第3章 运动定理与守恒定律

矢量方程 $\boldsymbol{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$确定了力的瞬时效应，给出了动力学最基本的因果关系。将所有瞬时的变化细致地积累起来，并考虑初始条件，就可以得到运动全过程的描述。力学理论是由牛顿定律**演绎**而来的，请读者注意力学体系的这个基本构架。

矢量方程两侧同时对空间积分将得到质点的动能定理；同时对时间积分将得到质点的动量定理；方程两侧都对固定参考点求矩将得到质点的角动量定理。这三个运动定理可以看作牛顿第二定律的三种变形，它们从不同侧面展示了周围环境对质点运动状态变化所起的作用。

对于存在着相互作用的诸多质点，我们可根据需要划定边界，建立质点系统，寻求系统的整体功能。边界把系统与环境分离的直接后果就是作用力分成两类，系统内各质点之间的作用力称为内力，外界对系统内质点的作用力称为外力。按照牛顿第三定律，系统内力成对出现，所有内力的矢量和为零。由此引出内力的一系列重要性质，进而可将质点运动定理推演为反映系统整体运动规律的质点系运动定理，形成了质点系统动力学。

当系统外力满足一定条件时，在变化过程中系统作为整体可能出现守恒的运动量。从牛顿定律可以推出的机械能守恒、动量守恒和角动量守恒三个守恒关系，使复杂的力学研究得以简化。但是能量守恒与转化定律、动量守恒定律和角动量守恒定律适用范围比牛顿定律更为广泛，它们是时间、空间对称性的必然结果。在牛顿定律已不适用的微观领域，它们依然适用。

3.1 功的概念 动能定理

3.1.1 功的概念

3.1.1.1 直线运动恒力做功定义

恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用于沿直线运动的质点（如图 3.1.1），若质点位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，力与位移的夹角为 $\theta=(\boldsymbol{F},\Delta\boldsymbol{r})$，过程中力 $\boldsymbol{F}$ 对质点运动做出贡献，定义力 $\boldsymbol{F}$ 的功

$$W = F\Delta r\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$$

需要指出，定义力 $\boldsymbol{F}$ 的功，不管其他力是否在这个过程中起作用，也不涉及质点的速率大小或者有无加速度，仅仅与力 $\boldsymbol{F}$ 和质点的位移有关。功是一种规定，它不是力的瞬时

响应，而是在空间过程中发生的力在质点路径上的积累效果。力在位移方向上的投影 $F\cos\theta$ 对质点运动有贡献；而力在垂直于位移方向的投影 $F\sin\theta$，对这个质点的运动无贡献。当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$W>0$，力对运动质点做正功；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$W=0$，力对运动质点不做功；当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$W<0$，力对运动质点做负功。

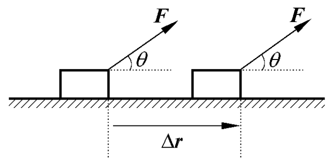

图 3.1.1　直线运动恒力做功

3.1.1.2　功的一般定义　元功及其积累

在一般情况下，作用于运动质点上的力 $\boldsymbol{F}$ 不是恒定矢量，质点的轨道也不是直线，如何确定变力在一个空间过程中所做的功呢？

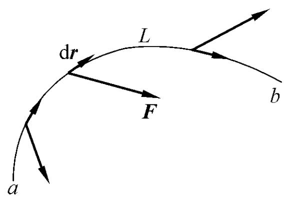

图 3.1.2　曲线运动变力做功

功具有可加性，力是连续分布的变量。对于力在路径上的积累求和，物理学惯用方法就是微元法。先对路径无限分割。在一个路径微元中，应用局域线性化的办法，力被视为常矢量，曲线元作为直线元，找出这个路径微元中局部过程功的表述。然后，无限求和，作积分。如图 3.1.2 所示，质点通过 P 点附近一个微小线元 $\mathrm{d}s$ 时，路径看作沿轨道切线的直线，元位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$，力 $\boldsymbol{F}$ 作为常矢量，按直线运动恒力做功定义，微元过程中力 $\boldsymbol{F}$ 的元功

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\tag{3.1.1}$$

在全过程中，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的总功 W 是所有元功的代数和，取积分(第二类曲线积分)

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_{L(a)}^{(b)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\tag{3.1.2}$$

积分沿轨道 L 从位置 a 向位置 b 进行。(3.1.2) 式是力对质点做功的普遍定义。

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{F}=F_x\hat{\boldsymbol{x}}+F_y\hat{\boldsymbol{y}}+F_z\hat{\boldsymbol{z}},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}}$$

元功

$$\mathrm{d}W=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{F}=F_\mathrm{n}\hat{\boldsymbol{n}}+F_\tau\hat{\boldsymbol{\tau}},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}s\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

元功

$$\mathrm{d}W=F_\tau\mathrm{d}s$$

可以看到法向力对质点不做功。

如果质点同时受到几个力 $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 的作用，那么合力 $\boldsymbol{F}=\sum\limits_i\boldsymbol{F}_i$ 的功

$$W=\int_{L(a)}^{(b)}\Big(\sum_i\boldsymbol{F}_i\Big)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

等于各分力做功 $W_i=\int_{L(a)}^{(b)}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}(i=1,2,\cdots)$ 之和，即 $W=\sum\limits_i W_i$。

3.1.2 功率

t 时刻,力 $\boldsymbol{F}$ 的瞬时功率定义为

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.1.3}$$

其中 $\mathrm{d}W$ 为$[t,t+\mathrm{d}t]$时间内力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的元功,$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 是质点的瞬时速度。

如果瞬时功率随时间变化 $P=P(t)$,那么在一段时间$(t_\mathrm{f}-t_\mathrm{i})$内的平均功率为

$$\bar{P}=\frac{W}{t_\mathrm{f}-t_\mathrm{i}}=\frac{1}{t_\mathrm{f}-t_\mathrm{i}}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}}P(t)\mathrm{d}t \tag{3.1.4}$$

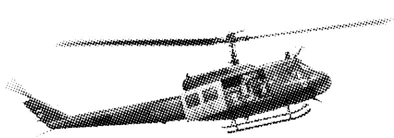

图 3.1.3 例题 3.1.1 用图

例题 3.1.1 一架质量为 m 的直升机(图 3.1.3),以顶部螺旋桨向下推动空气获得升力,被下推的空气速率为 u。求:直升机在空中静止不动时发动机的功率。

解:直升机在空中静止不动时获得的升力即顶部螺旋桨向下推动空气的推力等于 mg,因此,发动机的功率 $P=mgu$。

3.1.3 质点动能定理——牛顿第二定律的空间积分

在一个元过程中,合外力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 m 所做的元功

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

采用自然坐标

$$\boldsymbol{a}=a_\mathrm{n}\hat{\boldsymbol{n}}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=v\mathrm{d}t\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

则

$$\mathrm{d}W=mv\mathrm{d}v=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{3.1.5}$$

显然,合外力的元功等于质点动能的元增量。合外力的法向分量不做功,只引起质点速度方向的变化,它的切向分量对质点做功。设质点初始状态(incipient state)(i)的速度是 $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$,到末状态(final state)(f)时速度变为 $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$,在全过程中合外力对质点做功为

$$W=\int_{(\mathrm{i})}^{(\mathrm{f})}\mathrm{d}W=\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}}mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2-\frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 \tag{3.1.6}$$

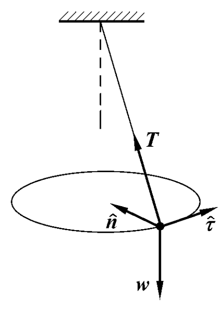

图 3.1.4 锥面摆

质点动能 $E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv^2$ 是质点运动状态的单值函数,是质点机械运动的量度之一。(3.1.6)式所表达的质点动能定理简写为

$$W=E_\mathrm{kf}-E_\mathrm{ki} \tag{3.1.7}$$

动能定理是牛顿第二定律的空间积分,它指出:相对于惯性系,质点动能的变化等于过程中合外力的功。

例题 3.1.2 锥面摆。如图 3.1.4,质点 m 在水平面内作匀速圆周运动,讨论重力、线绳张力及合外力的元功。

解：质点作匀速圆周运动，见图 3.1.4，其动力学方程为

$$\boldsymbol{w}+\boldsymbol{T}=m\boldsymbol{a}=ma\hat{\boldsymbol{n}}$$

由于$\hat{\boldsymbol{\tau}}\perp\boldsymbol{T}$，$\hat{\boldsymbol{\tau}}\perp\boldsymbol{w}$，故 $\mathrm{d}W_T=0$，$\mathrm{d}W_w=0$。

合外力 $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{T}$ 不为零，但合外力在质点转动过程中不做功，质点动能保持不变。

例题 3.1.3　如图 3.1.5，用恒力 F 通过轻绳和定滑轮把一个静止在 a 处质量为 m 的物体沿光滑水平面拉到位置 b。求过程中绳张力对物体所做之功 W，物体到达 b 点时的速率 v。

解：建立水平方向的 Ox 轴，原点 O 设于位置 a，物体经过坐标 x 处的元位移为 $\mathrm{d}x$，力 $\boldsymbol{F}$ 的元功

$$\mathrm{d}W=F\cos\theta\mathrm{d}x$$

绳与 x 轴夹角

$$\theta=(\boldsymbol{F},\hat{\boldsymbol{x}})$$

几何关系

$$x=x(\theta)=h\cot\theta_{\mathrm{i}}-h\cot\theta$$

取微分

$$\mathrm{d}x=\frac{h}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

张力对物体所做之功

$$W=\int_{(a)}^{(b)}\mathrm{d}W=\int_{\theta_{\mathrm{i}}}^{\theta_{\mathrm{f}}}Fh\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{Fh}{\sin\theta_{\mathrm{i}}}-\frac{Fh}{\sin\theta_{\mathrm{f}}}$$

从绳的另一端看，恒力的功正是张力 F 与绳端移动距离$\left(\frac{h}{\sin\theta_{\mathrm{i}}}-\frac{h}{\sin\theta_{\mathrm{f}}}\right)$的乘积。

在物体滑动过程中，合外力对它所做的功

$$W=\int_{(a)}^{(b)}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(a)}^{(b)}F\mathrm{d}x$$

根据动能定理

$$W=E_{\mathrm{kf}}-E_{\mathrm{ki}}=\frac{1}{2}mv^2$$

得到

$$v=\sqrt{\frac{2Fh}{m}\left(\frac{1}{\sin\theta_{\mathrm{i}}}-\frac{1}{\sin\theta_{\mathrm{f}}}\right)}$$

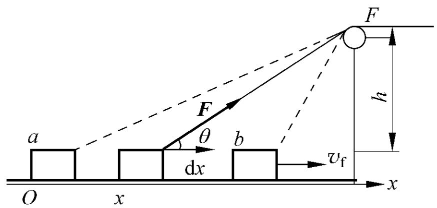

图 3.1.5　例题 3.1.3 用图

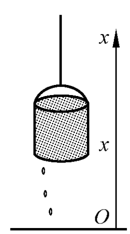

图 3.1.6　例题 3.1.4 用图

例题 3.1.4 一人从 10 m 深的井中提水(图 3.1.6),开始时桶中装有 10 kg 的水,以后水桶匀速上升,直到井口,但桶连续而又均匀地漏水,每升高 1 m 要漏去 0.2 kg 的水,桶质量 2 kg,求:人提水过程所做的功。

解:设 Ox 轴从水面竖直向上,桶与水总质量 M 随 x 变化,有

$$M = M(x) = M_0 - kx \ (0 \leqslant x \leqslant 10)$$

$$M_0 = 12\ \text{kg}, \quad k = 0.2\ \text{kg/m}$$

由于匀速上升,对桶与水有 $F - Mg = 0$,人所做的功为

$$W = \int_0^{10} F\mathrm{d}x = \int_0^{10} (M_0 - kx) g\mathrm{d}x \approx 1078\ (\text{J})$$

例题 3.1.5 一地下蓄水池面积 $S = 50\ \text{m}^2$,贮水深度 1.5 m,水面低于地面 5.0 m,如图 3.1.7,问将这池水全部抽到地面至少需要多少功?若抽水机效率为 70%,输入功率为 40 kW,全部抽水需要多少时间?

解:设 Ox 轴竖直向下,地面为 $x=0$,将深度为 x 附近厚度为 $\mathrm{d}x$ 一层水抽到地面,至少需做元功

$$\mathrm{d}W = x\rho g S\mathrm{d}x$$

把全部蓄水抽到地面至少需做功

$$W = \int_{5.0}^{6.5} \rho g S x \mathrm{d}x \approx 4.23 \times 10^6 (\text{J})$$

抽水机的输出功率 $P_o = \eta P_i = 28(\text{kW})$,池水全部抽到地面所需时间 $t = \dfrac{W}{P_o} \approx 151(\text{s})$。

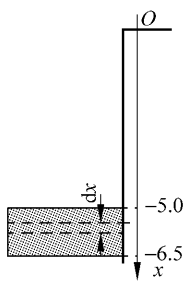

图 3.1.7 例题 3.1.5 用图

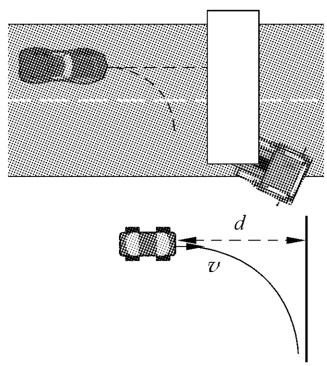

图 3.1.8 例题 3.1.6 用图

例题 3.1.6 一辆汽车以速率 v 前进,司机突然见到正前方距离为 d 处有障碍物(如图 3.1.8)。问汽车是急刹车还是急转弯有利于避免相撞?

分析:设汽车急刹车时路面对轮胎提供的摩擦力为 F_1,x_1 是小于 d 的一段距离,由动能定理,有

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_1 x_1 \leqslant F_1 d$$

即,为避免相撞,急刹车需要路面对汽车轮胎提供的摩擦力 $F_1 \geqslant \dfrac{mv^2}{2d}$。

设汽车急转弯的轨道半径为 $x_2(<d)$，路面对汽车轮胎提供的静摩擦力为 F_2，根据牛顿第二定律

$$F_2 = \frac{mv^2}{x_2} \geqslant \frac{mv^2}{d}$$

为避免相撞，汽车急转弯时，路面需要对汽车轮胎提供的静摩擦力 $F_2 \geqslant \frac{mv^2}{d}$。

显然 $F_2 > F_1$，也就是说，刹车把握大一些。

例题 3.1.7 质量为 M 的机车牵引着质量为 m 的一节车厢在平直轨道上匀速前进。忽然车厢与机车脱钩，待司机发觉后再关闭油门，机车已行驶了一段距离。如果最后停止的机车与车厢距离为 b，试推算两车脱钩到司机关闭油门机车行驶了多远。设阻力与车重成正比，脱钩前后机车牵引力不变。

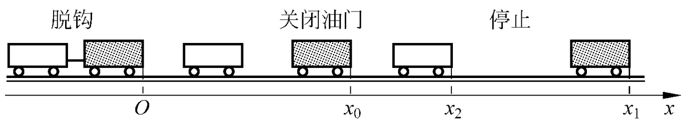

图 3.1.9 例题 3.1.7 用图

解：建立 Ox 轴，如图 3.1.9 所示。设机车与车厢脱钩处机车坐标为 $x=0$，此时车速为 v_0；司机关闭油门处机车坐标为 x_0；车厢停止于 x_2；机车停止于 x_1。已知 $x_1 - x_2 = b$，因阻力与车重成正比，关闭油门前机车牵引力为

$$F = \mu(M+m)g$$

机车从 $x=0$ 到停止，全过程合外力的功为

$$F(x_0 - 0) - \mu Mg(x_1 - 0) = 0 - \frac{1}{2}Mv_0^2$$

车厢从脱钩到停止，全过程中只有摩擦力的功

$$-\mu mg(x_2 - 0) = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

联立以上各式，消去为 v_0，解出

$$x_0 = \frac{M}{M+m}b$$

3.1.4 功与参考系

3.1.4.1 功的计算与参考系的选择有关

在元功的定义中，对于选择什么样的参考系并没有限制，也就是说允许在任何一个参考系中计算功，不论是惯性系还是非惯性系。然而，在不同的参考系中质点的位移和轨道会有不同的描述，运动描述的相对性，导致 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 依赖于参考系的选择。质点间的相互作用力 $\boldsymbol{F}$，(在牛顿力学范围内)不随参考系的改变而变化。所以，功也具有相对性，或者说，功的计算与参考系的选择有关。

我们研究一个简单的例子，如图 3.1.10 所示：物体 m 置于加速前进的小车之上，它既随车前进，又相对小车向后滑动。假如，相对地面，小车沿直线前进了 s_1，物体前进了

$s_2(s_1>s_2)$，问在此过程中物体与小车间滑动摩擦力做功多少？

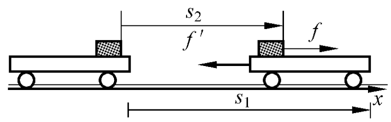

图 3.1.10 分别研究摩擦力对物体和小车所做的功

作用在物体 m 上的滑动摩擦力为 $\boldsymbol{f}$（向前），作用于小车的滑动摩擦力为 $\boldsymbol{f}'$（向后），$-\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}'=\mu mg\hat{\boldsymbol{x}}$。

以地面为参考系，这一对力做的功分别是

$$W=fs_2,\quad W'=-fs_1$$

以小车为参考系，这一对力做的功分别是

$$W=f(s_2-s_1),\quad W'=0$$

究竟哪组结论对？或者都对？如果选择了其他的参考系，显然还会有另外的结果。这就产生了一个问题：在不同的参考系里，对同一个力在同一过程中做功的表述不同是否会使功的概念失去确定的物理意义？

的确，随意选择参考系可能使问题复杂化。但是，如果将选用的参考系坚持到底，对所有的物理量都在同一参考系中测量，并且利用适合该参考系的动力学规律，仍可获得惟一的结果。也就是说，原则上不排斥在任何参考系中计算功。然而，那些不随参考系改变而变化的物理量，即参考系变换的不变量更需要加以重视。因为这些不变量往往反映运动的本质属性，是规律之所在。在上面这个例子中，一对滑动摩擦力所做功之和 $W+W'=-f(s_1-s_2)$ 在地面和小车这两个参考系中都一样。可以证明，一对作用力和反作用力做功之和是个参考系变换的不变量。

3.1.4.2 一对作用力和反作用力做功之和与参考系的选择无关

设 $\boldsymbol{f}_{12}$，$\boldsymbol{f}_{21}$ 是质点 m_1，m_2 之间的一对作用力和反作用力，S 和 S' 是两个相对平动的参考系，O 和 O' 分别是它们的坐标原点，见图 3.1.11。

表 3.1.1 在 S 和 S' 系中描述存在相互作用两质点的元位移

	位 置 矢 量			$\mathrm{d}t$ 时间内的元位移		
	m_1	m_2	O'	m_1	m_2	O'
S 系	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{R}$	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$	$\mathrm{d}\boldsymbol{R}$
S' 系	$\boldsymbol{r}_1'$	$\boldsymbol{r}_2'$		$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1'$	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2'$	

各平动参考系对应参量见表 3.1.1。从 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_1'$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_2'$，可知 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1=\mathrm{d}\boldsymbol{R}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1'$，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2=\mathrm{d}\boldsymbol{R}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2'$。作用力 $\boldsymbol{f}_{12}$ 与反作用力 $\boldsymbol{f}_{21}$ 分别对质点 m_1 和 m_2 做功之和如下：

在 S 系中

$$\mathrm{d}W_1+\mathrm{d}W_2=\boldsymbol{f}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{f}_{21}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$

在 S' 系中

$$\mathrm{d}W_1'+\mathrm{d}W_2'=\boldsymbol{f}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1'+\boldsymbol{f}_{21}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2'$$

由于 $\boldsymbol{f}_{12}+\boldsymbol{f}_{21}=0$，故 $\mathrm{d}W_1+\mathrm{d}W_2=\mathrm{d}W_1'+\mathrm{d}W_2'$，参考系变换引起的附加位移 d$\boldsymbol{R}$ 并不出现于一对力做功之和的表达式中。即，一对作用力和反作用力做功之和是个参考系变换的不变量。在图 3.1.10 所示的这个例子中，无论以地面还是以小车为参考系，物体和小车之间一对滑动摩擦力所做功之和都是 $-f(s_1-s_2)$。这里发生的摩擦生热，是机械运动转化的结果，两个参考系的解释是一致的。其实

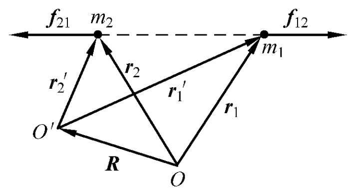

图 3.1.11 位置矢量在两个参考系中的变换决定了元位移的变换

$$\mathrm{d}W_1+\mathrm{d}W_2=\boldsymbol{f}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{f}_{21}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{f}_{12}\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{f}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}$$

这表明，一对力做功之和取决于两质点的相对位移。如果 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}=0$ 或 $\boldsymbol{f}_{12}\perp\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}$，则一对力做功之和为零。

由于一对作用力和反作用力做功之和与参考系的选择无关，所以计算功时存在一个优选参考系的问题。对于存在相互作用的两个质点，取参考系使其中一个静止，计算作用力对另一质点的功就等于一对力做功之和。因为一切力都不对选作参考系的“静止”质点做功。

“作用力和反作用力做功之和与参考系选择无关”的结论，促使我们把存在相互作用的质点视为一个系统，从整体上研究。将质点系统作为研究对象已势在必然。

例题 3.1.8 一质量 $M=0.98$ kg 的木块，静止于光滑的水平桌面上，一颗质量 $m=0.02$ kg 的子弹以 $v_0=800$ m/s 的速率水平射入木块并陷入其中，求：木块阻力对子弹所做的功和子弹对木块所做的功。若子弹在木块中的相对位移 $\Delta x=0.05$ m，在同一时间内木块相对桌面移动的距离 ΔX 为多少？

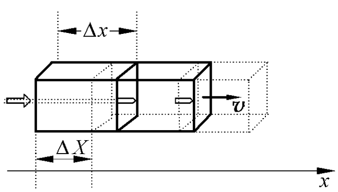

图 3.1.12 例题 3.1.8 用图

解：如图 3.1.12 所示，设子弹击入木块并停止相对移动后与木块共同具有速度为 v。水平方向动量守恒，有 $mv_0=(M+m)v$，解得 $v=16$ (m/s)。

木块阻力对子弹所做的功 W_1 等于过程中子弹动能变化

$$W_1=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-6400\ (\mathrm{J})$$

子弹对木块所做的功 W_2 就是过程中木块动能变化

$$W_2=\frac{1}{2}Mv^2-0=125\ (\mathrm{J})$$

W_1 和 W_2 都是以桌面为参考系计算的，按功的定义有

$$W_1=\int_0^{\Delta x+\Delta X}-f\mathrm{d}x,\quad W_2=\int_0^{\Delta X}f\mathrm{d}x$$

Δx 是子弹相对于木块的位移，ΔX 是木块相对于桌面的位移，则

$$W_1+W_2=-\int_{\Delta X}^{\Delta x+\Delta X}f\mathrm{d}x$$

如果摩擦力 f 是个常量，$W_1+W_2=-\int_{\Delta X}^{\Delta x+\Delta X} f\,\mathrm{d}x=-f\Delta x, W_2=f\Delta X$，那么

$$\frac{\Delta X}{\Delta x}=-\frac{W_2}{W_1+W_2}\approx 0.02,\quad \Delta X\approx 0.001\,(\mathrm{m})$$

可见，当木块和子弹的质量比很大时，碰撞过程中木块只有微小的位移。

碰撞过程中一对摩擦力做功之和 $W_1+W_2=-6275(\mathrm{J})$ 是个参考系变换的不变量，是机械运动转化为热运动的量度。

3.2 保守力 系统的势能

功是力沿质点路径的积分，功与路径有关，本来理所当然。但是，在某些力场中，场力做功却与质点路径无关。

3.2.1 重力的功

地球表面一个小范围内的重力场，可以认为是均匀力场。以地球为参考系，建立 $Oxyz$ 坐标，Oz 轴竖直向上，见图 3.2.1。把质点 m 从位置 $(a)=(x_a,y_a,z_a)$ 沿任意路径 l 移动到位置 $(b)=(x_b,y_b,z_b)$，讨论重力 $\boldsymbol{w}=-mg\hat{\boldsymbol{z}}$ 所做的功。

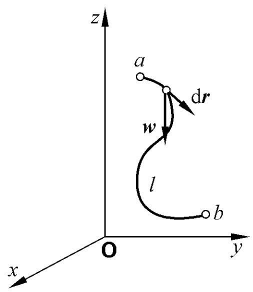

图 3.2.1 重力的元功

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x+\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y+\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z$ 是路径 l 某点附近的一个元位移，重力的元功

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-mg\,\mathrm{d}z$$

只与质点高度的变化 $\mathrm{d}z$ 有关，与元位移的两个水平投影 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 没有关系，也就是说，与路径无关。质点位置升高 $\mathrm{d}z>0$，重力做负功 $\mathrm{d}W<0$；质点位置降低 $\mathrm{d}z<0$，重力做正功 $\mathrm{d}W>0$；质点有位移但竖直高度没有变化 $\mathrm{d}z=0$，重力不做功 $\mathrm{d}W=0$。

从 a 到 b 的过程中，重力的功

$$W=\int_{l(a)}^{(b)}\boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{z_a}^{z_b}-mg\,\mathrm{d}z=mgz_a-mgz_b \tag{3.2.1}$$

被积式是个全微分，与路径无关。重力的功只与质点始末位置的竖直坐标有关。而且，重力的功是以地球为参考系计算的，因此，这个功的数值可以看作重力对质点做功与重力的反作用力对地球做功之和，还是个与参考系选择无关的量，仅仅决定于质点相对地面的高度变化。

3.2.2 保守力的概念

有些力也像重力这样，它们做功只与路径的始末位置有关，而与路径的具体形式无关。力做功的性质是由力场空间分布的特点所决定的。场力做功与路径无关的力场称为保守力场，保守力场的场力称为**保守力**(conservative force)。

闭合路径上的功为零和功与路径无关是两个等价的表述。

在图 3.2.2 中,如果质点沿闭合路径 $a(l)b(l')a$ 移动一周,重力的功可以分 $a(l)b$ 和 $b(l')a$ 两段计算,即

$$\oint \boldsymbol{w}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{l(a)}^{(b)} \boldsymbol{w}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{l'(b)}^{(a)} \boldsymbol{w}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$= \int_{l(a)}^{(b)} \boldsymbol{w}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{l'(a)}^{(b)} \boldsymbol{w}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

总和为零。

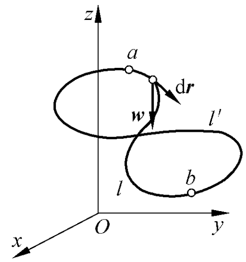

图 3.2.2　闭合路径上重力的功为零

两个质点间的相互作用如果是保守力,选取使其中一个质点为静止的参考系,计算作用力对另一个质点所做的功,实质上是一对保守力做功之和。它不仅与路径无关还与参考系选择无关。

有些接触力如摩擦力、粘滞力,它们的功与路径的具体形式有关,称为非保守力。

3.2.3　万有引力的功

质点 m 受到质点 M 的万有引力 $\boldsymbol{F}=-G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$,$\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$ 是 m 相对于 M 的位置矢量。

选择使 M 为静止的参考系,计算 m 沿任意路径 l 从 a 移动到 b 过程中万有引力所做的功。

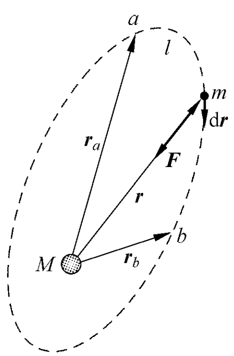

图 3.2.3　万有引力的元功

万有引力 $\boldsymbol{F}$ 的元功(图 3.2.3)为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

式中 $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}r$①

万有引力的元功是全微分

$$\mathrm{d}W = -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$$

与元位移无关,仅与 m 和 M 之间的距离变化有关。万有引力也是保守力。如果发生的元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 使得两质点距离增加,即 $\mathrm{d}r>0$,则引力做负功 $\mathrm{d}W<0$;若两质点距离减小,即 $\mathrm{d}r<0$,则引力做正功 $\mathrm{d}W>0$;如果发生位移而两质点距离不变 $\mathrm{d}r=0$,此时 $\boldsymbol{F}\perp \mathrm{d}\boldsymbol{r}$,万有引力不做功 $\mathrm{d}W=0$。

设 $|\boldsymbol{r}_a|=r_a$,$|\boldsymbol{r}_b|=r_b$,则

$$W = \int_{l(a)}^{(b)} \mathrm{d}W = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = \left(-G\frac{Mm}{r_a}\right) - \left(-G\frac{Mm}{r_b}\right) \tag{3.2.2}$$

也可记为

$$W = E_\mathrm{p}(r_a) - E_\mathrm{p}(r_b) \tag{3.2.3}$$

其中 $E_\mathrm{p}(r)=-G\dfrac{Mm}{r}$ 是由两质点质量及其距离决定的函数。

---

① 对等式 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=r^2$ 两侧同时求微分,得 $\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=2r\mathrm{d}r$ 即 $\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=r\mathrm{d}r$,$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}r$。