N/m^2}$，密度 $\rho=880\,\mathrm{kg/m^3}$，试确定该油罐的容积为多大.

1.2 已知海平面上海水的密度 $\rho=1025\,\mathrm{kg/m^3}$，在海面以下深度 800m 处的海水压力比海平面上压力高 $8\times10^6\,\mathrm{N/m^2}$，海水的体积弹性模量 $K=2.34\times10^9\,\mathrm{N/m^2}$，试确定在深 800m 处海水的密度.

1.3 设活塞的直径 $d=12\mathrm{cm}$，活塞长度 $L=14\mathrm{cm}$，活塞与缸体之间的间隙 $\delta=0.02\mathrm{mm}$，其中充满着油，当活塞以速度 $u=0.5\mathrm{m/s}$ 运动时受到油的摩擦力 $F=8.58\mathrm{N}$，试确定油的黏性系数 μ.

1.4 两平行平板的间距 $h=1\mathrm{mm}$，其中充满油，当两板间的相对运动速度 $u=1.2\mathrm{m/s}$ 时，作用于板上的切应力为 $3500\mathrm{N/m^2}$，试求油的黏性系数 μ.

1.5 直径 $d=5\mathrm{cm}$ 的轴在轴承中空载运转，转速 $n=4000\mathrm{r/min}$，轴与轴套同心，径向间隙 $\delta=0.005\mathrm{cm}$，轴套长 $L=7.6\mathrm{cm}$，测得摩擦力矩 $M=1.197\mathrm{N\cdot m}$，试确定轴与轴套间润滑油的黏性系数 μ.

1.6 已知拉格朗日法表示的速度为

$$u=(a+1)\mathrm{e}^t-1,\ v=(b+1)\mathrm{e}^t-1;\quad \text{且 } t=0:(x,y,z)=(a,b,c).$$

试求：(1)$a=1$，$b=2$ 流体质点的运动规律；(2)以欧拉法表示此速度场；(3)流体质点的加

速度.

1.7 已知欧拉法表示的速度场为：$u=A(1+x)$，$v=B(1-y)$，式中的 A、B 均为常数.在 $t=0$：$(x,y)=(a,b)$的初始条件下，求此速度场的拉格朗日表达式.

1.8 设由欧拉法表示的流场速度分布为：$u=x+t$，$v=-y+t$，求 $t=0$ 时刻经过 $M(-1,-1)$点的迹线和流线.

1.9 已知一流动速度分布为 $u=Ay$，$v=0$，$w=0$，A 为常数.试分析该流动中流体可能有的运动形式(先求应变率张量和旋转张量中各分量后再分析).

1.10 已知流体的运动规律为 $x=Ae^{t}-t-1$，$y=Be^{t}+t-1$，$z=D$，其中 A，B，D 为常数.试确定：(1)$t=0$ 时在$(x,y,z)=(a,b,c)$处的流体质点的迹线方程；(2)任意流体质点的速度；(3)用欧拉法表示此速度场.

1.11 已知流场速度分布为 $u=A$，$v=B\cos(kx-\alpha t)$，式中 A，B，k 和 α 均为常数.试求 $t=0$ 时通过 $x=0$，$y=0$ 点的流线和迹线方程.当 k 和 α 趋于零时，试比较这两条流线和迹线.

1.12 设流场的速度分布为

$$u=4t-\frac{2y}{x^{2}+y^{2}},\quad v=\frac{2x}{x^{2}+y^{2}}.$$

试确定：(1)流场的当地加速度；(2)$t=0$ 时，在 $x=1$、$y=1$ 点上流体质点的加速度.

1.13 已知一流动速度场为

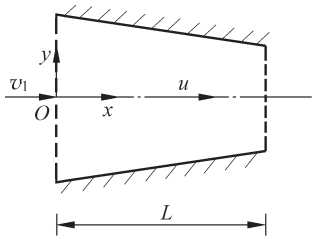
$$u=\frac{x}{1+t},\quad v=y.$$

试求：(1)流线方程；(2)在 $t=0$ 时 $x=a$、$y=b$ 流体质点的迹线.

1.14 不可压缩流体在收缩管内作定常流动，如图所示，其速度为

$$u=v_{1}\left(1+\frac{x}{L}\right),\quad v=w=0,$$

式中，v_1 为管段入口处($x=0$)的速度，L 为管段长度.试求出并比较欧拉描述与拉格朗日描述下流体运动的加速度.



1.14 题图

1.15 已知流体质点运动的轨迹为 $x=at+1$，$y=bt-1$，式中 a、b 为常数.试求流线簇.

1.16 对于以(a,b,c)为标识的流体质点，其运动规律为

$$x=ae^{-\frac{2t}{R}},\quad y=be^{\frac{t}{R}},\quad z=ce^{\frac{t}{R}},$$

式中，R 是不为 0 的常数，试讨论流动是否为定常的不可压缩流动以及是否无旋.

1.17 已知流体运动速度为

$$u=x+t,\quad v=y+t,\quad w=0.$$

试求：(1)流线簇以及 $t=1$ 时通过 $A(1,2)$点的流线；(2)在 $t=1$ 时位于 $A(1,2)$点的流体质点的迹线.

1.18 已知拉格朗日描述下的速度表达式为

$$u=(a-1)e^{t}+1,\quad v=(b-1)e^{t}+1,$$

式中 a，b 均为 $t=0$ 时流体质点所在位置的坐标.

试求：(1)$t=1$ 时流体质点的分布规律；(2)$a=0,b=2$ 这个流体质点的运动规律；(3)流体质点的加速度；(4)欧拉描述下的速度与加速度表达式，并比较之.

1.19 已知用柱坐标表示的速度场为

$$v_r=0,\quad v_\theta=\frac{c}{r},\quad v_z=0,$$

式中，c 为常数.

试求：(1)通过$(x,y)=(1,1)$点的流线方程；(2)$t=0$ 时刻通过$(x,y)=(1,1)$流体质点的迹线.

1.20 若已知 $u=ax+t^2,v=-ay-t^2,w=0$，试求流线与迹线.

1.21 设速度场为 $v_i=\dfrac{x_i}{1+t}$ $(i=1,2,3)$，证明任意时刻 t 过点 $x_i=a_i$ 的流线和 $t=0$ 时刻从 $x_i=a_i$ 出发的质点的轨迹重合.

1.22 如果一个非定常流动的速度分布表示成 $v_i/|\boldsymbol{V}|$（$|\boldsymbol{V}|$ 为速度矢量的模，$i=1,2,3$)时与时间 t 无关，试证明任何时刻的流线都和质点的轨迹重合.

1.23 某二维流动速度的大小为 $|\boldsymbol{V}|=\sqrt{2y^2+x^2+2xy}$，流线方程为 $y^2+2xy=$常数. 试求出速度分量 u 和 v 的表达式.

1.24 已知二维流动速度矢量的模 $|\boldsymbol{V}|=\sqrt{x^2+y^2}$，流线方程为 $y^2-x^2=$常数，试确定该流动的速度分布.

1.25 已知一流场中的应力分布为

$$p_{xx}=3x^2+4xy-8y^2,\quad p_{xy}=-\frac{1}{2}x^2-6xy-2y^2,$$

$$p_{yy}=2x^2+xy+3y^2,\quad p_{xz}=p_{yz}=p_{zz}=0,$$

求平面 $x+3y+z+1=0$ 上，点$(1,-1,1)$处的应力矢量 $\boldsymbol{P}_n$ 及其在该平面的法向和切向的投影值.

1.26 在流体中取一个正六面体流体微团，试用动量矩定理证明应力张量中的切应力互等.

1.27 应用动量矩定理于一个任意形状流体微团，证明应力张量满足方程 $e_{ijk}p_{jk}=0$，并由此证明 p_{ij} 为对称张量.

1.28 已知二维流动的速度场：$u=-ky,v=k(x-\alpha t)$，其中 k、α 为常数.

求：(1)流动的加速度场；(2)t 时刻的流线簇方程；(3)速度和加速度的拉格朗日表达式；(4)$t=0$ 时刻从$(1,1,1)$点处出发的流体质点的迹线；(5)应变率张量及旋转角速度，并分析流动是否定常、是否不可压缩、是否无旋.

1.29 已知流动速度场为 $u=4z-3y$，$v=3x$，$w=-4x$，试问此流体是否在作刚体运动(即处于相对静止状态).

1.30 设两个同轴圆柱间的流体作环状定常流动，与轴垂直的平面上速度分布为

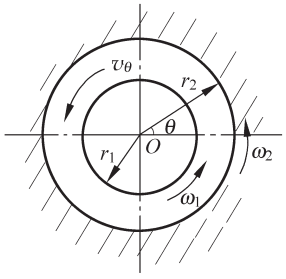
$$v_\theta=\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\left[r(\omega_2r_2^2-\omega_1r_1^2)-\frac{r_1^2r_2^2}{r}(\omega_2-\omega_1)\right],\quad v_r=0,$$

式中，r_1、r_2 与 ω_1、ω_2 分别是内外圆柱体半径及旋转角速度，θ 是平面极角，如图所示. 试求作用于柱面上的切应力.(柱坐标系下切应力表达式见附录Ⅱ)

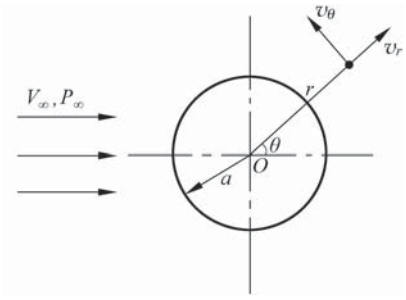
1.31 设不可压缩黏性流体缓慢地不脱体绕过一个圆球时的速度分布为轴对称分布：

$$v_r(r,\theta)=V_\infty\cos\theta\left(1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{a^3}{2r^3}\right),\quad v_\theta(r,\theta)=-V_\infty\sin\theta\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{a^3}{4r^3}\right),$$

压力 $p(r,\theta)=P_\infty-\frac{3}{2}\mu\frac{a}{r^2}V_\infty\cos\theta$，其中 V_∞，P_∞ 为常数，a 为圆球半径，r、θ 为球坐标，如图所示，求流场中的应力分布及流体对圆球的作用合力.（球坐标系中应力表达式见附录Ⅱ）



1.30 题图



1.31 题图

1.32 已知流场中应力张量为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3xy & 5y^2 & 0\\ 5y^2 & 0 & 2z\\ 0 & 2z & 0\end{bmatrix},$$

求作用于平面上 M 点$(2,1,\sqrt{3})$的应力矢量 $\boldsymbol{p}_n$，该平面在 M 点与圆柱面 $y^2+z^2=4$ 相切.

1.33 混合气体的密度和动力黏度可分别按下式计算：

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\alpha_i,\qquad \mu=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i M_i^{1/2}\mu_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i M_i^{1/2}},$$

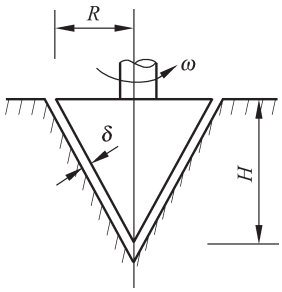
式中，α_i 为混合气体中 i 组分气体所占的体积百分数；M_i 为混合气体中 i 组分气体的分子量；ρ_i 为混合气体中 i 组分气体的密度；μ_i 为混合气体中 i 组分气体的动力黏度.现已测得锅炉烟气各组分气体的体积百分数分别为：$\alpha_1=13.6\%$，$\alpha_2=0.4\%$，$\alpha_3=4.2\%$，$\alpha_4=75.6\%$，$\alpha_5=6.2\%$.在标准状态下，各组分（种类）气体的密度和动力黏度如下表所列.试求该烟气在标准状态下的密度、动力黏度和运动黏度.

序号	i 组分气体	相对分子质量 M_i	密度/(kg·m^{-3})	动力黏度/(N·s·m^{-2})
1	二氧化碳(CO_2)	44	1.98	13.8×10^{-6}
2	二氧化硫(SO_2)	64	2.93	11.6×10^{-6}
3	氧气(O_2)	32	1.43	19.2×10^{-6}
4	氮气(N_2)	28	1.25	16.6×10^{-6}
5	水蒸气	18	0.804	8.93×10^{-6}

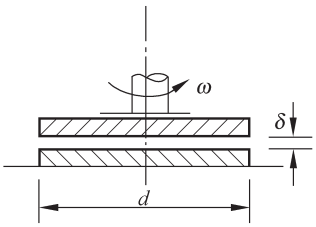
1.34 一圆锥体绕其铅垂中心轴以等角速度 ω 旋转，锥体与固壁之间的缝隙宽为 δ，中

间充满某种液体，如图所示，锥体底面半径为 R，高度为 H.现测得圆锥体等速旋转所需的总力矩为 M，试求证缝隙中液体的动力黏度为：$\mu=\dfrac{2\delta M}{\pi\omega R^3\sqrt{H^2+R^2}}$.

1.35 上下两平行圆盘，直径均为 d，间隙为 δ，间隙中液体的动力黏度为 μ.若下盘固定不动，上盘以等角速度 ω 旋转，试求证所需力矩 T 为：$T=\dfrac{\mu\pi\omega d^4}{32\delta}$.



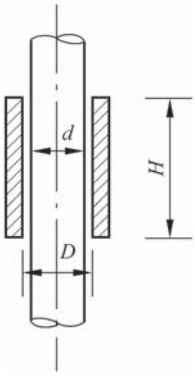
1.34 题图



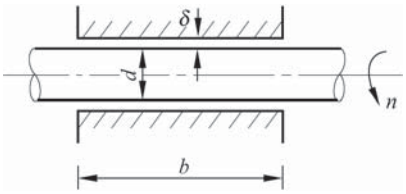
1.35 题图

1.36 一套筒长 $H=20\text{cm}$，内径 $D=5.04\text{cm}$，重量 $G=6.8\text{N}$，套在直径 $d=5\text{cm}$ 的立轴上，如图所示.套筒与轴之间润滑油的动力黏度 $\mu=0.8\text{N}\cdot\text{s/m}^2$.不计空气阻力，求套筒在自重作用下将以多大的速度沿立轴同心等速下滑？

1.37 转轴直径为 d，轴承长度为 b，轴与轴承间的缝隙宽为 δ，中间充满动力黏度为 μ 的润滑油，若轴的转速为 $n(\text{r/min})$，试求证克服油摩擦阻力所消耗的功率 N 为：$N=\dfrac{\mu\pi^3d^3n^2b}{3600\delta}(\text{W})$.



1.36 题图



1.37 题图

第2章 流体静力学

流体静力学研究流体在外力作用下，静止平衡的规律以及这些规律在工程实际中的应用.所谓静止是指流体内部宏观质点之间或流体层之间没有相对运动，达到了相对平衡，至于流体作为一个整体完全可以同刚体一样地运动.通常按流体整体相对于地球有无运动，将流体的静止分为相对静止和绝对静止.

处于静止状态的流体，流体内不存在切应力.因此，由流体静力学所得到的结论对理想流体和黏性流体都适用.

2.1 流体静压强及其特性

在静止或相对静止的流体中，流体内不存在切应力，因此只有作用在内法线方向上的表面力，即静压力.单位面积上作用的静压力称为静压强.流体的静压强具有两个重要的特性.

特性 1 流体静压强对某个表面的作用所产生的静压力必指向作用面的内法线方向.

图 2-1 表示处于静止状态的流体分离体表面 AB，若作用在 AB 面上的力 P'_s 的方向向外且不与该面垂直，则 P'_s 可以分解为一个垂直于表面的力 P_{sn} 和另外一个与表面相切的力 $P_{s\tau}$.若有拉力 P_{sn} 或剪切力 $P_{s\tau}$ 存在，流体将产生连续不断的变形即运动，这与静止前提相矛盾.所以静压力唯一可能的方向就是沿作用面的内法线方向，即图中的 P_s 力.

特性 2 静止流体内任意一点处，压强的大小与作用面的方位无关，即同一点各方向的流体静压强均相等.为证明这一特性，在静止流体内任意点 O 上取一微小四面体，如图 2-2 所示，以 O 点为顶点，斜面为 ABC，微小四面体的三个互相垂直的边长分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$.设四面体四个面上的压强各为 p_x，p_y，p_z 及 p_n，则各相应表面上的表面力为

$$P_{sx}=\frac{1}{2}p_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad P_{sy}=\frac{1}{2}p_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

$$P_{sz}=\frac{1}{2}p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad P_{sn}=p_n\mathrm{d}A_n,$$

式中，$\mathrm{d}A_n$ 为斜面 ABC 的面积.

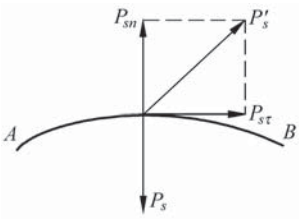


图 2-1 平衡流体的表面力

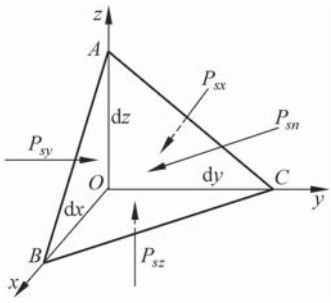


图 2-2 静止流体中的微小四面体

此外，四面体上还作用着质量力，其定义见式(1-53)，单位是 $\mathrm{m/s^2}$.设 x、y、z 向的单位质量力为 f_x、f_y、f_z，流体的密度为 ρ，则四面体的质量为 $\mathrm{d}m=\frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，所以质量力在 x、y、z 的分量各为 $\frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}zf_x$，$\frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}zf_y$，$\frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}zf_z$.

由于微小四面体在上述各力作用下平衡，于是可列出微小四面体在 x 方向上的力平衡方程 $\sum F_x = 0$，即

$$\frac{1}{2}p_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{6}\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z f_x - p_n \mathrm{d}A_n \cos(P_{sn}, x) = 0.$$

因为表面力是二阶小量，而质量力是三阶小量，因此质量力可以略去，于是

$$\frac{1}{2}p_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z = p_n \mathrm{d}A_n \cos(P_{sn}, x),$$

而

$$\mathrm{d}A_n \cos(P_{sn}, x) = \frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

代入上式得

$$p_x = p_n.$$

同理由 $\sum F_y = 0$，$\sum F_z = 0$ 可得 $p_y = p_n$，$p_z = p_n$，故有

$$p_x = p_y = p_z.$$

由于微小四面体是任取的，由上式可得出结论：从各个方向作用于一点的流体静压强大小相等，即在静止流体内任意一点处，压强的大小与作用面的空间方位无关，只是该点空间坐标的函数，即

$$p = p(x, y, z).$$

由此可知静压强不是一个矢量，而是一个标量.静压强的全微分为

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{2-1}$$

2.2 静止流体的平衡微分方程

静止流体只受到质量力和由压力产生的法向表面力的作用.下面讨论在平衡状态下这些力应满足的关系，建立表示流体平衡条件下的微分方程式.

如图 2-3 所示，在静止流体内取一平行六面体微团，它与 x、y、z 坐标轴平行的棱边各为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$，它的体积 $\mathrm{d}V$ 为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，则作用在该微团上的质量力在 x、y、z 坐标轴方向上分量各为 $\rho f_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$、$\rho f_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$、$\rho f_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

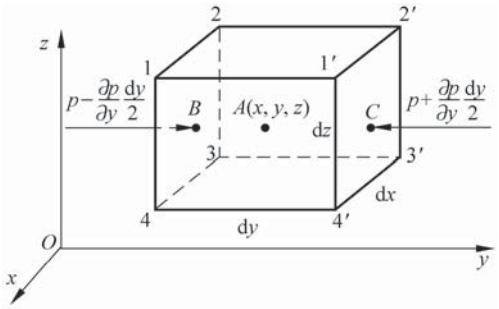


图 2-3 六面体微团

设该微元体的中心 $A(x,y,z)$ 点处的压强为 $p(x,y,z)$，由于压强是空间点坐标 x、y、z 的连续函数，则离该点处 $\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}y$ 处的压强为 $p\left(x,y\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}y,z\right)$，并且可以将 $p\left(x,y\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}y,z\right)$ 展成 $p(x,y,z)$ 表示的泰勒级数，即

$$p\left(x,y\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}y,z\right)=p(x,y,z)\pm\frac{1}{2}\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y\pm\frac{1}{8}\frac{\partial p^2(x,y,z)}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2\pm\cdots$$

如果 $\mathrm{d}y$ 为无限小量，则在上述级数中二阶及二阶以上的高阶小量项均可略去，即等号右边只取两项已足够精确，则

$$p\left(x,y\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}y,z\right)=p(x,y,z)\pm\frac{1}{2}\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

可见 1-2-3-4 面的中心点 B 的压强为 $p_B=p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y$，1′-2′-3′-4′面的中心点 C 的压强为 $p_C=p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y$.

由于微元六面体足够小，故 p_B，p_C 可作为作用在 1-2-3-4 面和 1′-2′-3′-4′面上的平均压强.因此作用在这两个面上的法向力为

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,\quad\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

由于微小六面体处于平衡状态，所以在 y 方向的合力为 0，即

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\rho\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z f_y=0.$$

同理可写出 x、z 方向的力平衡方程式，即

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\rho\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z f_x=0,$$

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\rho\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z f_z=0.$$

上式各式除以质量 $\rho\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，经整理可得单位质量流体的平衡方程式为

$$\left.\begin{aligned}f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=0,\\ f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=0,\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{2-2}$$

式(2-2)称为流体平衡微分方程式.它是由欧拉于 1755 年首先推导出来的，因此又称为欧拉平衡微分方程，它是平衡流体中普遍适用的一个基本公式，无论平衡流体受的质量力有哪种类型、流体是否可压缩、流体有无黏性，欧拉平衡微分方程式都是普遍适用的.该方程式表明：平衡流体受哪个方向的质量分力，则流体静压强沿该方向必然发生变化；反之，如果哪个方向没有质量分力，则流体静压强在该方向上必然保持不变.

将式(2-2)分别乘以 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}z$，然后相加得

$$f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p.\tag{2-3}$$

对于不可压缩流体，ρ=常数，ρ 可放进上式等号右边的微分中，所以为一全微分，因此等号左边也必为某函数的全微分.如果单位质量力与某一个坐标函数 $U(x,y,z)$ 具有下列关系：

$$f_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad f_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad f_z=-\frac{\partial U}{\partial z}.$$

则式(2-3)左端

$$f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=-\mathrm{d}U,$$

能成为坐标函数 $-U(x,y,z)$ 的全微分.

于是式(2-3)变成

$$\mathrm{d}p+\rho\mathrm{d}U=0. \tag{2-4}$$

$U(x,y,z)$ 是一个决定流体质量力的函数，称为力势函数，而具有这样力势函数的质量力称为有势力.不可压缩流体只有在有势的质量力的作用下才能保持平衡.

流体中等压力的各点所组成的平面或曲面叫等压面，等压面上 p=常数，即 $\mathrm{d}p=0$，代入式(2-3)中得到等压面的微分方程式

$$f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=0. \tag{2-5}$$

等压面有下面三个性质.

1. 等压面也是等势面

因为等压面上 $\mathrm{d}p=0$，由式(2-4)得

$$\mathrm{d}U=0,$$

即

$$U=C.$$

2. 通过任意一点的等压面必与该点所受质量力相垂直

设单位质量力的矢量为 $\boldsymbol{f}(f_x,f_y,f_z)$，在等压面上取任意微小线段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$，由矢量运算得

$$\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z.$$

由于在等压面上，上式右端为 0，所以

$$\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0.$$

两矢量本身都不为零，而它们的点积为零，则说明两矢量相垂直.由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是等压面上任选的矢量，因而等压面与质量力相垂直.当质量力仅为重力时，等压面必定为水平面.

3. 两种互不相混的流体处于平衡状态时，它们的分界面必为等压面

如果在分界面上任意取两点 A 和 B，设两点之间存在着静压差 $\mathrm{d}p$ 和势差 $\mathrm{d}U$.因为 A、B 两点都取在分界面上，所以 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}U$ 同属于两种液体.设两种不同流体的密度为 ρ_1、ρ_2，则可分别有关系式

$$\mathrm{d}p=-\rho_1\mathrm{d}U,$$
$$\mathrm{d}p=-\rho_2\mathrm{d}U.$$

因为 $\rho_1\neq\rho_2$，故上式只有当 $\mathrm{d}p=\mathrm{d}U=0$ 时才能成立.由此可见分界面必为等压面或等势面.

2.3 重力场中静止流体内的压力分布

重力场是最常见的有势力场，在很多工程技术领域，流体基本上处于重力场中，因此讨论重力场中流体平衡规律具有普遍意义.在重力场中，流体内的质量力只是向着地心的重力，它与常取的坐标轴 z 方向相反，所以

$$f_x=0,\quad f_y=0,\quad f_z=-g,$$

将上式代入式(2-3)得

$$\mathrm{d}p=-\rho g\mathrm{d}z. \tag{2-6}$$

对于均质流体 $\rho=$常数，上式积分得

$$p+\rho gz=C,$$

设 $z=H$ 时，$p=p_0$(图 2-4)，则积分常数 C 为

$$C=p_0+\rho gH,$$

代入原式得

$$p=p_0+\rho g(H-z)=p_0+\rho gh. \tag{2-7}$$

式(2-7)中 h 为液体中任一点距液面的垂直深度，又称淹深.该式表示了液体在重力作用下压强的产生和分布规律，称为不可压缩性流体的静压强基本公式或静液压强基本公式.由此可知：

(1) 在重力作用下，液体内的静压强只是坐标轴 z 的函数，压强随深度 h 的增大而增大，如图 2-4 所示.

(2) 静压强由两部分组成，即液面压强 p_0 和液体自重 ρgh 引起的压强.液面压强是外力施加于液体而引起的，可通过固体、气体或不同质量的液体对液面施加外力而产生.

(3) 当 $h=$常数时，$p=C$，即等压面是水平面.

(4) 连通容器内同一种液体内与液面平行的面上具有相等的压强，这个面称为等压面.例如图 2-5 中 $p_1=p_2=p_0+\rho gh$.

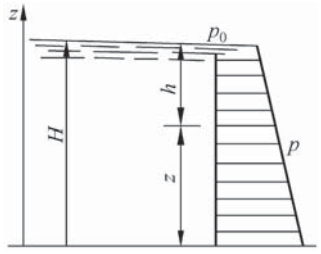


图 2-4　重力作用下流体中压力分布

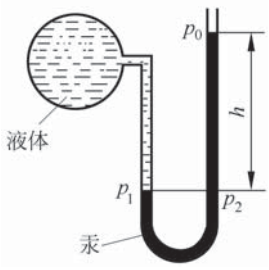


图 2-5　U 形连通容器内的等压面

(5) 帕斯卡压力传递原理：密封容器中的静止流体，由于部分边界上承受外力而产生的流体静压强将均匀地传递到液体内所有各点上去.根据这个原理，结合静压强的特性，就可推理出液体不仅能传递力，而且能放大或缩小力，且能获得任何要求方向的力.

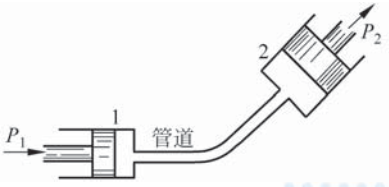


图 2-6　力的传递

如图 2-6 所示，力 P_1 通过油缸 1 的活塞使液面产生压强，这个压强沿管道传递至油缸 2 的活塞上而产生了力 P_2，力获得了传递.改变油缸 2 的位置就可获得不同方向的力 P_2.此外改变油缸 2 的截面积，可以获得不同数值的力 P_2.

2.4 静压力的计量

习惯上静压强常被称为静压力，很多测压仪表测得的都是流体静压力与大气压力之差，即($p-p_a$)，因此工程上把这个差值称为相对压力或表压，而把 p 称为绝对压力.一般工程上说的压力往往指表压而不是绝对压力.

假如绝对压力 p 小于大气压力 p_a，则相对压力为负值，此时，工程上通常用真空度 p_v 表示

$$p_v = p_a - p. \tag{2-8}$$

静压力计量单位有三种.

(1) 应力单位.在法定单位制中是 Pa = N/m^2 或 bar = 10^5 Pa，在工程制中是 kgf/cm^2，应力单位多用于理论计算.

(2) 液柱高单位.因为压力与液柱高的单位关系为 $p=\rho gh$ 或 $h=\dfrac{p}{\rho g}$，说明一定的压力 p 就相当于一定的液柱高 h，因此工程上常用液柱高来间接表示液体中某一点压力大小.液柱高单位有 mH_2O、mmHg 等.

(3) 大气压单位.标准大气压(atm)是根据北纬 45°海平面上温度为 15℃时测定的数值.

$$1atm = 760mmHg = 1.033kgf/cm^2 = 1.01325bar = 1.01325 \times 10^5 Pa.$$

另外工程制单位中规定：

$$1 \text{ 工程大气压(at)} = 1kgf/cm^2.$$

2.5 流体的相对平衡

前面讨论了重力场中静止流体的平衡规律，现在进一步研究液体相对静止时的平衡规律.所谓相对静止是指液体整体对地球有相对运动，但液体宏观质点之间没有相对运动，如果把坐标系取在装液体的运动容器上，液体对此坐标处于平衡状态，下面讨论三种情况.

1. 匀速直线运动流体的平衡

当容器作匀速直线运动时，如图 2-7 所示，由于没有加速度的存在，故作用在容器内液体上的质量力只有重力，由此得 $f_x=0$，$f_y=0$，$f_z=-g$.这与前述的在重力场中静止液体的受力情况完全相同，因此前述结论完全适用，即等压面为一簇水平面，液静压强分布规律为 $p=p_0+\rho gh$.

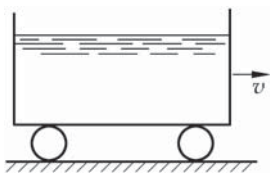


图 2-7 容器作匀速直线运动

2. 等加速直线运动流体的平衡

设容器以等加速度 a 沿 x 坐标轴方向运动，如图 2-8 所示.在新的平衡时，容器内的液体所受的质量力除了重力，还有一个与运动方向相反的惯性

力，即

$$f_x=-a,\quad f_y=0,\quad f_z=-g,$$

将 f_x,f_y,f_z 代入式(2-3)得

$$-a\,\mathrm{d}x-g\,\mathrm{d}z=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p,$$

或

$$\mathrm{d}p+\rho a\,\mathrm{d}x+\rho g\,\mathrm{d}z=0,$$

积分得

$$p+\rho ax+\rho gz=C.$$

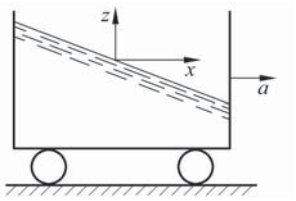


图 2-8　容器作等加速直线运动

积分常数 C 由边界条件确定，即当 $x=0$、$z=0$ 时 $p=p_0$，代入求得 $C=p_0$.因此压强分布规律为

$$p=p_0-\rho ax-\rho gz. \tag{2-9}$$

在液面上 $p=p_0$，因此液面的方程为

$$\rho ax+\rho gz=0, \tag{2-10}$$

即斜率为$-\frac{a}{g}$的直线.

把式(2-9)改写为

$$p=p_0-\rho g\left(\frac{a}{g}x+z\right),$$

而$-\left(\frac{a}{g}x+z\right)$刚好等于液体自由表面以下的垂直深度，即淹深 h_z，因此液面下的压强分布规律也可写为

$$p=p_0+\rho gh_z, \tag{2-11}$$

其形式与绝对静止液体的结果式(2-7)完全相同.

由等压面的定义 $\mathrm{d}p=0$，可得等压面的方程为

$$a\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}z=0,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{a}{g}. \tag{2-12}$$

由此可见等压面的斜率与液面的斜率相同，即等压面为平行于液面的一簇平面.

3. 等角速度旋转流体的平衡

盛有液体的容器绕垂直轴作角速度 ω 旋转，在启动时液体被甩向外周，但液体很快会成为一个整体随容器一起旋转，液体相互间没有相对运动，如图 2-9 所示.此时，液体所受的质量力除重力以外，还有等加速度 ω 而产生的离心力 $\omega^2 r$，方向与向心加速度方向相反，指向四周.选取如图所示的坐标，则有

$$f_x=\omega^2 r\cos(r,x)=\omega^2 x,$$
$$f_y=\omega^2 r\cos(r,y)=\omega^2 y,$$
$$f_z=-g.$$

将 f_x,f_y,f_z 代入式(2-3)得

$$\mathrm{d}p=\rho(\omega^2 x\,\mathrm{d}x+\omega^2 y\,\mathrm{d}y-g\,\mathrm{d}z),$$

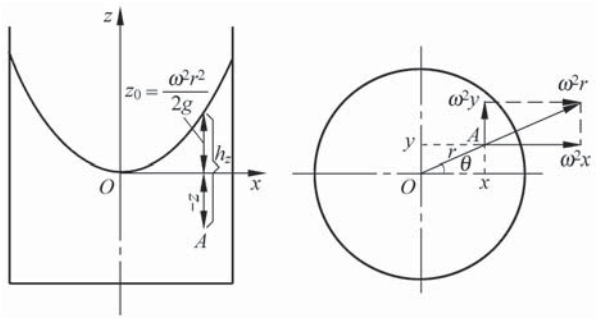


图 2-9　容器作等角速度旋转运动

积分得

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz\right)+C,$$

或

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2r^2}{2}-gz\right)+C.$$

积分常数 C 由边界条件确定，即当 $r=0$、$z=0$ 时 $p=p_0$，代入求得 $C=p_0$.由此得压强分布规律为

$$p=p_0+\rho\frac{\omega^2r^2}{2}-\rho gz. \tag{2-13}$$

等压面 $\mathrm{d}p=0$，则可得

$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz=C.$$

这是一簇对称于 z 轴的抛物面.在液面上 $p=p_0$，$z=z_0$，则液面方程为

$$z_0=\frac{\omega^2r^2}{2g}, \tag{2-14}$$

式中，z_0 为液面上任一点离坐标原点的高度，将式(2-14)代入式(2-13)，可得

$$p=p_0+\rho g(z_0-z),$$

而(z_0-z)即为液体内任一点的淹深 h_z，则液体内任意点的压强也可表示为式(2-11)，与静止液体相类似.

特例 1　如图 2-10 所示，盛满液体的容器顶盖中心开一小口，当容器以角速度 ω 绕 z 轴旋转时，液体借离心力向外甩，因受盖顶的限制，液面不能形成旋转抛物面.但此时盖顶各点所受液体静压强仍按抛物面规律分布.中心点 O 处的静压强 $p=p_0$，边缘点 B 处的流体静压强最大，为

$$p=p_0+\frac{\rho\omega^2R^2}{2},$$

角速度 ω 越大，则边缘处压强越大.离心铸造就是利用这个原理来得到较密实的铸件.

特例 2　如图 2-11 所示，盛满液体的容器顶盖边缘处开口，当容器以角速度 ω 绕 z 轴旋转时，液体借离心力有向外甩的趋势，但在容器内部产生的真空把液体吸住，尽管液体在旋转，但容器里的液体却跑不出去.液面虽不能形成抛物面，但顶盖液体各点所受静压强仍

按抛物面规律分布.

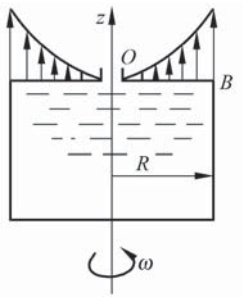


图 2-10　特例 1

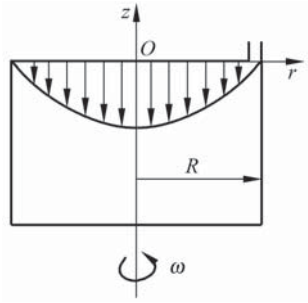


图 2-11　特例 2

根据边界条件，当 $r=R$、$z=0$ 时 $p=p_0$，得液体内各点的静压强分布公式为

$$p=p_0-\rho g\left[\frac{\omega^2(R^2-r^2)}{2g}+z\right].$$

在顶盖中心点 O 处的流体静压强为 $p=p_0-\rho\dfrac{\omega^2R^2}{2}$.可见 ω 越大，则中心处的真空越大.离心泵和离心风机就是根据此原理将流体吸入，又借离心力将流体甩向外缘，增大压力后输送出去.

2.6　静止流体作用在物面上的总压力计算

2.6.1　平面和曲面上的总压力

在工程实际中，常常不仅需要了解流体内部的压力分布规律，还需要知道与流体接触的不同形状、不同几何位置上的物体表面上所受到的流体对它作用的总压力.

静止流体作用在物体表面上的总压力 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=-\int_A p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A, \tag{2-15}$$

式中，A 为物体与流体接触的表面面积，$\boldsymbol{n}$ 为物面单位法线（指向流体）向量，p 为物面上的压强.

由于力是矢量，因此要注意力的方向.对于平面来说，总压力的方向必定垂直于平面.对于曲面来说，不同点上微小压力方向是不一致的，应将微小压力进行分解，算出总压力的分量，然后合成而求出总压力 $\boldsymbol{P}$，下面分别讨论这两种情况.

如图 2-12 所示，设一平面 A 受到液体的作用，液面压强为 p_0，平面 A 与液面倾斜成 θ 角，则在任意微小面积 $\mathrm{d}A$ 处的压强 p 为

$$p=p_0+\rho gh=p_0+\rho gy\sin\theta.$$

因此，该平面上受到的总压力大小 P 为

$$P=\int_A p\,\mathrm{d}A=\int_A(p_0+\rho gy\sin\theta)\,\mathrm{d}A,$$

或

$$P=p_0A+\rho g\sin\theta\int_A y\,\mathrm{d}A.$$