第1章 行 列 式

1.1 主要内容

1 基本概念

排列　由 n 个不同的元素无重复地排成一列称为这 n 个元素的全排列,简称排列.

逆序　对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就构成一个逆序.

逆序数　一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数.

排列的奇偶性　若一个排列的逆序数是奇数,则称该排列是奇排列;否则称为偶排列.

对换　把一个排列中任意两个元素的位置调换,其他元素不动得到新的排列,这种调换称作一次对换;相邻两个元素对换称为相邻对换.

行列式　设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

表中取自不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$ 的代数和,即

$$\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

或

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为元素,元素 a_{ij} 的第 1 个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第 2 个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列,从 a_{11} 起到 a_{nn} 止的斜线称为主对角线. 其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为该排列的逆序数. $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

余子式　n 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去后,剩下的 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

代数余子式　记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

k 级子式　在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列($1\leqslant k\leqslant n$),位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按原来位置组成一个 k 阶行列式 M 称为 D 的一个 k 级子式.

k 级子式的余子式　在 n 阶行列式 D 中划去一个 k 级子式的 k 行 k 列后,剩下的元素按照原来的位置组成一个 $n-k$ 级行列式 M',M' 称为 k 级子式 M 的余子式.

k 级子式的代数余子式　设 n 阶行列式 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行标为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,列标为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 k 级子式 M 的代数余子式.

转置行列式　记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

2 性质

(1) 排列逆序的性质

① 由 $1,2,\cdots,n$ 可以构成 $n!$ 种不同的排列,其中排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 称为自然排列,其逆序数为 0,即自然排列是偶排列.

② 一个排列中任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

③ 奇(偶)排列调成自然排列的对换次数为奇(偶)数.

(2) 行列式的性质

① 行列式与它的转置行列式相等.

② 互换行列式的两行(列),行列式变号.

③ 行列式的某行(列)所有元素都乘以数 k,等于该数乘以此行列式.

推论 行列式中某一行(列)所有元素的公因子都可以提到行列式符号之外.

④ 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则此行列式为 0.

推论 行列式有两行(列)完全相同,则该行列式等于 0.

⑤ 行列式的某一行(列)的元素是两组数之和,则此行列式可拆成两个新行列式之和.

⑥ 将行列式的某一行(列)的所有元素乘以同一个数后加到另一行(列)对应元素上,行列式不变.

3 主要定理及公式

行列式按某一行(列)展开定理 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

拉普拉斯(Laplace)定理(行列式按 k 行(列)展开定理) 若在 n 阶行列式 D_n 中任意取定 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$行(列),那么由这 k 行(列)所组成的所有 k 级子式与它们对应的代数余子式乘积之和等于行列式 D_n.

以四阶行列式 $D_4=\det(a_{ij})$为例.取 $k=2$,在 D_4 中取定第 1,3 行,共可以得到 $C_4^2=6$

个子式：

$$M_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},\quad M_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{31}&a_{34}\end{vmatrix},$$

$$M_4=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_5=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{14}\\a_{32}&a_{34}\end{vmatrix},\quad M_6=\begin{vmatrix}a_{13}&a_{14}\\a_{33}&a_{34}\end{vmatrix},$$

它们对应的代数余子式分别为

$$A_1=(-1)^{(1+3)+(1+2)}\begin{vmatrix}a_{23}&a_{24}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix},\quad A_2=(-1)^{(1+3)+(1+3)}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{42}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_3=(-1)^{(1+3)+(1+4)}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{42}&a_{43}\end{vmatrix},\quad A_4=(-1)^{(1+3)+(2+3)}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{24}\\a_{41}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_5=(-1)^{(1+3)+(2+4)}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{41}&a_{43}\end{vmatrix},\quad A_6=(-1)^{(1+3)+(3+4)}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{41}&a_{42}\end{vmatrix}.$$

根据拉普拉斯定理，有

$$D_4=M_1A_1+M_2A_2+M_3A_3+M_4A_4+M_5A_5+M_6A_6.$$

克拉默(Cramer)法则 若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$，则此方程组有惟一解

$$x_i=\frac{D_i}{D},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$是将 D 的第 i 列元素换成 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

推论 若齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}$$

的系数行列式不等于零($D\neq0$)，则此线性方程组只有零解.

主要公式

(1) $$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

（其中 * 部分为非零元素）

(4) $$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & * & & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) = \begin{aligned} &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \\ &\qquad (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \\ &\qquad\qquad \cdots \\ &\qquad\qquad (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

1.2　学习指导

1　基本要求

(1) 了解 n 阶行列式的定义.
(2) 掌握行列式的性质.
(3) 掌握计算行列式的基本方法.
(4) 掌握并会应用克拉默法则.

2　重点与难点

重点　n 阶行列式的计算方法.
难点　n 阶行列式的定义.

3　学习方法

行列式是线性代数中的一个重要的研究对象,也是讨论线性方程组理论的一个有力工具,学习这一章应掌握行列式的计算方法.本章的难点是行列式的定义,可以依定义去计算 n 阶行列式,但此方法计算量较大,除非行列式中有大量的零元素,否则不提倡用定义去计算行列式,而应更多地采用以下方法.

(1) 对二、三阶行列式可采用"对角线法则"即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

需要特别注意的是:对四阶及四阶以上行列式"对角线法则"不适用.

(2) 熟练掌握行列式的性质,并将行列式进行等价变形为已知的、简单的、易计算的行列式.

(3) 利用一些特殊行列式来计算行列式.常用的特殊行列式为上(下)三角行列式、关于副对角线的上(下)三角行列式、范德蒙德行列式等.

(4) 利用按行(列)展开定理及拉普拉斯定理对行列式进行降阶处理.

(5) 利用递推法来计算行列式.

(6) 利用加边法(也称升阶法)来计算行列式.计算行列式时,不一定都降阶处理,有时给行列式加上一行一列后,反而会出现一些规律性的关系,使计算简单.

(7) 利用数学归纳法来计算行列式.

以上几种方法并不是孤立地使用,我们可以灵活地运用行列式的定义、性质及相关定理,结合具体行列式的特点来计算.

1.3 解题指导

1 排列的逆序数

例 1 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数.

(1) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ \cdots\ (2n)$.

(2) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ (2n)\ (2n-2)\ \cdots\ 2$.

分析 求一个排列的逆序数,就要搞清楚基本概念"逆序"及"逆序数",我们只要把题中所有的逆序都找出来,然后加在一起就得到该排列的逆序数.

解 (1) 1 的逆序数是 0,3 的逆序数是 0,…,$(2n-1)$的逆序数是 0.

2 的逆序数是 $n-1$(比 2 大的数有 $3,5,\cdots,2n-1$,共 $n-1$ 个数),4 的逆序数是$n-2$(比 4 大的数有 $5,7,\cdots,2n-1$,共 $n-2$ 个数),……,$2n-2$ 的逆序数是 1,$2n$ 的逆序数是 0. 所以排列 $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\cdots\ (2n)$的逆序数为

$$0+0+\cdots+0+(n-1)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(2) 逆序数为

$$2+4+\cdots+(2n-2)=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1).$$

例 2 若排列 $5\ 2\ 3\ i\ 4\ 6\ j\ 7\ 9$ 为奇排列,则 i,j 各等于什么?

分析 注意排列是不同的元素排成一列,数字不允许有重复,所以 i,j 不能同时取 1 和 8,然后再判断下面两种排列:

$$5\ 2\ 3\ 1\ 4\ 6\ 8\ 7\ 9,\quad 5\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ 1\ 7\ 9$$

的奇偶性就可以确定出 i,j.

解 $5\ 2\ 3\ 1\ 4\ 6\ 8\ 7\ 9$ 的逆序数是 7,$5\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ 1\ 7\ 9$ 的逆序数是 12. 由此可知

$$5\ 2\ 3\ 1\ 4\ 6\ 8\ 7\ 9$$

是奇排列,故 $i=1,j=8$.

2 行列式的计算及证明

例 3 求行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & c \\ b & c & a & d \\ b & c & d & d \end{vmatrix}$$

的展开式中 b^2cd 的系数.

分析　记此行列式的第 i 行第 j 列交叉点上的元素为 a_{ij}. 行列式的本质是取自不同行不同列的 n 个数的乘积,而 b^2 是 b^2cd 的因子,因此我们只须考虑出现 b^2 的以下几项:

$$a_{12}a_{21},\quad a_{12}a_{31},\quad a_{12}a_{41}.$$

第一项 $a_{12}a_{21}$ 的可能性可以排除,因为第3,4行与第3,4列元素中没有因子 c. 剩下两项列表如下:

出现 b^2cd 的项	相关的列标排列	奇偶性	b^2cd 前的符号
$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$	2 3 1 4	偶	$+$
$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$	2 4 1 3	奇	$-$
$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$	2 3 4 1	奇	$-$

解　行列式展开式中出现3项 b^2cd 项,而 b^2cd 的系数是 $1-1-1=-1$.

例4　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式中出现大量的零元素,计算时应该给予充分的考虑,利用行列式的定义. 在 D_n 中只有一项不为0,即

$$a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn},$$

然后再定一下该项前的符号就可以算出 D_n.

解　$$D_n=(-1)^t a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn},$$

其中 t 为列标排列 $(n-1)(n-2)\cdots 1n$ 的逆序数,因此

$$t=0+1+2+\cdots+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

于是

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}1\times 2\times\cdots\times n=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!.$$

例5　设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$,把 D 上下翻转,或逆时针旋转 $90°$,或依副对角线翻转依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

证明:$D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$,$D_3=D$.

分析　本题必须搞清楚 D_1,D_2,D_3 的元素与 D 元素之间的关系.

证明 (1) $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$.

将 D_1 的第 n 行依次与上一行交换直至第 1 行；再对所得行列式的第 n 行依次与上一行交换直至第 2 行；……；最后将第 n 行与第 $n-1$ 行交换，即得 D. 于是

$$\begin{aligned}D_1&=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-2}\cdots(-1)\cdot D\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.\end{aligned}$$

(2) $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$. 对 D_2 按如上方法交换行，即得

$$\begin{aligned}D_2&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^{\mathrm{T}}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.\end{aligned}$$

(3) $D_3=D$. 同(1)一样交换行，得

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{nn}&a_{n-1,n}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{12}\\a_{n1}&a_{n-1,1}&\cdots&a_{11}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}a_{n1}&a_{n-1,1}&\cdots&a_{11}\\a_{n2}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{12}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{nn}&a_{n-1,n}&\cdots&a_{1n}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_1^{\mathrm{T}}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_1\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D\\&=D.\end{aligned}$$

例 6 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}.$$

分析 计算行列式时可以考虑利用行列式性质把行列式化为上(下)三角行列式，再利用三角行列式的结论(见前面主要公式). 又观察该行列式每一行元素之和都是 x，所以我们可以把每一列都加到第一列上，提取公因子 x，然后再利用行列式性质把行列式化为三角行列式.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1\\c_3-c_1}} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(其中 } c_i \text{ 表示第 } i \text{ 列)}$$

$$=x\cdot(-1)^{\frac{4\times 3}{2}}x^3$$

$$=x^4.$$

例 7　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式的特点是每行元素之和都等于 $x+(n-1)a$. 这种类型的行列式常常采用把第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第1列上去，然后提取公因子，再化行列式为三角行列式.

解

$$D_n \xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\\vdots}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$