# 基　础　篇

# 电力网络分析基本原理

# 第 1 章　电力网络分析的一般方法

## 1.1　网络分析概述

### 1.1.1　网络的概念

网络泛指把若干元件有目的地、按一定的形式连接起来、完成特定任务的总体。对电力网络而言，其元件特指输电和配电线路、变压器和移相器、开关、并联和串联电容器、并联和串联电抗器等电气元件(电气设备)，它们按一定的形式连接成一个整体，达到输送和分配电能的目的。因此，电力网络包含两个要素，即电气元件及其连接方式。电力网络的运行特性是由元件特性的约束和元件之间连接关系的约束(拓扑约束)共同决定的。

1. 元件的特性约束与欧姆定律

从物理结构上看，组成实际电力网络的每个电气设备都是比较复杂的，在工程精度允许的条件下，电力系统分析中通常都要对电气设备作合理简化，用一个或多个理想的集总参数元件(简称理想元件)组成的等值电路来表示。常见的理想元件有电阻器、电感器、电容器(即 $RLC$ 元件)和变压器等，它们可以看成是构成电力网络的最小单元。理想元件的参数制约着元件的电压和电流之间的关系，从而构成了元件的特性约束。当元件参数与电量和时间无关时，称该元件为线性定常元件(简称线性元件)；当元件的参数是电量的函数，则称该元件为非线性元件。若网络中所有元件均是线性元件时，该网络为线性网络；若网络中至少包含有一个非线性元件，则该网络是非线性网络。

对于支路参数分别是 $R,L,C$ 的支路 $k$。其支路电压 $u_k$ 和支路电流 $i_k$ 之间有如下关系：

$$Ri_k = u_k$$

$$\frac{\mathrm{d}Li_k}{\mathrm{d}t} = u_k$$

$$\int \frac{1}{C} i_k \mathrm{d}t = u_k$$

考虑线性电力网络在正弦稳态条件下的运行特性。这时一个或多个理想元件

的串、并联还可以用一条或多条等值支路来表示，支路的两个端点称为节点。正弦稳态条件下，某一支路 $k$ 的基于 $RLC$ 参数的等值阻抗 $z_k$ 可视为制约支路的复数电流 $\dot{I}_k$ 和复数电压 $\dot{V}_k$ 关系的参数，即

$$\dot{V}_k = z_k \dot{I}_k \tag{1-1}$$

这就是著名的广义欧姆定律(Ohm's law)，它描述了电力网络分析中最常见的支路特性约束。

2. 网络的拓扑约束与基尔霍夫定律

在由集总参数元件组成的电力网络中，各支路之间的连接关系构成了拓扑约束，它与支路的特性无关。网络的拓扑约束集中表现为基尔霍夫定律(Kirchhoff's laws)，它是电力网络分析中最强有力的工具。基尔霍夫定律具有一般性，对直流或时变的电流和电压都成立，下面给出其在电力网络分析中最常用的正弦稳态条件下的表述。

(1) 基尔霍夫电流定律(Kirchhoff's current law，KCL)

对于网络中的任一节点 $j$ (包括广义节点)，与节点 $j$ 相关联的各支路电流 $\dot{I}_k$ $(k \in j)$之间满足

$$\sum_{k \in j} \dot{I}_k = 0 \tag{1-2}$$

式中，$k \in j$ 表示与节点 $j$ 相关联的支路 $k$。

(2) 基尔霍夫电压定律(Kirchhoff's voltage law，KVL)

对于任一闭合回路 $l$，回路中的各支路电压 $\dot{V}_k (k \in l)$之间满足

$$\sum_{k \in l} \dot{V}_k = 0 \tag{1-3}$$

式中，$k \in l$ 表示在回路 $l$ 中的支路 $k$。

### 1.1.2 电力网络分析的主要步骤

为了确保电力系统的安全稳定运行，必须对电力系统的物理特性有充分的了解。但由于在电力系统中进行大规模实验的代价昂贵，或者观测时间太长或系统反应时间很短以及测量上的困难，很多现场实验都无法实现，因此人们越来越广泛地采用计算机仿真来取代大部分的现场实验。仿真计算在电力系统分析中扮演着重要角色，它使人们的观察能力得到延伸，思维、模拟和计算能力得到强化，对电力系统学科的发展具有举足轻重的推动作用。

有关的电力系统分析计算问题包括状态估计、潮流计算、经济调度、故障分析、稳定计算等，这些问题既相互关联，又各有侧重点。例如，状态估计可以为潮流计算提供良好的初值，而潮流计算则是经济调度、故障分析、稳定分析与系统控制的

出发点。网络分析是解决所有这些问题的共同基础。

研究一个特定的电力系统运行问题，首先应当根据研究的目的和研究内容建立网络文件合理的数学模型，进而建立相应的电力网络数学模型，而后用有效的数值方法在计算机上进行求解，并对结果进行分析。在这一过程中，电力网络的建模与分析计算始终是解决问题的关键。电力网络分析应当包括以下四个基本步骤：①建立电力网络元件的数学模型；②建立电力网络的数学模型；③选择合理的数值计算方法；④电力网络问题的计算机求解。

电力网络数学模型的建立与所采用的网络元件数学模型密切相关，两者都标志着对问题认识的深度，也和当时的科学技术发展水平有关。针对数学模型选择合适的数值计算方法，并在计算机上仿真计算，可以向运行人员提供丰富的信息。在对计算结果进行分析后，必要时还要对上述的某些步骤进行改进，以期最终获得的结果更接近实际情况。

1. 建立电力网络元件的数学模型

电力网络元件的数学模型是根据物理概念和电力系统的限制条件直接建立起来的相对简化的电力网络元件模型，其特点是直观、物理意义明确。数学模型必须与所研究的问题的特点相一致。例如对于输电线路，由于只关注其电气特性，因此可以用等值电路来建模。导体部分建模，而将绝缘结构和机械构架等部分忽略，所以输电线元件的数学模型可以用一个或多个 Π 型电路的链式电路来表示。又比如对于负荷，在故障计算中通常用恒定阻抗模拟，而在潮流计算中则通常用恒定功率模拟。

2. 建立电力网络的数学模型

电力网络的数学模型是利用基本物理学定律和合适的数学描述工具，来表达电力网络中物理量之间的关系，从而把电力网络的物理问题抽象成一个数学问题。数学模型的特点是抽象、简洁、深刻，反映了物理现象的本质和主流。在电力网络分析中，可以将网络抽象成一个由支路和把支路连接起来的节点组成的图。通常选择支路电流和节点电压作为反映网络状态的物理量，其他物理量可以从这两个量中推出。基本的物理学定律是欧姆定律和基尔霍夫电流电压定律，合适的数学描述工具是图论。简单地说，以图论为数学工具，把网络的两种约束全部表达出来，而不包含冗余的约束，由此建立的网络方程就是电力网络的数学模型。

3. 选择合理的数值计算方法

为了求解数学模型，必须选用可靠、有效的数值计算方法。数值计算方法与数学模型的结合也称为数值模型，是建构理论与实际问题的桥梁。数值计算方法的选择和可利用的计算工具有关。所选用的数值计算方法应该与电力网络的特点相结合，如考虑网络矩阵的稀疏性、结构对称性等。此外，还应对数值计算方法作初

步的评估，讨论所需的计算量、存储量、程序实现的难易程度等。在潮流计算与稳定计算中，数值计算方法的理论分析，如解的收敛性、收敛速度、误差估计、数值稳定性分析等对程序设计也有直接影响，充分的理论分析有助于程序设计人员编制出高质量的计算程序。

4. 电力网络问题的计算机求解

在数值模型的基础上编制的计算程序，必须在计算机上进行仿真计算，以考证所用的物理模型、数学模型、数值计算方法的正确性，并用于鉴别所选用方法的实用性与可靠性。通常先模拟电网中已知的物理现象，当计算结果与实际观察相吻合，则可将计算程序用于预测和评估电网中其他可能的物理现象，以期得到更佳的电网运行状态。

## 1.2 网络的拓扑约束

### 1.2.1 图的概念和一些基本定义

当只研究网络的拓扑约束时，网络元件的物理特性无关紧要，可以把网络的连接关系抽象成一个图(graph)。图论及其应用随着计算机技术的兴起而得到很大的发展，在许多专门著作[11]中有详细的叙述。下面仅就本书中用到的一些术语作简要的介绍。

**支路**(branch)，亦称**边**(edge)，是二端电路元件的抽象。任何一条支路都有两个端点。

**节点**(node)，亦称**顶点**(vertex)，是支路端点的抽象，也是网络中支路的连接点。

**图**(graph)，是抽象的支路和节点的集合。用符号 $G$ 表示。

**关联**(incidence)，指支路与节点的连接关系，如 $k(i,j)$ 表示支路 $k$ 的两端是节点 $i$ 和节点 $j$。

**节点的度**(degree)，指节点所关联的支路数。

**路径**(path)，在图 $G$ 中，从始点出发经过若干支路和节点到达终点，其中的支路和节点均不能重复出现，形成的一个开边列(open edge train)称为路径。路径中的内部顶点(interior vertices)的度是 2，而始点和终点的度为 1。

**连通图**(connected graph)，指任何一对顶点之间至少有一条路径的图。

**有向图**(oriented graph)，图 $G$ 中的每一条支路都有规定的方向。

本书所研究的电力网络一般均抽象成有向连通图。在网络分析中，对于包括有 $N+1$ 个节点 $b$ 条支路的连通图 $G$，为了使每个节点和支路的物理量有确定的

意义，一定要规定一个参考节点，因此图 $G$ 的独立节点数为 $N$，称为图 $G$ 的**秩**(rank)。

**子图**(sub-graph)，若图 $G_i$ 的边集和节点集均属于图 $G$ 中，则图 $G_i$ 称为图 $G$ 的子图。

**回路**(loop)，即始点和终点重合的闭合路径(closed path)。

**树**(tree)和**树支**(tree branch，twig)，树是指连通图 $G$ 的一个连通子图 $G_i$，它包含 $G$ 中的所有节点，但不包含任何回路。树支是树中所含的支路，它一定只有 $N$ 条。

**补树**(cotree)和**连支**(link)，连通图 $G$ 中选定一棵树 $G_i$ 后剩余的支路构成的子图称为图 $G$ 的树 $G_i$ 的补树。补树中所含的支路称为连支，连支数一定为 $b-N$。

给定一个具体的图，其树可以有多种选择，但一旦选定以后，树支和连支即确定。

**基本回路**(fundamental loop)，指在连通图 $G$ 中选定一棵树后，仅包含一条连支的回路。基本回路数必然与其连支数相对应，即：基本回路数＝连支数＝$b-N$。

**割集**(cut-set)，是连通图 $G$ 中的一组支路的最小集合，它把图 $G$ 分割成两个互不连通的子图(其中一个子图可以是一个孤立的节点)。被分割出来的部分是图 $G$ 的一个广义节点。

**基本割集**(fundamental cut-set)，指在图中选定一棵树后，仅包含一条树支的割集。基本割集必然与树支相对应，即有：基本割集数＝树支数＝独立节点数＝$N$。

### 1.2.2 网络分析中常用的关联矩阵

网络的拓扑特性可以用一个图来形象地表示，也可用矩阵来表示。描述网络拓扑结构的矩阵为**关联矩阵**(incidence matrix)。由于可以从不同的角度、用不同的形式来说明关联关系，因此就有不同的关联矩阵。矩阵表示有助于应用计算机进行网络分析。

电网络理论中常用的关联矩阵有**节**(点)-**支**(路)**关联矩阵**(node-branch incidence matrix)，**回**(基本回路)-**支**(路)**关联矩阵**(fundamental loop-branch incidence matrix)，**割**(基本割集)-**支**(路)**关联矩阵**(fundamental cut-set-branch incidence matrix)。以下对这些关联矩阵作简要复习。为了叙述方便，矩阵的阶次用下标中的运算符“×”来表示，例如，$\boldsymbol{A}_{(N+1)\times b}$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $N+1$ 行 $b$ 列的矩阵。

1. 节-支关联矩阵

设有向连通图 $G$ 有 $N+1$ 个节点，$b$ 条支路，对每条支路规定了正方向后，则

其节-支关联矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的阶次是 $(N+1)\times b$，$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 中的元素定义如下：

$$\tilde{a}_{ik}=\begin{cases}1 & \text{节点 } i \text{ 是支路 } k \text{ 的发点}\\ -1 & \text{节点 } i \text{ 是支路 } k \text{ 的收点}\\ 0 & \text{节点 } i \text{ 不是支路 } k \text{ 的端点}\end{cases} \tag{1-4}$$

按此定义，$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的结构为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{(N+1)\times b}=\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1\ \ 2\ \cdots & k & \cdots\ \ b \\ \hline
1 & & 0 & \\
\vdots & & \vdots & \\
i & & 1 & \\
\vdots & & \vdots & \\
j & & -1 & \\
\vdots & & \vdots & \\
N+1 & & 0 & \\ \hline
\end{array}$$

矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 有 $b$ 个列矢量，每一列与一条支路对应，表示该支路与哪两个节点相关联，所以每一个列只有 1 和 $-1$ 两个非零元素，其余元素都为 0，非零元素的正负表示支路的方向。上式中只给出了第 $k$ 条支路中非零元的情况。$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 有 $N+1$ 个行矢量，每一行与一个节点对应，表示该节点与哪些支路相关联，因此每行中非零元素的数目就等于该节点的度。

无论从行的角度还是从列的角度看，节-支关联矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 都是非常稀疏的。另外，易知 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的 $N+1$ 个行矢量之和为零矢量，所以 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的各行是线性相关的。如果将参考节点对应的行从节-支关联矩阵中删除，就得到 $N\times b$ 的**降阶节-支关联矩阵** $\boldsymbol{A}$，其各行是线性无关的。在不产生误解的情况下，以后仍称 $\boldsymbol{A}$ 为**节-支关联矩阵**。选定一棵树，对支路的排列次序做适当调整，把 $N$ 条树支放在前面，$L=b-N$ 条连支放在后面，则有

$$\boldsymbol{A}_{N\times b}=\begin{array}{c|c|c|}
 & 1\ \cdots\ N & N+1\ \cdots\ b \\ \hline
1 & & \\
\vdots & \boldsymbol{A}_T & \boldsymbol{A}_L \\
\vdots & (N\times N) & (N\times L) \\
\vdots & & \\
N & & \\ \hline
\end{array}=[\boldsymbol{A}_T\quad \boldsymbol{A}_L]$$

或简写为

$$\boldsymbol{A}_{N\times b}=[\boldsymbol{A}_T \quad \boldsymbol{A}_L] \tag{1-5}$$

式中，$\boldsymbol{A}_T$ 为表示节点和树支关联关系的 $N\times N$ 的关联子矩阵；$\boldsymbol{A}_L$ 为表示节点和连支关联关系的 $N\times L$ 的关联子矩阵。

2. 回-支关联矩阵

对于连通图中一颗选定的树，由于基本回路中仅包含一条连支，基本回路数等于连支数，回-支关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $L\times b$ 阶的。规定基本回路的正方向与连支的方向相同，则 $\boldsymbol{B}$ 中的元素为

$$b_{lk}=\begin{cases}1 & \text{支路 } k \text{ 在回路 } l \text{ 内，且二者方向相同}\\ -1 & \text{支路 } k \text{ 在回路 } l \text{ 内，且二者方向相反}\\ 0 & \text{支路 } k \text{ 不在回路 } l \text{ 内}\end{cases}$$

若把树支排在前面，连支排在后面，$\boldsymbol{B}$ 的结构为

$$\boldsymbol{B}_{L\times b}=\begin{array}{c|c|c|} & 1 \ \cdots \ N & N+1 \ \cdots \ b \\ \hline 1 & & \\ \vdots & \boldsymbol{B}_T & \boldsymbol{B}_L \\ \vdots & (L\times N) & (L\times L) \\ \vdots & & \\ L & & \\ \hline \end{array}=[\boldsymbol{B}_T \quad \boldsymbol{B}_L]$$

或简写为

$$\boldsymbol{B}_{L\times b}=[\boldsymbol{B}_T \quad \boldsymbol{B}_L] \tag{1-6}$$

$\boldsymbol{B}$ 每行中的非零元和该行对应的回路上的支路相对应，支路方向和回路方向相同时非零元为 1，相反时为 $-1$。$\boldsymbol{B}_T$ 为表示回路与树支关联关系的 $L\times N$ 的关联子矩阵；$\boldsymbol{B}_L$ 为表示回路和连支关联关系的 $L\times L$ 的关联子矩阵。由于每个基本回路只与一条连支对应，而且连支方向已定义为基本回路正方向，则 $\boldsymbol{B}_L$ 是单位矩阵，故有

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_T \quad \boldsymbol{I}] \tag{1-7}$$

3. 割-支关联矩阵

由于基本割集中仅包含一条树支，基本割集数等于树支数，割-支关联矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是 $N\times b$ 阶的。规定基本割集的正方向与树支的方向相同，则 $\boldsymbol{Q}$ 中的元素为

$$q_{ik}=\begin{cases}1 & \text{支路 } k \text{ 在割集 } i \text{ 内，且二者方向相同}\\ -1 & \text{支路 } k \text{ 在割集 } i \text{ 内，且二者方向相反}\\ 0 & \text{支路 } k \text{ 不在割集 } i \text{ 内}\end{cases}$$

若把树支排在前面，连支排在后面，$\boldsymbol{Q}$ 的结构为

$$\boldsymbol{Q}_{N\times b}=\begin{array}{c|c|c|} & 1\ \cdots\ N & N+1\ \cdots\ b \\ \hline \begin{matrix}1\\ \vdots\\ N\end{matrix} & \begin{matrix}\boldsymbol{Q}_T\\ (N\times N)\end{matrix} & \begin{matrix}\boldsymbol{Q}_L\\ (N\times L)\end{matrix} \\ \hline \end{array}=[\boldsymbol{Q}_T\quad \boldsymbol{Q}_L]$$

或简写为

$$\boldsymbol{Q}_{N\times b}=[\boldsymbol{Q}_T\quad \boldsymbol{Q}_L] \tag{1-8}$$

式中，$\boldsymbol{Q}_T$ 为表示割集与树支关联关系的 $N\times N$ 的关联子矩阵；$\boldsymbol{Q}_L$ 为表示割集与连支关联关系的 $N\times L$ 的关联子矩阵。由于每个基本割集只与一条树支对应，而且树支方向已定义为基本割集的正方向，则 $\boldsymbol{Q}_T$ 是单位矩阵，故有

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{Q}_L] \tag{1-9}$$

由于节-支关联矩阵对电网的拓扑描述是最直观的，因此在电力网络分析中以节-支关联矩阵为基础的节点分析法得到的应用最广泛。

### 1.2.3　关联矩阵 $A$，$B$，$Q$ 之间的关系

既然同一张图可以用不同形式的关联矩阵来表示，那么这些表示同一客体的不同形式之间必然存在着相互变换的关系。这些变换关系为不同的网络分析方法提供了相互沟通的途径。节点支路关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和回路支路关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 之间存在如下关系：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}_{N\times L},\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}_{L\times N} \tag{1-10}$$

因此有

$$[\boldsymbol{B}_T\quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_T^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_L^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

所以

$$\boldsymbol{B}_T=-\boldsymbol{A}_L^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_T^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{1-11}$$

在割集支路关联矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和回路支路关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 之间，也有类似的关系：

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}_{N\times L},\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}_{L\times N} \tag{1-12}$$

即

$$[\boldsymbol{B}_T\quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{Q}_L^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

所以

$$\boldsymbol{B}_T=-\boldsymbol{Q}_L^{\mathrm{T}}\quad 或\quad \boldsymbol{Q}_L=-\boldsymbol{B}_T^{\mathrm{T}} \tag{1-13}$$

上式说明：在一个基本割集中包括一条树支和若干条连支，那么分别由这些连

支所构成的基本回路中，必然都包含着这同一条树支。

由式(1-11)和式(1-13)，可以得到 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 之间的相互关系为

$$\boldsymbol{Q}_L = (\boldsymbol{A}_L^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_T^{\mathrm{T}})^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_T^{-1}\boldsymbol{A}_L \tag{1-14}$$

### 1.2.4 网络拓扑约束——基尔霍夫定律的表达

对于有 $N+1$ 个节点 $b$ 条支路的连通图 $G$，当选定了其中的一棵树后，有以下关系：

$$\text{独立节点数} = \text{树支数} = \text{基本割集数} = N$$
$$\text{基本回路数} = \text{连支数} = b - N = L$$

图中有 $N$ 个独立节点和 $N$ 条树支，将 $N$ 条树支编号在前，$L$ 条连支编号在后。在正弦稳态分析中，可定义如下相量形式的物理量：

节点电压列矢量($N$ 维)$\dot{\boldsymbol{V}}_N$　$N$ 个独立节点上的节点电压的集合。

支路电流列矢量($b$ 维)$\dot{\boldsymbol{I}}_b$　$b$ 条支路上的支路电流的集合。

支路电压列矢量($b$ 维)$\dot{\boldsymbol{V}}_b$　$b$ 条支路上的支路电压的集合。

回路电流列矢量($L$ 维)$\dot{\boldsymbol{I}}_L$　$L$ 个基本回路中所包含的连支上的支路电流的集合。

割集电压列矢量($N$ 维)$\dot{\boldsymbol{V}}_T$　$N$ 个基本割集中所包含的树支上的支路电压的集合。

根据上述定义和支路编号，支路电流和支路电压有如下形式：

$$\dot{\boldsymbol{I}}_b = [\dot{\boldsymbol{I}}_T^{\mathrm{T}} \quad \dot{\boldsymbol{I}}_L^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{1-15}$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}_b = [\dot{\boldsymbol{V}}_T^{\mathrm{T}} \quad \dot{\boldsymbol{V}}_L^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{1-16}$$

式中，下标 $T$ 和 $L$ 分别表示与树支支路和连支支路相关的量。

于是，基尔霍夫定律有如下形式：

$$\text{KCL} \qquad \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_b = \boldsymbol{0} \tag{1-17}$$

$$\text{KVL} \qquad \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{V}}_b = \boldsymbol{0} \tag{1-18}$$

基尔霍夫定律除了上述两个基本表达式外，还有其他的形式。

1. 基尔霍夫电压定律的其他表达形式

基尔霍夫电压定律的其他表达形式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_N = \dot{\boldsymbol{V}}_b \tag{1-19}$$

它建立了节点电压和支路电压之间的变换关系。

由式(1-18)得

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{V}}_b=[\boldsymbol{B}_T \quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{V}}_T\\ \dot{\boldsymbol{V}}_L\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

所以有

$$-\boldsymbol{B}_T\dot{\boldsymbol{V}}_T=\dot{\boldsymbol{V}}_L \tag{1-20}$$

并因$-\boldsymbol{B}_T=\boldsymbol{Q}_L^{\mathrm{T}}$,所以

$$\boldsymbol{Q}_L^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_T=\dot{\boldsymbol{V}}_L \tag{1-21}$$

因为$\boldsymbol{Q}_T=\boldsymbol{Q}_T^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$,若将式(1-21)加以扩展,有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_T^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_T\\ \boldsymbol{Q}_L^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{V}}_T\\ \dot{\boldsymbol{V}}_L\end{bmatrix}=\dot{\boldsymbol{V}}_b \tag{1-22}$$

所以

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_T=\dot{\boldsymbol{V}}_b \tag{1-23}$$

式(1-20)～式(1-22)说明了网络中树支的支路电压和连支的支路电压之间的关系,并且可以利用不同的关联矩阵加以变换;式(1-23)则可从已知的树支电压$\dot{\boldsymbol{V}}_T$扩展求得所有支路电压$\dot{\boldsymbol{V}}_b$。式(1-19)和式(1-23)都是KVL的其他表达形式。

2. 基尔霍夫电流定律的其他表达形式

基尔霍夫电流定律的其他表达形式

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_L=\dot{\boldsymbol{I}}_b \tag{1-24}$$

它建立了支路电流和回路电流之间的变换关系。

由式(1-17)得

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_b=[\boldsymbol{A}_T \quad \boldsymbol{A}_L]\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{I}}_T\\ \dot{\boldsymbol{I}}_L\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

所以有

$$-\boldsymbol{A}_T\dot{\boldsymbol{I}}_T=\boldsymbol{A}_L\dot{\boldsymbol{I}}_L \tag{1-25}$$

并因$\boldsymbol{A}_T^{-1}\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{Q}_L$,所以

$$-\dot{\boldsymbol{I}}_T=\boldsymbol{A}_T^{-1}\boldsymbol{A}_L\dot{\boldsymbol{I}}_L=\boldsymbol{Q}_L\dot{\boldsymbol{I}}_L \tag{1-26}$$

式(1-25)和式(1-26)说明了网络中树支的电流和连支的电流之间的关系,它们是KCL的另一种表达式。

由式(1-26),因为$\boldsymbol{Q}_T=\boldsymbol{I}$是单位矩阵,所以

$$\dot{\boldsymbol{I}}_T+\boldsymbol{Q}_L\dot{\boldsymbol{I}}_L=[\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{Q}_L]\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{I}}_T\\ \dot{\boldsymbol{I}}_L\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{I}}_b=\boldsymbol{0} \tag{1-27}$$

式(1-27)更广泛地叙述了KCL。其含义是:电力网络中,用一个闭合面分割出一

个独立部分，穿过闭合面的所有支路组成一个割集，其所有支路的电流代数和为零。这一个独立部分是一个广义节点。式(1-24)和式(1-27)都是 KCL 的其他表达形式。

电路理论中的**特勒根定理**(Tellegen theorem)指出：任意一个电力网络中所有支路上的电压与电流乘积的代数和为零。特勒根定理与元件的特性无关，即不论元件特性是线性的或非线性的，有源的或无源的，定常的或时变的，它都成立。对于相量形式的电流和电压，有

$$\dot{\boldsymbol{V}}_b^{\mathrm{T}}\hat{\dot{\boldsymbol{I}}}_b = \sum_{k=1}^{b}\dot{V}_k\hat{\dot{I}}_k = 0 \tag{1-28}$$

式中，上标“ˆ”表示共轭复数。特勒根定理可以从基尔霍夫定律导出。由于 $\dot{\boldsymbol{V}}_b = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_N$ 及 $\boldsymbol{A}\,\hat{\dot{\boldsymbol{I}}}_b = 0$，所以

$$\dot{\boldsymbol{V}}_b^{\mathrm{T}}\hat{\dot{\boldsymbol{I}}}_b = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_N)^{\mathrm{T}}\hat{\dot{\boldsymbol{I}}}_b = \dot{\boldsymbol{V}}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\hat{\dot{\boldsymbol{I}}}_b = \boldsymbol{0}$$

上式说明网络给予各支路的有功功率和无功功率分别是平衡的，即网络中各支路的功率总和恒为零，因此基尔霍夫定律是能量守恒定律的一种表现形式。

### 1.2.5 道路-支路关联矩阵

实际的电力网络可以分为输电网和配电网两类。其中输电网中的支路数目比节点数多，树的选择也较复杂；而配电网中支路数与节点数接近，网络呈辐射状，其结构接近自然树状态，回路数非常少，大部分配电系统因开环运行而没有回路，这种网络结构特别适合用**道路-支路关联矩阵**(path-branch incidence matrix)来描述。

1. 道路和道路-支路关联矩阵

节点的道路指节点沿树到根所经过的路径上的支路集合。

由此定义可知，节点的道路强调的是路径上的支路。道路具有如下特性：对于一个给定的树，节点的道路是唯一的；节点的道路只由树支支路组成。

假定在网络中选定了一棵树，规定树中的根节点的编号最大，其余节点按其离根节点的远近来编号，离根节点越远的节点编号越小。而支路的编号则规定为取两端节点编号中的小者，支路正方向为由小号节点指向大号节点。显然，在一棵树中，一个节点的道路是完全由树支组成的，且是唯一的。**道路-支路关联矩阵**(简称**道路矩阵**)$\boldsymbol{T}$ 中的元素定义如下：

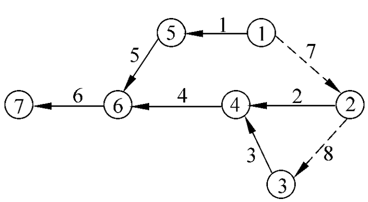

图 1.1 选定树支和连支的网络

$$t_{ik} = \begin{cases} 1 & 支路\ k\ 在道路\ i\ 上 \\ 0 & 支路\ k\ 不在道路\ i\ 上 \end{cases}$$

图 1.1 示出了一个由 6 条树支(实线表示)和 2 条连支(虚线表示)构成的图。在该图中，树支编号在先，连支编号在后，道路矩阵具

有如下形式：

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\boldsymbol{T}_{N\times b}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}=[\boldsymbol{T}_T \quad \boldsymbol{T}_L]
\end{array}
$$

其中与连支对应的部分 $\boldsymbol{T}_L$ 为零矩阵。定义节点的注入电流为 $\dot{\boldsymbol{I}}_N$，支路电流为 $\dot{\boldsymbol{I}}_b$，连支电流(也即回路电流)为 $\dot{\boldsymbol{I}}_L$，则 KCL 可以表示为

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_L+\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N=\dot{\boldsymbol{I}}_b \tag{1-29a}$$

上式表明支路电流由两部分组成：一是节点注入电流 $\dot{\boldsymbol{I}}_N$ 对在道路上的支路的贡献，二是回路电流对在回路上的支路的贡献。

在没有连支或连支电流为零的条件下，则有

$$\dot{\boldsymbol{I}}_b=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N \tag{1-29b}$$

这就是采用道路矩阵描述的 KCL 定律，在回路分析法中得到广泛应用。

2. 关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的关系

考虑节点注入不作为网络中的支路的情况，并规定节点注入电流以流入节点为正；对支路电流，规定其离开节点的方向为正，在没有连支或连支电流为零的情况下，有

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_b=\dot{\boldsymbol{I}}_N$$

即节点注入电流等于由该节点流出到与该节点相连的各支路电流之和。将式(1-29b)代入上式可得

$$\dot{\boldsymbol{I}}_N=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N$$

由于上式对所有 $\dot{\boldsymbol{I}}_N$ 均成立，因此关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的关系为

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$$

即

$$\boldsymbol{I}=[\boldsymbol{A}_T \quad \boldsymbol{A}_L]\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_T^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{T}_L^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{T}_L$ 为零矩阵，所以由上式可得

$$\boldsymbol{A}_T\boldsymbol{T}_T^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}_T^{-1}=\boldsymbol{T}_T^{\mathrm{T}} \tag{1-30}$$

由式(1-11)可得

$$\boldsymbol{B}_T^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}_T^{-1}\boldsymbol{A}_L = -\boldsymbol{T}_T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_L \tag{1-31}$$

关系式 $\boldsymbol{A}_T\boldsymbol{T}_T^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 可以通过研究节点和节点的道路之间的关系来理解。由图1.1中选定的树知，两个节点号相同时，例如都是节点4，只有节点4发出的支路在节点4的道路上，所以 $\boldsymbol{A}_T$ 和 $\boldsymbol{T}_T^{\mathrm{T}}$ 乘积的对角元为1；当两个节点号不同时，要么一个节点发出的道路不经过另一个节点，要么经过另一个节点，但有支路一进一出，所以 $\boldsymbol{A}_T$ 和 $\boldsymbol{T}_T^{\mathrm{T}}$ 乘积的非对角元为0。

## 1.3　电力网络支路特性的约束

### 1.3.1　一般支路及其退化

给定一条一般的支路 $k$，如图1.2(a)所示。它包含有电动势源 $\dot{E}_k$，以支路电流 $\dot{I}_k$ 的方向为电压升的正方向；电流源 $\dot{I}_{sk}$；支路的参数可以用支路阻抗 $z_k$ 或支路导纳 $y_k$ 来表示，$z_k=y_k^{-1}$；支路电压 $\dot{V}_k$ 以支路电流 $\dot{I}_k$ 的方向为电压降的正方向。

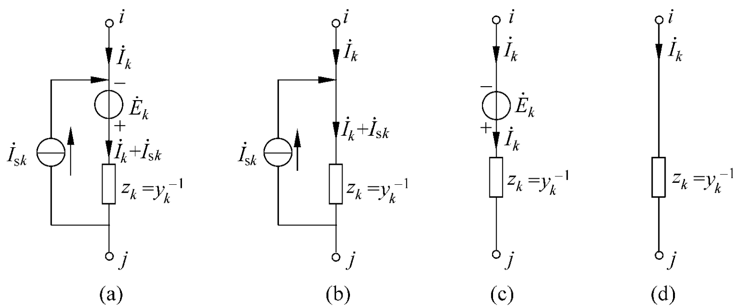


图1.2　一般支路及其退化

元件特性的约束可以用如下的支路方程来表示：

$$\dot{V}_k+\dot{E}_k=z_k(\dot{I}_k+\dot{I}_{sk}) \quad 或 \quad \dot{I}_k+\dot{I}_{sk}=y_k(\dot{V}_k+\dot{E}_k) \tag{1-32a}$$

一般支路有三种退化的情况，即在图1.2中，图(b)支路内没有电动势源；图(c)支路内没有电流源；图(d)支路内既无电动势源也无电流源。相应的支路方程分别为

$$\dot{V}_k=z_k(\dot{I}_k+\dot{I}_{sk}) \quad 或 \quad y_k\dot{V}_k=\dot{I}_k+\dot{I}_{sk} \tag{1-32b}$$

$$\dot{V}_k+\dot{E}_k=z_k\dot{I}_k \quad 或 \quad y_k(\dot{V}_k+\dot{E}_k)=\dot{I}_k \tag{1-32c}$$

$$\dot{V}_k=z_k\dot{I}_k \quad 或 \quad y_k\dot{V}_k=\dot{I}_k \tag{1-32d}$$

图 1.2(b)所示的含电流源电路可以等效转换为图 1.2(c)所示含电动势源电路，即

$$z_k\dot{I}_{sk} = -\dot{E}_k \tag{1-33a}$$

这就是原支路的戴维南等值。同样，图 1.2(c)所示的含电动势源电路可以等效转换为图 1.2(d)所示的含电流源电路，即

$$y_k\dot{E}_k = -\dot{I}_{sk} \tag{1-33b}$$

这就是原支路的诺顿等值。

### 1.3.2　网络支路方程和原始阻抗(导纳)矩阵

把网络内所有支路方程集合在一起，引入电动势源矢量和电流源矢量

$$\dot{\boldsymbol{E}}_s = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 & \cdots & \dot{E}_k & \cdots & \dot{E}_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_s = \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} & \cdots & \dot{I}_{sk} & \cdots & \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

可以得到网络的支路方程

$$\dot{\boldsymbol{V}}_b + \dot{\boldsymbol{E}}_s = \boldsymbol{z}_b(\dot{\boldsymbol{I}}_b + \dot{\boldsymbol{I}}_s) \tag{1-34}$$

或

$$\boldsymbol{y}_b(\dot{\boldsymbol{V}}_b + \dot{\boldsymbol{E}}_s) = \dot{\boldsymbol{I}}_b + \dot{\boldsymbol{I}}_s \tag{1-35}$$

式中，$\boldsymbol{z}_b$ 和 $\boldsymbol{y}_b$ 分别称为原始阻抗矩阵(primitive impedance matrix)和原始导纳矩阵(primitive admittance matrix)，是阶数等于网络支路数的方阵，且二者互为逆矩阵，即

$$\boldsymbol{y}_b^{-1} = \boldsymbol{z}_b \tag{1-36}$$

若网络内所有支路之间不存在互感，则 $\boldsymbol{z}_b$ 和 $\boldsymbol{y}_b$ 是对角线矩阵，对角线元素即是对应的支路阻抗 $z_k$ 和支路导纳 $y_k$；若支路之间存在互感，则 $\boldsymbol{z}_b$ 在相应于互感支路相关的位置上存在非零非对角线元素。

由于网络的支路方程和原始阻抗(导纳)矩阵仅表达了支路电压和支路电流之间的关系，并未涉及支路之间的连接关系，所以它仅是网络支路特性约束的表达形式。

## 1.4　网络方程——网络的数学模型

由于可以从不同的角度来考察网络的关联关系，因此网络方程的形式也不是唯一的。

### 1.4.1 节点网络方程

节点分析法以节点电压 $\dot{\boldsymbol{V}}_N$ 和节点注入电流 $\dot{\boldsymbol{I}}_N$ 为物理量。网络的支路特性约束为

$$\boldsymbol{y}_b(\dot{\boldsymbol{V}}_b+\dot{\boldsymbol{E}}_s)=\dot{\boldsymbol{I}}_b+\dot{\boldsymbol{I}}_s$$

网络的拓扑约束为

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_b=\boldsymbol{0}\quad(\text{KCL})$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_N=\dot{\boldsymbol{V}}_b\quad(\text{KVL})$$

由以上三个方程可以推得

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_b\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\dot{\boldsymbol{V}}_N=\boldsymbol{A}(\dot{\boldsymbol{I}}_s-\boldsymbol{y}_b\dot{\boldsymbol{E}}_s)\tag{1-37}$$

将式(1-37)中的支路电动势源变换成支路电流源，令

$$-\boldsymbol{y}_b\dot{\boldsymbol{E}}_s=\dot{\boldsymbol{I}}'_s$$

并引入节点注入电流的定义，将支路电流源变换成节点注入电流 $\dot{\boldsymbol{I}}_N$，式(1-37)的左侧为

$$\boldsymbol{A}(\dot{\boldsymbol{I}}_s+\dot{\boldsymbol{I}}'_s)=\dot{\boldsymbol{I}}_N\tag{1-38}$$

将式(1-38)代入式(1-37)，得节点网络方程

$$\boldsymbol{Y}\dot{\boldsymbol{V}}_N=\dot{\boldsymbol{I}}_N\tag{1-39}$$

其中

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_b\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tag{1-40}$$

称为**节点导纳矩阵**。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 反映了网络的拓扑约束，$\boldsymbol{y}_b$ 反映了网络的支路特性约束，所以节点导纳矩阵集中了网络两种约束的全部信息。加上网络的边界条件，即节点注入电流 $\dot{\boldsymbol{I}}_N$，就构成了以节点电压 $\dot{\boldsymbol{V}}_N$ 表示的网络数学模型。若网络参数以阻抗形式表示，则节点网络方程有如下形式：

$$\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{I}}_N=\dot{\boldsymbol{V}}_N\tag{1-41}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}^{-1}\tag{1-42}$$

称为**节点阻抗矩阵**。

除了电力网络分析中最常用的节点网络方程外，有时也采用回路分析法[21,22]和割集(广义节点)分析法。

### 1.4.2 回路网络方程

回路分析法以回路电流 $\dot{\boldsymbol{I}}_L$ 和回路电动势源 $\dot{\boldsymbol{E}}_L$ 为物理量。网络的支路特性约束为

$$\dot{\boldsymbol{V}}_b + \dot{\boldsymbol{E}}_s = \boldsymbol{z}_b(\dot{\boldsymbol{I}}_b + \dot{\boldsymbol{I}}_s)$$

网络的拓扑约束为

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_L = \dot{\boldsymbol{I}}_b \quad (\mathrm{KCL})$$

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{V}}_b = \boldsymbol{0} \quad (\mathrm{KVL})$$

由以上三个公式可推得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_b\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_L = \boldsymbol{B}(\dot{\boldsymbol{E}}_s - \boldsymbol{z}_b\dot{\boldsymbol{I}}_s)$$

将支路电流源变换成支路电动势源，即

$$-\boldsymbol{z}_b\dot{\boldsymbol{I}}_s = \dot{\boldsymbol{E}}'_s \tag{1-43}$$

再引入回路电动势源定义，将支路电动势源变换成回路电动势源 $\dot{\boldsymbol{E}}_L$，有

$$\boldsymbol{B}(\dot{\boldsymbol{E}}_s + \dot{\boldsymbol{E}}'_s) = \dot{\boldsymbol{E}}_L \tag{1-44}$$

从而得到回路网络方程为

$$\boldsymbol{Z}_L\dot{\boldsymbol{I}}_L = \dot{\boldsymbol{E}}_L \tag{1-45}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}_L = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_b\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{1-46}$$

称为**回路阻抗矩阵**。同样可以表示为导纳的形式为

$$\boldsymbol{Y}_L\dot{\boldsymbol{E}}_L = \dot{\boldsymbol{I}}_L \tag{1-47}$$

其中

$$\boldsymbol{Y}_L = \boldsymbol{Z}_L^{-1} \tag{1-48}$$

称为**回路导纳矩阵**。

### 1.4.3 割集网络方程

割集分析法以割集电压 $\dot{\boldsymbol{V}}_T$ 和割集注入电流（源）$\dot{\boldsymbol{I}}_T$ 为物理量。网络的支路特性约束和网络的拓扑约束如下：

$$\boldsymbol{y}_b(\dot{\boldsymbol{V}}_b + \dot{\boldsymbol{E}}_s) = \dot{\boldsymbol{I}}_b + \dot{\boldsymbol{I}}_s$$

$$\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{I}}_b = \boldsymbol{0} \quad (\mathrm{KCL})$$

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_T = \dot{\boldsymbol{V}}_b \quad (\mathrm{KVL})$$

由以上三个公式可推得

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_b\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_T = \boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{s}} - \boldsymbol{y}_b\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}})$$

将上式中支路电动势源换成支路电流源，再引入割集注入电流源 $\dot{\boldsymbol{I}}_T$，将支路电流源换成割集注入电流源，得

$$\boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{s}} + \dot{\boldsymbol{I}}'_b) = \dot{\boldsymbol{I}}_T \tag{1-49}$$

从而得到割集网络方程

$$\boldsymbol{Y}_Q\dot{\boldsymbol{V}}_T = \dot{\boldsymbol{I}}_T \tag{1-50}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}_Q = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_b\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{1-51}$$

为**割集导纳矩阵**。

### 1.4.4 基于道路的回路网络方程

1.4.2 小节中介绍的回路分析法是求解一般的电力网络的方法。如果网络图接近树支状，例如对回路数很少的低压电网，则基于道路的回路分析法有其特殊的优势[21,22]。

设网络中节点的注入电流为 $\dot{\boldsymbol{I}}_N$，对于选定的一棵树，支路特性约束为

$$\dot{\boldsymbol{V}}_b = \boldsymbol{z}_b\dot{\boldsymbol{I}}_b$$

网络的拓扑约束为(见式(1-29a)和式(1-18))

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_L + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N = \dot{\boldsymbol{I}}_b \quad (\mathrm{KCL})$$

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{V}}_b = \boldsymbol{0} \quad (\mathrm{KVL})$$

注意其中 KCL 与一般的回路分析法不同。由以上三个公式可得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_b\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_L = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_b\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N$$

考虑到式(1-46)的回路阻抗矩阵表达式，故有

$$\dot{\boldsymbol{I}}_L = -\boldsymbol{Z}_L^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_b\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N \tag{1-52}$$

将它代入式(1-29a)的 KCL 表达式，有

$$\dot{\boldsymbol{I}}_b = (\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_L^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_b\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})\dot{\boldsymbol{I}}_N \tag{1-53}$$

定义

$$\dot{\boldsymbol{I}}'_b = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N, \quad \dot{\boldsymbol{I}}''_b = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_L^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_b\dot{\boldsymbol{I}}'_b$$

则式(1-53)可写为

$$\dot{\boldsymbol{I}}_b = \dot{\boldsymbol{I}}'_b + \dot{\boldsymbol{I}}''_b$$

式中，$\dot{\boldsymbol{I}}'_b$ 为节点注入电流在树支支路上的贡献；$\dot{\boldsymbol{I}}''_b$ 为回路电流的贡献。

对于特殊的无环路的辐射网，网络本身就是一棵树，由式(1-30)可知，节点关

联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和道路关联矩阵 $\boldsymbol{T}$ 都是可逆方阵，网络方程的求解可以简化为下面两步：①利用式(1-53)求支路电流的前推过程(此时无回路电流)

$$\dot{\boldsymbol{I}}_b = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_N \tag{1-54}$$

②用式(1-19)和式(1-30)可得求节点电压的回代过程

$$\dot{\boldsymbol{V}}_N = \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_b = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}_b\dot{\boldsymbol{I}}_b \tag{1-55}$$

这也是求解辐射网潮流的前推回代法的理论基础。

式(1-54)表达了节点注入电流在树支支路上的分布；式(1-55)表达了用支路电流计算支路电压，进而计算节点电压的过程。

## 1.5　关联矢量与支路的数学描述

### 1.5.1　关联矢量和一般无源支路的数学描述

由节点支路关联矩阵的定义知，关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是由 $b$ 个列向量组成的，其第 $k$ 个列向量 $\boldsymbol{M}_k$ 与第 $k$ 条支路对应。若支路 $k$ 与独立节点 $i$ 和 $j$ 关联，支路导纳参数为 $y_k$，规定支路 $k$ 的正方向从 $i$ 指向 $j$，如图 1.3 所示，则有

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{M}_k = [\begin{matrix}0 & \cdots & 1 & \cdots & -1 & \cdots & 0\end{matrix}]^{\mathrm{T}} \\ \qquad\quad\ \begin{matrix}1 & & \ i & & \quad j & & N\end{matrix}\end{array} \tag{1-56}$$

若支路 $k$ 是与独立节点 $i$ 和参考节点关联的并联支路，如图 1.4 所示，参考的节点号是 $N+1$，不在关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，则有

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{M}_k = [\begin{matrix}0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\end{matrix}]^{\mathrm{T}} \\ \qquad\quad\ \begin{matrix}1 & & i & & N\end{matrix}\end{array} \tag{1-57}$$

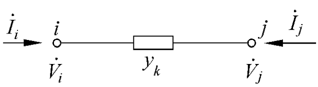


图 1.3　一般串联支路

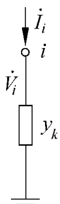


图 1.4　一般并联支路

列向量 $\boldsymbol{M}_k$ 称为**关联矢量**(incidence vector)，它描述了支路 $k$ 在网络中的连接关系。显然，支路 $k$ 的电压为 $\boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_N$，根据欧姆定律，有

$$\boldsymbol{M}_k\dot{I}_k = \boldsymbol{M}_k y_k \boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{V}}_N \tag{1-58}$$

上式即为利用关联矢量表达的一般无源支路特性约束。对所有无源支路求和，则有

$$\sum_{k=1}^{b} \boldsymbol{M}_k \dot{I}_k = \dot{\boldsymbol{I}}_N = \left(\sum_{k=1}^{b}\boldsymbol{M}_k y_k \boldsymbol{M}_k^{\mathrm{T}}\right)\dot{\boldsymbol{V}}_N = \boldsymbol{Y}\dot{\boldsymbol{V}}_N \tag{1-59}$$

此即节点网络方程式(1-39)的另一种形式，它表明节点导纳矩阵可以按支路逐条形成。

### 1.5.2　广义关联矢量和变压器/移相器支路的数学描述

对于有标准变比的变压器支路，在电力网络分析中，其标准变比可含在标么值的基值之中；但对于含有非标准变比的变压器和移相器支路，则除了有支路参数外，还含有要处理的变比，如图1.5所示。考虑一般的情况，支路$k$在节点$i$端和节点$j$端都接有理想变压器，其变比分别为$\dot{t}_i$和$\dot{t}_j$(变比用复数表示可包含移相器的情况)。

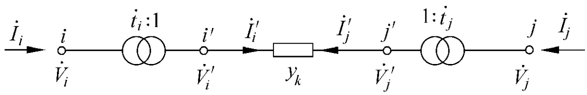


图1.5　变压器/移相器支路

对于含有非标准变比的变压器支路，经常采用经过变换的Π型等值电路，即用三条支路来描述，把变比含在支路参数中；对于移相器支路则要用一个有源的Π型等值电路来描述。这种处理方法不太简捷，也不太直观。可以将关联矢量和关联矩阵的概念加以推广，用广义关联矢量和广义关联矩阵来描述含有非标准变比的变压器和移相器支路，从而简单明了地描述变压器/移相器支路在网络中的连接关系，而无需借助Π型等值电路。

根据图1.5，其中的节点电压之间有如下关系：

$$\dot{V}_i = \dot{t}_i\dot{V}_i', \quad \dot{V}_j = \dot{t}_j\dot{V}_j' \tag{1-60}$$

为了保持理想变压器两侧功率不变，节点电压和电流应满足

$$\dot{V}_i\hat{I}_i = \dot{V}_i'\hat{I}_i', \quad \dot{V}_j\hat{I}_j = \dot{V}_j'\hat{I}_j'$$

所以节点注入电流之间有如下关系：

$$\dot{I}_i = \frac{1}{\hat{t}_i}\dot{I}_i', \quad \dot{I}_j = \frac{1}{\hat{t}_j}\dot{I}_j' \tag{1-61}$$

定义流经$y_k$的电流为$\dot{I}_k$，则由图1.5知

$$\dot{I}_k = \dot{I}_i' = -\dot{I}_j' = y_k(\dot{V}_i' - \dot{V}_j') \tag{1-62}$$

将式(1-62)代入式(1-61)中，并利用式(1-60)，有