第1章 一元函数的极限与连续

1.1 函数与极限

1 主要内容

1. 主要定义

(1) 函数

若对 $\forall x \in D$,变量 y 按照法则 f 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$. 称数集 D 为函数的定义域,数集 $W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 为函数的值域,集合 $\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 表示函数的图形.

(2) 复合函数

设 $y=f(u), u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $y=f(u)$ 的定义域内,称 $y=f(\varphi(x))$ 为由函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,简称复合函数,称 u 为中间变量.

(3) 隐函数

在方程 $F(x,y)=0$ 中,如果 x 在某一区间上任取一确定值时,相应地总有满足这个方程的 y 存在,则称方程 $F(x,y)=0$ 在该区间上确定了 y 为 x 的隐函数.

(4) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数.

(5) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的且用一个式子表达的函数称为初等函数.

(6) 分段函数

一个函数在自变量的不同变化范围中,对应法则要用不同式子来表示的函数,称为分段函数.

(7) 邻域和去心邻域

称集合 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$ 为点 a 的 δ 邻域,集合 $U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta, \delta>0\}$ 为点 a 的去心 δ 邻域.

（8）增量

称 $\Delta x=x-x_0$ 为自变量的增量.若函数为 $y=f(x)$，称 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的增量.

（9）数列的极限（"ε-N"定义）

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

当极限存在时，亦称数列 $\{x_n\}$ 收敛；当极限不存在时，称数列 $\{x_n\}$ 发散.

（10）函数的极限

① （"ε-δ"定义）　$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，称数 a 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

② 若在①中将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改成 $-\delta<x-x_0<0$ 即 $x_0-\delta<x<x_0$，则称 a 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$ 或 $f(x_0-0)=a$.

同理，若将①中 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x-x_0<\delta$ 即 $x_0<x<x_0+\delta$，则称 a 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$ 或 $f(x_0+0)=a$.

③ （"ε-X"定义）　$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则称数 a 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

读者可自己复习 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ 的定义①.

（11）无穷小与无穷大

极限为 0 的变量称为无穷小量，简称为无穷小；极限为 ∞（这是极限不存在的情况）的变量称为无穷大量，简称为无穷大.在某一极限过程中，无穷小与无穷大也有相应的不等式形式.例如，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 等价于：$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 等价于：$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$.

（12）无穷小的阶

在同一极限过程中，若 α，β 都是无穷小量，即 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$，则有：

① 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$.

② 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，称 α 是 β 的低阶无穷小.

③ 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C$（$C\neq0$ 是一常数），称 α 是 β 的同阶无穷小.特别地，若 $C=1$，称 α 与

① 当对任一极限过程（如 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 等）结论都成立时，将极限过程简记为 lim，以后皆使用此记号.

β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

④ 如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=C$（$C\neq 0,k>0$ 是常数），称 α 是β 的 k 阶无穷小.

2. 主要结论

(1) 函数的基本性质

设 $y=f(x)$的定义域为 D.

①（有界性）　若$\forall x\in D,\exists K>0,|f(x)|\leqslant K$，则称 $f(x)$为有界函数.

②（单调性）　$\forall x_1,x_2\in(a,b)\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$在(a,b)上为单调增加函数；若 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$在(a,b)上为单调减少函数.

③（奇偶性）　设 D 是对称区间$(-a,a)$，$\forall x\in D$，若 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$是奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$是偶函数.

④（周期性）　$\forall x\in D$，若存在正数 l，$x\pm l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$，称 $f(x)$为周期函数，l 为周期.

(2) 极限性质

①（惟一性）　若极限存在，则必惟一.

②（局部有界性）

1° 收敛数列必为有界数列.

2° 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)$是有界函数.

3° 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则$\exists X>0$，当$|x|>X$ 时，$f(x)$是有界函数.

③（局部保号性）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 且 $a>0(a<0)$，则必有 $U(\hat{x}_0,\delta)$，且在此去心邻域内 $f(x)>0(f(x)<0)$；反之，若在 $U(\hat{x}_0,\delta)$内 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $a\geqslant 0(a\leqslant 0)$.

类似地，读者可自行描述$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 及$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的局部保号性.

(3) 单调有界准则

单调有界数列必有极限.

(4) 夹逼准则

① 若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

② 若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim g(x)=\lim h(x)=a$，则$\lim f(x)=a$.

(5) 等价替换原理

若在某一极限过程中，α、α'、β、β'都是不为零的无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha'$、$\beta\sim\beta'$、$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

（6）极限的重要关系

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=a$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$.

③（函数极限与数列极限的关系） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$）$\Leftrightarrow$对任意以 x_0（或∞）为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

特别地，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=a$；若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$（或$\infty$），且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)$不存在；若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$（或$\infty$），$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$（或$\infty$），且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)$不存在.

④（数列极限与其子列极限的关系） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$对于数列$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

特别地，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$；若$\{x_n\}$有一个子列的极限不存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在；若$\{x_n\}$有两个子列的极限存在但不相等，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

⑤（极限与无穷小的关系） $\lim f(x)=a\Leftrightarrow f(x)=a+\alpha(x)$，其中$\lim\alpha(x)=0$.

⑥（无穷小与无穷大的关系） 在同一极限过程中，不为零的无穷小的倒数是无穷大，无穷大的倒数是无穷小.

3. 主要运算法则和常用公式

（1）极限运算法则

若$\lim f(x)=a$，$\lim g(x)=b$，则：

① $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$；

② $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=ab$；

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}\quad(b\neq0)$.

（2）无穷小的运算法则

在同一极限过程中，有：

① 有限个无穷小之和仍是无穷小；

② 有限个无穷小之积仍是无穷小；

③ 无穷小与有界变量的乘积仍为无穷小，即若有$|f(x)|\leqslant M$ 且$\lim g(x)=0$，则$\lim f(x)g(x)=0$.

（3）复合函数的极限运算法则

若在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$ 且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=b$，而由 $y=f(u)$，$u=$

$\varphi(x)$可得复合函数 $y=f(\varphi(x))$，则当 $x \to x_0$ 时复合函数的极限存在，且

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to a} f(u) = b.$$

（4）重要极限

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；

② $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}\left(\text{或}\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}\right)$.

（5）常用的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，有

$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$，$a^x - 1 \sim x\ln a\,(a>0, a \neq 1)$，$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$.

（6）常用公式

① $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1\,(a>0)$，$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$；

② 若$\lim \varphi(x) = 0$，则重要极限可推广使用，即$\lim \dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$，$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e}$；

③ 若$\lim \varphi(x) = \infty$，则$\lim\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = \mathrm{e}$；

④ 若$\lim \varphi(x) = 0$，则等价无穷小的关系式仍成立，即有 $\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$，$\ln(1+\varphi(x)) \sim \varphi(x)$，$\mathrm{e}^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x)$等.

2　学习指导

1. 基本要求

（1）理解函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念，掌握基本初等函数的性质和图形，了解函数的四种基本特性.

（2）掌握极限的定义和极限的有关性质，并能熟练运用极限运算法则求数列和函数的极限，会用复合函数的极限运算法则求相关极限.

（3）了解无穷小与无穷大的定义和性质，掌握无穷小的运算法则，熟练运用等价无穷小替换求极限.

（4）掌握极限存在的夹逼准则和数列收敛的单调有界准则，掌握用两个重要极限求极限的方法.

2. 重点与难点

重点　函数概念，复合函数和分段函数，极限概念，极限的运算法则，两个重要极限及其应用，等价无穷小，极限与无穷小的关系.

难点　由实际问题建立函数关系式,“ε-N”与“ε-δ”定义及其论证问题的方法,重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$的证明.

3. 学习方法

(1) 函数是变量与变量之间相互依赖关系的一种抽象的数学模型,是高等数学的主要研究对象.读者在中学数学课程里已经系统学习了函数概念、函数的四种基本特性、各种基本初等函数的性质和图形等知识,因此对函数的学习应重在复习,并掌握邻域、分段函数、初等函数、双曲函数等新知识点.对绝对值不等式、将函数复合成复合函数、将复合函数分解成简单函数链、求函数值和求函数定义域等今后常用的问题,应重点复习并熟练掌握.

(2) 极限是研究微积分的重要工具,因此必须逐步地、深刻地理解极限概念,特别是理解数列极限的“ε-N”定义和函数极限的“ε-δ”定义,学会并善于将极限定义用抽象的数学语言——四个不等式表示,并理解它们的含义.学习极限定义,首先应仔细阅读、分析和体会教材的内容,再读懂例题,然后做题.通过理解、模仿、归纳、总结掌握定义,并触类旁通去理解和掌握其他极限过程的极限定义.

(3) 极限定义并未给出求极限的具体方法,但却可以利用它验证极限存在,而且它是研究理论问题的基本方法.例如,极限的四则运算法则及极限的性质都可用它导出.

用“ε-N”定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的关键是,对事先指定的小正数$\varepsilon$,由$|x_n-a|<\varepsilon$去寻求满足条件的充分大的正整数$N$.

用“ε-δ”定义证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$的关键是,对事先指定的小正数$\varepsilon$,由不等式$|f(x)-a|<\varepsilon$去寻求满足条件的充分小的正数$\delta$.

一般需经过变形、放大、不妨设等过程简化不等式$|x_n-a|<\varepsilon$或$|f(x)-a|<\varepsilon$,以便解得$n>N$或$|x-x_0|<\delta$.其中N或δ与ε有关,但它们不是ε的函数,这是因为对于给定的ε,如果存在一个满足条件的N或δ,就必然有无数个满足条件的N或δ,所以不存在N与ε或δ与ε之间的对应规律$N=N(\varepsilon)$或$\delta=\delta(\varepsilon)$.

(4) 无穷小和无穷大分别是某一自变量变化过程中以0或∞为极限的变量,即

$$\lim f(x)=0 \quad 或 \quad \lim f(x)=\infty.$$

应把它们与绝对值很小的数或绝对值很大的数区分开.

注意　① 极限与无穷小有密切的关系,即一个函数有极限的充要条件是这个函数能表示为一个常数和一个无穷小之和.例如:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\Leftrightarrow$当$|x|$充分大时,$f(x)=a+\alpha(x)$,其中$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

② 无穷小的比较应重点掌握高阶无穷小与等价无穷小,等价无穷小可以简化求极限的运算.

③ 无穷大量与无界函数是两个不同的概念，它们具有关系：若函数 $f(x)$在自变量的某个变化过程中为无穷大量，则 $f(x)$必为无界函数，但反之不一定成立. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量，它也是$(0,1)$上的无界函数；而 $g(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$是$(0,1)$上的无界函数，但却不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大量.

④ 无穷小的商与无穷大不满足极限的四则运算法则. 称形如$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，1^∞，0^0，∞^0 型的极限式为未定式的极限，它们的结果不一定是 0 或 1.

注　若 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，称 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$\dfrac{0}{0}$型未定式，其他形式的未定式可类似定义.

(5) 本节的中心是学习极限概念和极限运算法则. 对于极限运算法则，不仅要熟练运用公式，还要注意公式成立的条件，即参加运算的每个函数极限都存在，参加和与积的极限运算的函数是有限个，商的极限运算要求分母的极限不为零.

(6) 求极限的主要方法

① 利用极限定义验证极限存在.

② 利用极限的运算法则及无穷小的运算法则.

③ 利用极限存在准则：夹逼准则和单调有界原理.

④ 利用两个重要极限.

⑤ 利用等价无穷小.

⑥ 利用连续性(1.2 节内容).

⑦ 利用变量代换、代数或三角恒等变形等.

⑧ 利用导数定义(第 2 章内容).

⑨ 利用微分中值定理、泰勒(Taylor)公式、洛必达(L'Hospital)法则(第 3 章内容).

⑩ 利用定积分定义、积分中值定理(第 5 章内容).

⑪ 利用无穷级数(第 11 章内容).

3　解题指导

1. 函数概念及其简单性态

例 1　解下列各题：

(1) 设 $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{\sin(x^2+1)+2}}$，将函数 y 分解成简单函数链；

(2) 已知 $f(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(1+x^2)$.

分析　这是与复合函数有关的问题. 分解是指把复合步骤拆开，简单函数是指基本初

等函数与多项式,分解的方法是由外向里逐层分解,直到把各中间变量都表示成基本初等函数或基本初等函数与常数的多项式形式.对于已知 $f(\varphi(x))$ 求 $f(\psi(x))$ 的问题,常用两种方法求解,较简单时用凑变量法求解,一般情况用变量代换法求解.

解 (1) 由外层逐一向内层分解,有

$$y=\mathrm{e}^u,\quad u=\arctan v,\quad v=\sqrt{w+2},\quad w=\sin s,\quad s=x^2+1.$$

(2) **方法 1**(凑变量) 因为 $x=\ln\mathrm{e}^x$,

$$f(\mathrm{e}^x)=\frac{\ln\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\sqrt{1+(\ln\mathrm{e}^x)^2},$$

所以
$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\sqrt{1+\ln^2x},$$

从而
$$f(1+x^2)=\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\sqrt{1+\ln^2(1+x^2)}.$$

方法 2(变量代换) 令 $t=\mathrm{e}^x$,则 $x=\ln t$,于是

$$f(\mathrm{e}^x)=f(t)=\frac{\ln t}{\mathrm{e}^{\ln t}}+\sqrt{1+\ln^2t}=\frac{\ln t}{t}+\sqrt{1+\ln^2t},$$

即
$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\sqrt{1+\ln^2x},$$

所以
$$f(1+x^2)=\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\sqrt{1+\ln^2(1+x^2)}.$$

例 2 解下列各题:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2-\arctan x, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$ 求 $f(x+1)$;

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f(g(x)),g(f(x))$.

分析 这是分段函数的复合运算问题,求解时必须根据中间变量的取值,确定出自变量在不同范围取值时的函数表达式.

解 (1) 因为当 $0\leqslant x+1<1$ 时 $-1\leqslant x<0$,当 $1\leqslant x+1\leqslant 2$ 时 $0\leqslant x\leqslant 1$,故

$$f(x+1)=\begin{cases}(x+1)\mathrm{e}^{x+1}, & -1\leqslant x<0,\\ (x+1)^2-\arctan(x+1), & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) $f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1.\end{cases}$ 由 $|g(x)|\leqslant 1$,即 $|2-x^2|\leqslant 1$,从而得 $|x|=1$,当 $|x|\neq 1$ 时 $|g(x)|>1$,从而

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$$

又
$$g(f(x))=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1,\end{cases}$$

而对任意 x，皆有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以，当 $|x|<+\infty$ 时，有

$$g(f(x))=2-1=1.$$

例 3　证明：(1) 若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间上有定义，则 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

(2) 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都是单调增加函数，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 也是 x 的单调增加函数.

分析　这是函数的基本性态问题，用奇偶性和单调性定义证明.

证明　(1) 因为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

记

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

则

$$\varphi(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x),\quad \psi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\psi(x),$$

即 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 分别为偶函数和奇函数，从而 $f(x)$ 可表为奇函数与偶函数之和.

(2) 当 $x_1<x_2$ 时，由题设有 $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$，从而 $f(\varphi(x_1))<f(\varphi(x_2))$，所以 $y=f(\varphi(x))$ 是 x 的单调增加函数.

2. 数列的极限

1) 用定义证明极限

例 4　用数列极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解题思路　在证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，应设法从 $|x_n-a|<\varepsilon$ 出发，推出不等式 $\dfrac{M}{n}<\varepsilon(M>0)$，从而有 $n>\dfrac{M}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]$ 即可.

证明　(1) 对任意小正数 ε，要使不等式 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立. 注意到当 $a\geqslant 1$ 时 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1$，由 $\sqrt[n]{a}-1=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$，解得 $\dfrac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)$，即 $n>\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$，取 $N_1=\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$，当 $n>N_1$ 时，就有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$. 当 $0<a<1$ 时，由 $|\sqrt[n]{a}-1|=1-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$，解得 $n>\dfrac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$，取 $N_2=\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}\right]$，当 $n>N_2$ 时，也有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$. 综上可得：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，恒有不等式 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

（2）令$\sqrt[n]{n}-1=y_n$，则 $y_n>0(n\geqslant 2)$，且由二项式定理有 $n=(1+y_n)^n=1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\cdots+y_n^n>\frac{n(n-1)}{2}y_n^2$，即 $0<y_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}(n\geqslant 2)$. 从而 $\forall\,\varepsilon>0$，由 $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1=y_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$，解得 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$，取 $N=\max\left\{\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right],2\right\}$，当 $n>N$ 时，恒有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 成立，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 是两个常用的重要极限，在以后的学习中常将它们作为公式应用.

2）利用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 求极限

例 5　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

分析　这是 1^∞ 型极限，常利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 的推广形式求解. 一般地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}=\mathrm{e}$；若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+f(n))^{\frac{1}{f(n)}}=\mathrm{e}$. 为此，本题需将数列 $\{x_n\}$ 变形为 $x_n=\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}$ 或 $x_n=(1+f(n))^{\frac{1}{f(n)}}$ 的形式.

解　（1）因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2n}{n+1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+1}=-2,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}=\mathrm{e},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-2}.$$

（2）$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\mathrm{e},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$$

3）利用极限运算法则求极限

例 6　求下列极限：

（1）设 $x_1=0.1,x_2=0.11,\cdots,x_n=0.\overbrace{11\cdots1}^{n个}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；