

第 1 章 绪 言

本书的主要目的,是介绍基于动态系统能量函数的控制器设计方法及其在电力系统中的应用。本章首先介绍基本概念及其基本设计思想。

1.1 系统的能量存储函数与动态特性

一个系统的运动,特别是具有明确物理意义的实际工程系统,都伴随着能量的增加或衰减变化。因此,可以通过关注能量函数的变化来把握系统的动态特性,并且通过控制能量函数的变化特性来达到控制系统动态过程的目的。

譬如,考察如图 1.1 所示的力学系统。该系统是由弹簧(弹性系数为 k)和阻尼器(阻尼系数为 f)并联支撑物体(质量为 m)构成的。设图中 x 表示质量的位移, u 表示外力。

令弹簧在无伸缩变形状态下质量 m 的位移为 x ,则该系统的运动方程由下式描述:

$$m\ddot{x} = u - f\dot{x} - kx \quad (1.1.1)$$

假设在初始时刻 $t=0$,质量 m 的初始速度为 $\dot{x}(0)=0$,但是初始位移为非零,即 $x(0)=x_0 \neq 0$ 。那么,当无外力作用时,通过解微分方程(1.1.1)可以得到该系统的动态响应 $x(t)$ 。

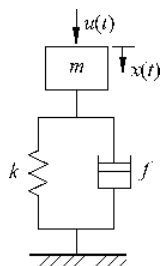


图 1.1 质量-弹簧系统

同时,利用拉普拉斯变换,可得 $x(t)$ 的频域响应为

$$X(s) = \frac{(ms + f)x_0}{ms^2 + fs + k} \quad (1.1.2)$$

或者,位移 $x(t)$ 的时域响应为

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(ms + f)x_0}{ms^2 + fs + k} \right\} \quad (1.1.3)$$

其中, $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ 表示拉普拉斯逆变换。

根据经典控制理论可知,上述讨论就是求线性系统(1.1.1)的脉冲响应的过程,而且根据物理意义可知 $f>0, k>0$, 所以,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 0 \quad (1.1.4)$$

其实,通过考察该系统的能量函数也可以得到同样的结论。该系统在任意状态 $x(t), \dot{x}(t)$ 下所具有的能量为

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) \quad (1.1.5)$$

即,上式右端第一项是质量 m 所具有的动能,第二项是势能。考察该能量函数在系统动态响应过程中的变化率,得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \\ &= m\dot{x}\left(-\frac{f}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x\right) + kx\dot{x} \\ &= -f\dot{x}^2 \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

上式表明:在该系统的动态过程中,只要质量 m 的速度 $\dot{x} \neq 0$,能量函数就会严格衰减,即 $\dot{V} < 0$;而在速度为零的时刻, $\dot{V} = 0$ 。但是如果该时刻位移 $x(t) \neq 0$,质量 m 受弹簧力的作用会产生非零加速度,导致速度 $\dot{x} \neq 0$,其结果是能量函数继续严格衰减。因此,除状态 $\dot{x} = 0, x = 0$ 以外,能量函数均为严格衰减,并且 $\dot{x} = x = 0$ 是能量函数的极小点,所以,对于下有界且严格衰减的函数 V ,当 $t \rightarrow \infty$ 时,必有 $V \rightarrow 0$,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0 \quad (1.1.7)$$

由此可知,通过观察系统的物理能量,便得出与经典控制理论分析相同的结论,即在系统动态过程中,当无外力作用时,质量 m 的位移 $x(t)$ 必收敛于零点。

实际上,还可以找到更为一般意义下的广义能量函数,并且通过严谨的数学工具更为直接地证明该能量函数本身是严格单调衰减的。而这种能量函数的衰减特性正是李亚普诺夫(Lyapunov)意义下稳定性的体现,此时的能量函数就是李亚普诺夫函数。

现在再来讨论当外力不等于零时的情况。如果外力 $u \neq 0$,同理,可以证明能量函数(1.1.5)的变化率满足

$$\dot{V} = -f\dot{x}^2 + \dot{x}u \leq \dot{x}u$$

或者,对于任意给定区间 $[t_1, t_2]$,有

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{V} dt = V(t_2) - V(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}u dt \quad (1.1.8)$$

即

$$V(t_2) \leq V(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}u dt \quad (1.1.9)$$

式中, $\dot{x}u$ 表示单位时间内外力 u 所做的功,所以积分项代表从 t_1 时刻到 t_2 时刻通过外力注入到系统中的能量之和。

因此,上述不等式的物理意义在于它表达了系统这样一种物理特征:系统在

目前时刻所具有的总能量 $V(t_2)$, 总是小于或等于初始时刻所具有的总能量 $V(t_1)$ 与系统由初始时刻到目前时刻从外部吸收的能量之总和。这就意味着该系统的运动总是伴有能量的损耗。所以, 如果从某一时刻 t_0 起外力恒为零, 那么该系统的能量不但不会增加, 而且还有可能衰减到能量函数的极小点, 即系统的状态至少不会发散, 而且有可能收敛到平衡点。

虽然上述讨论基于非常直观的物理概念, 但是这些思想可以推广为具有更为一般意义的控制系统分析与设计理论。近年来, 受到普遍关注的基于耗散性 (dissipativity) 或无源性 (passivity) 概念的设计理论^[73, 84, 118] 以及能量平衡概念 (energy-balancing) 的设计思想^[74], 就是从这种物理观察发展起来的理论。

考察由如下微分方程式描述的动态系统:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.1.10)$$

其中, $x \in \mathbf{R}^n$, 表示系统的状态向量; $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 均为连续可微的函数向量; $u \in \mathbf{R}$, 为控制输入信号。为了叙述简便, 只讨论输入输出信号是标量的情况, 但这里所介绍的基本概念和结论, 都可以直接推广到多输入多输出系统 (参见文献[66, 84])。

对于该系统, 考虑如下定义的输出信号:

$$y = h(x) \quad (1.1.11)$$

其中, $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为函数向量; $y \in \mathbf{R}$ 为输出信号。

定义 1.1.1 考察系统 (1.1.10) 及系统 (1.1.11)。若对于给定的函数 $s(u, y)$, 存在半正定函数 $V(x)$ ($V(0) = 0$), 使得不等式

$$V(x(T)) \leq V(x(0)) + \int_0^T s(u, y) dt, \quad \forall u \quad (1.1.12)$$

对于任意给定的 $T > 0$ 成立, 则称该系统对于能量供给率 $s(u, y)$ 是耗散的。 $V(x)$ 称为该系统的能量存储函数 (energy storage function), 而不等式 (1.1.12) 则称为耗散不等式 (dissipation inequality)。

如果该不等式严格成立, 即存在正定函数 $Q(x) > 0, \forall x \neq 0$ 使得

$$V(x(T)) + \int_0^T Q(x) dt \leq V(x(0)) + \int_0^T s(u, y) dt, \quad \forall u \quad (1.1.13)$$

成立, 则称该系统是严格耗散的 (strictly dissipative)。

如果能量存储函数连续可微, 则耗散不等式 (1.1.12) 就等价于如下微分形式:

$$\dot{V} \leq s(u, y), \quad \forall t \quad (1.1.14)$$

显然, 耗散性是前述力学系统的物理能量损耗特性的一个推广。如果定义该力学系统的输出为质量 m 的速度, 即 $y = \dot{x}$, 且能量供给率为

$$s(u, y) = uy \quad (1.1.15)$$

那么由式 (1.1.5) 给出的能量函数将满足耗散不等式 (1.1.12)。

应该指出,定义 1.1.1 的能量存储函数和能量供给率是不局限于物理意义的广义概念,这种物理概念的推广为控制系统的分析与设计提供了更为一般的途径。同前述力学系统的特例一样,通过考察系统的能量存储函数的特征,可以得到有关诸如自由响应的收敛性、对激励信号的传递增益特性等动态特性的结论。下面将继续讨论这一点。

首先引入非线性系统理论的一个基本概念。

定义 1.1.2 如果当 $y(t)=0, u(t)=0, \forall t \geq t_0$ 时,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (1.1.16)$$

则称系统(1.1.10)及系统(1.1.11)对于输出 y 是零状态可检测的(zero-state detectable)。

现在考虑系统自由响应的稳定性问题。假设系统(1.1.10)及系统(1.1.11)是严格耗散的,且能量供给率满足 $s(0, y)=0$, 即当输入信号为零信号时,系统不从外部获取能量。考虑耗散不等式当 $u=0$ 时的情况,不难发现,若能量存储函数是连续可微且正定时,有

$$\dot{V} \leq -Q(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (1.1.17)$$

所以,根据李亚普诺夫稳定性理论(详见第 2 章)可知, $x=0$ 是该系统渐近稳定的平衡点。对于更一般的耗散系统,有如下结论。

引理 1.1.1 设系统(1.1.10)及系统(1.1.11)对于给定的能量供给率 $s(u, y)$ 是耗散的,且对应的能量存储函数 $V(x)$ 是正定且连续可微的。如果该系统是零状态可检测的,并且存在函数 $\alpha(x)$ ($\alpha(0)=0$) 使得

$$s(\alpha(y), y) < 0, \quad \forall y \neq 0 \quad (1.1.18)$$

成立,那么由系统(1.1.10)与输出反馈控制律

$$u = \alpha(y) \quad (1.1.19)$$

构成的闭环系统在平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的。

证明 根据耗散不等式的微分形式,沿系统的任意状态轨迹得

$$\dot{V} \leq s(u, y)$$

将反馈控制律(1.1.19)代入上式,并根据式(1.1.18)有

$$\dot{V} \leq s(\alpha(y), y) < 0, \quad \forall y \neq 0$$

在状态空间中,满足 $\dot{V}=0$ 的 x 的集合包含在集合

$$\Omega = \{x \mid y = h(x) = 0\}$$

之中。根据零状态可检测条件及拉萨尔(LaSalle)不变集原理,渐近稳定性得证。 ■

满足上述引理的一个典型的供给率给定如下:

$$s(u, y) = uy \quad (1.1.20)$$

显然,如果系统对于这种形式的供给率是耗散的,那么理想的反馈律可以构造如下

$$u = \alpha(y) = -ky \quad (1.1.21)$$

其中, $k > 0$ 。

定义 1.1.3 若系统(1.1.10)及系统(1.1.11)对于能量供给率(1.1.20)是耗散的,则称该系统是无源的。

根据引理 1.1.1 和反馈律(1.1.19),显然有如下结论。

推论 1.1.1 若系统(1.1.10)及系统(1.1.11)是无源的,并且是零状态可检测的,那么该系统在静态输出负反馈下是渐近稳定的。

其次,我们来讨论系统能量函数与在输入信号激励下信号传递增益的关系。考察另一类特殊的能量供给率

$$s(u, y) = \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2 \} \quad (1.1.22)$$

其中, $\|s\|$ 表示向量 s 的欧氏范数(对于标量取其绝对值)。

一个系统的输出响应确立了一个由输入信号到输出信号的映射关系,这种映射关系也可以解释为系统由输入信号到输出信号的传递过程。耗散性反映了系统在这种信号传递过程中对信号“强度”的增益。

引理 1.1.2 设系统(1.1.10)及系统(1.1.11)对于给定的能量供给率(1.1.22)是耗散的,并且其能量存储函数 $V(x)$ 是正定且连续可微的。如果该系统零状态可检测,则如下结论成立:

- (a) 当 $u=0$ 时,自由系统 $\dot{x}=f(x)$ 在平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的;
- (b) 当初始状态 $x(0)=0$ 时,对于任意给定的 $T>0$,如下不等式成立,

$$\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt, \quad \forall u$$

证明 根据耗散不等式的微分形式,沿系统的任意状态轨迹得

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2 \} \quad (1.1.23)$$

当 $u=0$ 时,有

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \|y\|^2 < 0, \quad \forall y \neq 0$$

所以,与引理 1.1.1 的证明类似,由零状态可检测条件和 LaSalle 不变集定理,结论(a)得证。再对耗散不等式(1.1.23)两端积分,并利用 $V(x)$ 的正定性,结论(b)得证。 ■

引理 1.1.2 的结论(b)实际上是一种广义的 L_2 增益条件,即如果(b)成立,那么系统(1.1.10)及系统(1.1.11)作为由输入信号 u 到输出信号 y 的算子,其 L_2 诱导范数小于 γ 。下面考察一个具体例子。

例 1.1.1 考察如图 1.2 所示的 RC 端口网络。 u 为输入端口的电流, y 为端口的输出电压。 R 和 C 分别表示电阻和电容系数。该网络的动态方程为

$$\dot{y} = \frac{1}{C}u - \frac{1}{RC}y \quad (1.1.24)$$

由于通过电容的电流为 $C\dot{y}$, 因此在时间 dt 内电容存储的电能为 $C\dot{y}ydt$ 。由初始时刻 t_0 到任意时刻 $t > t_0$, 该网络所存储的电能为

$$\int_{t_0}^t C\dot{y}ydt = \frac{C}{2}y^2(t) - \frac{C}{2}y^2(t_0)$$

因此, 该系统的能量函数为

$$V(y) = \frac{C}{2}y^2 \quad (1.1.25)$$

并且,

$$\frac{dV}{dt} = Cy\dot{y} = yu - \frac{1}{R}y^2 = u^2 - \rho y^2 - \left(u - \frac{1}{2}y\right)^2 \quad (1.1.26)$$

对于任意 u 均成立, 其中 $\rho = \frac{4-R}{4R} > 0$ 。如果重新标定能量函数, 即令

$$\tilde{V}(y) = \frac{1}{2\rho}V(y) = \frac{C}{4\rho}y^2 \quad (1.1.27)$$

那么, 利用式(1.1.26), 沿系统的动态轨迹, 得

$$\dot{\tilde{V}} \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho}u^2 - y^2 \right\} \quad (1.1.28)$$

如果令

$$\gamma^2 \leq \frac{1}{\rho} = \frac{4R}{4-R}$$

则该网络对于能量供给率(1.1.22)是耗散的。根据引理 1.1.2 可知, 该系统在传递电信号的过程中, 输入电能与输出电能之间的能量增益小于 γ , 即

$$\int_0^T y^2(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^T u^2(t)dt$$

第 3 章和第 4 章将详细讨论基于耗散性以及无源性概念的系统设计理论, 在第 5 章以后, 还将看到在电力系统中, 许多能量函数以及广义地描述系统能量的函数都可以成为保证系统无源性或耗散性的存储函数, 从而成为设计控制系统, 特别是镇定控制器或 L_2 抑制补偿器的依据。

1.2 不确定性与鲁棒控制

在现代控制理论中, 被控对象的数学模型是设计反馈控制系统的基础。一般情况下, 控制器是根据给定被控对象的数学模型和闭环系统的期望性能指标, 通过解析求解的方法获得的。因此在实际应用中, 期望的性能指标是否能得到实现取

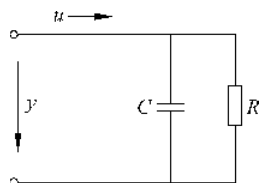


图 1.2 RC 端口网络

决于用于设计的数学模型是否能够精确地描述实际的被控对象。如果数学模型含有误差,不能够完全精确地描述被控对象,那么理论上实现了的性能指标在实际应用时就得不到真正的体现。但是在工程实践中,由于系统中存在各种各样的不确定性因素,模型误差是不可避免的,所以这就为控制理论提出了一个重要的课题,即在被控对象的数学模型具有不确定性误差的前提下,如何有效地控制系统。

从设计控制器的角度来看,解决上述课题有两个途径:一是积极地辨识不确定性并通过在线修正控制器的方法使闭环系统满足期望的性能指标;另一种途径则是预先估计不确定性因素存在的集合,针对这一集合内的所有因素预先设计一个固定的控制器,使得只要不确定性因素不脱离这个集合,闭环系统均满足期望的设计指标。前者就是自适应控制的基本思想,而后者正是鲁棒控制的基本特征。本书的主题之一就是鲁棒控制。本节首先介绍具有不确定性系统的描述方法。有关具体的设计方法,将在后续章节中陆续讨论。

考察式(1.1.10)及式(1.1.11)描述的被控对象。如果该系统的不确定性误差可以用未知参数来表达,那么实际系统就可以用如下数学模型来表示:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, p) + g(x, p)u \\ y = h(x, p) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

其中, $p \in \mathbf{R}^q$ 表示未知参数。这表示描述系统动态方程的函数 f, g, h 等均含有未知参数。

如果模型误差不能用参数来表示,但是可以表示为模型中函数的静态摄动时,实际系统就可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + \{g(x) + \Delta g(x)\}u \\ y = h(x) + \Delta h(x) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

其中, $\Delta f(x), \Delta g(x), \Delta h(x)$ 为具有适当维数的未知函数向量或函数。上述模型中,当 $p=0$ 或 $\Delta f=0, \Delta g=0, \Delta h=0$ 时,对应的模型称为标称模型。

显然,这两种模型的标称模型具有相同的形式,不过与式(1.2.1)相比,模型(1.2.1)能够表达更为一般形式的不确定性因素。比如,令

$$f(x) = f(x, 0), \quad \Delta f(x) = f(x, p) - f(x, 0)$$

那么,模型(1.2.1)就能够表示成式(1.2.2)的形式,但反过来却不一定能够找到合适的未知参数表达形式。

此外,上述两种模型所含的不确定性本身不具有动态过程。而有些系统的不确定性因素可能含有动态。比如在系统建模时忽略的高频动特性、各种驱动器件以及检测器件上寄生的动特性等,其本身的动态特性必须用独立于被控对象状态

的状态变量来描述。对于这类系统,可以用如下形式的模型来表示:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \delta(\xi)) + g(x, \eta(\xi))u \\ y = h(x, \gamma(\xi)) \\ \dot{\xi} = \varphi(\xi, x) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

式中, $\xi \in \mathbf{R}^m$, 表示未知的状态变量; δ, η, φ 均为未知函数向量或函数。

描述具有不确定性的系统,除了确定上述数学模型形式以外,还需要确定不确定性因素的集合,而描述这个集合特征的验前信息,将是设计鲁棒控制系统的主要依据。

譬如,对于模型(1.2.1),可以假设未知参数是有界的定常值,设它属于如下定义的有界集:

$$\Omega_p = \{p \in \mathbf{R}^q \mid \|p\| \leq m\}$$

其中, m 为已知常数; $\|p\|$ 为欧氏范数。或者可更具体地将上式表示为

$$\Omega_p = \{p = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_q] - h_i \leq p_i \leq m_i, i = 1, 2, \cdots, q\}$$

其中, $p_i \in \mathbf{R}$ 为未知参数; $h_i \geq 0, m_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, q)$ 是已知常数。

系统的不确定性集合的其他描述方式将在后续章节中陆续介绍。在实际应用中,采用哪一种形式的模型,取决于具体被控对象和所采用的设计理论。

粗略地讲,说一个系统的某种期望特性对于不确定性具有鲁棒性,是指只要不确定性因素属于给定的不确定性集合,那么该系统仍然具有这种期望特性。而鲁棒控制问题就是基于被控对象的具有不确定性的模型和不确定性集合,设计控制律使得闭环系统具有所期望的鲁棒性。

譬如,具有参数不确定性的系统的鲁棒耗散性可定义如下:

定义 1.2.1 设系统由式(1.2.1)描述,且不确定性参数的集合为 Ω_p 。对于给定的能量供给律 $s(u, y)$,若存在正定函数 $V(x, p) (V(0, p) = 0, \forall p \in \Omega_p)$,使得耗散不等式

$$\dot{V} \leq s(u, y), \quad t > 0 \quad (1.2.4)$$

对于任意 $p \in \Omega_p$ 成立,则称该系统是鲁棒耗散的。与此对应,如果 $s(u, y) = y^T u$,那么称该系统是鲁棒无源的。

根据 1.1 节介绍的无源性与稳定性、耗散性与 L_2 增益的关系,我们可以通过实现鲁棒无源性或鲁棒耗散性来达到鲁棒镇定或抑制 L_2 增益的目的。比如对于系统(1.2.1)和给定的未知参数集合 Ω_p ,由引理 1.1.1 以及引理 1.1.2,显然有如下结论。

引理 1.2.1 设原点 $x=0$ 是系统(1.2.1)的自由系统的平衡点,即 $f(0, p) = 0$ 。对于给定的能量供给率 $s(u, y)$,如果该系统是鲁棒耗散的,且对于任意未知参数 $p \in \Omega_p$ 是零状态可检测的。那么,如下结论成立:

(a) 若

$$s(u, y) = \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2 \}$$

则对于任意 $p \in \Omega_p$, 当 $u=0$ 时, 自由系统在原点是鲁棒稳定的, 且当初始状态 $x(0)=0$ 时, 不等式

$$\int_0^T \|y\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|u\|^2 dt, \quad \forall u$$

对于任意给定的 $T>0$ 成立。

(b) 若 $s=u^\top y$ (即, 该系统是鲁棒无源的), 则使得该系统在原点是鲁棒稳定的反馈控制器给定如下:

$$u = -\phi(y) \quad (1.2.5)$$

其中, $\phi(y)$ 是满足 $y^\top \phi(y) > 0, \forall y \neq 0$ 的任意静态函数。

注 1.2.1 该引理的证明是引理 1.1.1 和引理 1.1.2 的简单应用, 在此不再赘述。这里所说的鲁棒稳定性, 是指该系统对于给定的不确定性集合 Ω_p , 只要 $p \in \Omega_p$, 系统的稳定性仍然成立。另外, 对于其数学模型以及不确定性由其他方式描述的系统, 同样可以类似地定义鲁棒耗散性, 并得到与引理 1.2.1 相同的结论。对此, 下面将陆续介绍。

注 1.2.2 根据定义 1.2.1 可知, 当系统具有不确定性时, 能量存储函数 $V(x)$ 有可能是未知参数 p 的函数。但是, 在后续章节将看到, 在一般情况下控制器将根据存储函数来构造。因此, 如果保证鲁棒耗散性的能量存储函数依赖于不确定性(未知参数)的准确信息, 那么就给鲁棒控制系统设计带来负担。因此, 在很多情况下都要求存储函数 $V(x)$ 与不确定性无关, 且满足耗散不等式

$$\dot{V} < s(u, y)$$

应该注意, 在有些情况下, 这个条件与定义 1.2.1 相比更强一些。

下面介绍两个鲁棒耗散系统的实例。

例 1.2.1 再考虑如图 1.2 所示的 RC 网络。假设该网络的电容 C 和电阻 R 的精确值未知, 但是属于如下定义的不确定性因素的集合:

$$\Omega_p \stackrel{\text{def}}{=} \{ (C, R) \mid 0 < C < \infty, 0 < R < \infty \}$$

根据例题可知, 此时电容上存储的能量 $V(x)$ 是未知参数的函数, 即

$$V(x, C) = \frac{C}{2} y^2 \quad (1.2.6)$$

而且沿系统的动态轨迹, 耗散不等式

$$\frac{dV}{dt} = Cy\dot{y} = yu - \frac{1}{R}y^2 \leq yu \quad (1.2.7)$$

对于任意 $(C, R) \in \Omega_p$ 均成立。因此该系统是鲁棒无源的。

例 1.2.2 考察如图 1.3 所示的直流电机拖动系统, I 和 u 分别表示电机的电枢电流和电压, q 表示负载的角位移。设电机的输出轴无弹性阻尼, 而 F 表示静摩擦和粘性摩擦等引起的摩擦力矩。该系统的动态方程可以表示为

$$J \ddot{q} = k_m I - F \quad (1.2.8)$$

$$L \dot{I} = -RI - k_e \dot{q} + u \quad (1.2.9)$$

其中, k_e, k_m, J 分别表示反向电势系数、力矩系数以及负载的转动惯量。

摩擦力矩一般是无法精确测量的量, 甚至是其机理尚不清楚的物理现象。讨论该系统对不确定性 F 的鲁棒无源性。

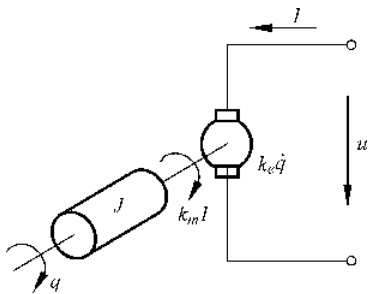


图 1.3 电机拖动系统示意图

首先考虑如何描述不确定性集合的问题。摩擦力矩 F 实际上与角速度 $\dot{q}$ 有很大关系, 并且其自身又具有动态特性。从控制的角度来看, 文献[5]给出的如下动态模型 (bristle-based model) 是目前能够较准确地描述摩擦力矩的数学模型:

$$\begin{cases} F = h(z, \dot{q}) \\ \dot{z} = -\sigma_0 a(\dot{q})z + \dot{q} \end{cases} \quad (1.2.10)$$

其中

$$h(z, \dot{q}) = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q}, \quad a(\dot{q}) = \frac{|\dot{q}|}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{\dot{q}}{\alpha_2}\right)^2}}$$

并且, $\sigma_i > 0, \alpha_i > 0 (i=0, 1, 2)$ 是定常数。

该模型的初始状态有效区域为 $|z(0)| \leq \alpha_0 + \alpha_1$, 并且状态是一致有界的, 即

$$|z(t)| \leq \frac{1}{\sigma_0} (\alpha_0 + \alpha_1)$$

可以证明, 在一定的条件下, 动态系统 (1.2.10) 对于输入 $\dot{q}$ 和输出 F 是无源的。考察正定函数

$$W(z) = \frac{\sigma_0}{2} z^2 \quad (1.2.11)$$

则沿摩擦力矩的动态过程, 有

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \sigma_0 z \{-\sigma_0 a(\dot{q})z + \dot{q}\} \\ &= -\sigma_0^2 a(\dot{q})z^2 + F\dot{q} - (\sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q})\dot{q} \\ &= F\dot{q} - \sigma_0^2 a(\dot{q})z^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\dot{q}^2 + \sigma_0 \sigma_1 a(\dot{q})z\dot{q} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

因此, 利用 $z(t)$ 的一致有界性以及 $a(\dot{q})$, 得