第 14 章　微分方程的基本概念、一阶方程与高阶可降阶方程的解法

14.1　引　　言

微分方程的基本内容可概括为以下三句话：

一个基本概念：微分方程的“解”；

三类微分方程：一阶可解方程；高阶可降阶方程以及高阶线性方程；

几方面简单应用：主要是在物理、力学、几何等方面的应用.

微分方程的中心问题是“解方程”，即求微分方程的解. 解方程的基本方法是：首先判别方程是否为某类可解的方程，若是，则按该类方程的解法求解；若不是，则通过变量置换将其化成可解类型. 这种方法简称为“按类求解”. 怎样选择合适的“变量置换”？通常是根据方程的特点，通过观察待定常数或函数的具体做法，将原方程变成代数方程或较简单的新微分方程，这个过程简称为“观察待定法”. 因此，微分方程求解的基本方法是：按类求解和观察待定.

14.2　微分方程的基本概念

微分方程的基本概念有以下几方面.

(1) 解：满足微分方程的函数，即代入微分方程使其成为恒等式的函数，称为该方程的解.

(2) 阶：微分方程中所含未知函数导数阶数的最高数. 通常一个微分方程的标准型是关于最高阶导数已解出的形式，如一阶方程 $y'=f(x,y)$；二阶方程 $y''=f(x,y,y')$等.

(3) 通解或一般解：指包含有与方程阶数相同个数的独立任意常数的方程解，这实际上是含多个参数的函数族. 在一般情形下，通解不一定是方程的所有解.

(4) 线性方程与非线性方程：如果微分方程中所含未知函数及其各阶导数均是一次的，则称其为线性方程；否则就是非线性方程. 例如 $y''+xy'=0$ 是二阶线性方程，而

$y''+yy'=0$ 则是非线性方程.线性与非线性是微分方程的基本分类,两者有很大的差别.线性方程是高等数学中的主要研究对象之一,它们从解的结构到解法均有很强的规律性.特别是,线性方程的通解就是其所有解.

以上四方面是微分方程的最基本概念,另外还有“特解”、“初始条件”等概念,也都是围绕着解的概念展开的.

例 14.2.1 请判别函数

$$y_1(x)=c_1\mathrm{e}^{-x^2}+1,\quad y_2(x)=c_2,\quad y_3(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数,是否是方程

$$y'=2x(1-y),\tag{14.1}$$

$$xy''-(1-2x^2)y'=0\tag{14.2}$$

的解?若是解的话,指出是特解还是通解.

【解】 验证一个函数是否为某微分方程的解,仅需将该函数代入方程,看是否能使其成为恒等式即可.

(1) 将 $y_1(x)$代入方程(14.1)得

$$左边=-2xc_1\mathrm{e}^{-x^2};\qquad 右边=2x(-c_1\mathrm{e}^{-x^2}).$$

由于左边恒等于右边,可见 $y_1(x)$是方程(14.1)的解,又 $y_1(x)$中含有一个任意常数,因而是该一阶方程的通解,或一般解.再者,这是一阶线性方程,因而也是其所有解.

将 $y_2(x)=c_2$ 代入方程(14.1),欲让

$$0\equiv 2x(1-c_2),$$

只有 $c_2=1$ 才是恒等式,可见只有 $y_2(x)=1$ 是解,而除 $c_1=1$ 之外,$y_2(x)=c_2$ 都不是方程(14.1)的解.其实,从其通解可知,当 $c_1=0$ 时,$y_1(x)=1$.由此可知只有 $c_2=1$ 时,$y_2(x)$才是解,这是因为 $y_1(x)=c_1\mathrm{e}^{-x^2}+1$ 是方程(14.1)的所有解.

(2) 今将 $y_1(x)=c_1\mathrm{e}^{-x^2}+1$ 和 $y_2(x)=c_2$ 代入方程(14.2),全能使其成为恒等式,可见都是该方程之解,但由于均只有一个任意常数,因而不是通解,但 $y_3(x)=c_1\mathrm{e}^{-x^2}+1+c_2$ 不但是方程(14.2)的解,而且有两个独立的任意常数,因而是该方程的通解.

(3) 解 $y_1(x)=c_1\mathrm{e}^{-x^2}+1$ 是含单参数 c_1 的函数族,如果用求导方法消去参数 c_1,则得到以此为通解的一阶微分方程,即由

$$\begin{cases} y=c_1\mathrm{e}^{-x^2}+1,\\ y'=-2c_1x\mathrm{e}^{-x^2}.\end{cases}$$

消去 c_1,得方程

$$y'=2x(1-y).$$

这就是方程(14.1).

同样地，利用 $y_3(x)$，用求导方法消去两个参数 c_1 和 c_2，即由

$$y = c_1 e^{-x^2} + c_2,$$
$$y' = -2xc_1 e^{-x^2},$$
$$y'' = -2c_1 e^{-x^2} + 4x^2 c_1 e^{-x^2},$$

得到方程

$$\frac{y''}{y'} = \frac{-1+2x^2}{-x},$$

即

$$xy'' = (1-2x^2)y',$$

这就是方程(14.2).　【解毕】

例 14.2.2　求 $\int x e^x \sin x \mathrm{d}x$.

【解】　问题等价于解方程

$$y' = x e^x \sin x. \tag{14.3}$$

什么函数的导数会是 $xe^x\sin x$ 呢？显然只可能是形如

$$y = (ax+b)e^x \sin x + (cx+d)e^x \cos x \tag{14.4}$$

的函数，其中 a,b,c,d 为待定常数. 将函数(14.4)代入方程(14.3)，欲使下式

$$\begin{aligned} y' =& (ax+b)e^x\sin x + (ax+b)e^x\cos x + ae^x\sin x \\ & -(cx+d)e^x\sin x + (cx+d)e^x\cos x + ce^x\cos x \\ \equiv & xe^x\sin x \end{aligned}$$

成立，比较两边同类项的系数，得到关于系数 a,b,c 和 d 的方程组

$$\begin{cases} a-c=1, \\ b-d+a=0, \\ a+c=0, \\ b+d+c=0. \end{cases}$$

解出

$$a=\frac{1}{2},\quad c=-\frac{1}{2},\quad b=0,\quad d=\frac{1}{2}.$$

由此得

$$y(x) = \frac{x}{2}e^x\sin x - \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)e^x\cos x + C.$$

【解毕】

【注】　这种观察待定系数的方法是微分方程求解的重要途径，这里所设的带有待定常数的函数，通常称为方程的形式解. 言下之意，可能具有这种形式的解，至于是否真有，就要看代入方程后，得到的代数方程是否有解，若待定之数能求出来，则这种形式解就找

到了,否则无这种形式之解.

14.3 一阶可解方程

一阶方程 $y'=f(x,y)$中只有极少数方程可以通过积分的方法求解,这种方程统称为一阶可解类型.一阶可解类型中最基本的形式是所谓"可分离变量型"和"可化为可分离变量型"的方程.

1. 可分离变量型

这类方程形式为

$$y' = f(x)g(y). \tag{14.5}$$

或者,用微分的形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$

其解是

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

这里,不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 和 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 代表一个原函数.另外,方程(14.5)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解可以表示成

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 可化成可分离变量型

这种方程是可通过变量置换,将新方程化成可分离变量型的方程.典型的方程有以下两类:

(1) 零齐方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{14.6}$$

作变换 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,可得 $y'=u+xu'$,代入式(14.6),得到关于 u 的分离变量型方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u)-u}{x}.$$

(2) 线性变量方程

$$y' = f(ax+by). \tag{14.7}$$

作变换 $u=ax+by$, 即 $y=\frac{1}{b}(u-ax)$,可得 $y'=\frac{1}{b}(u'-a)$,代入式(14.7)得到关于 u 的分离变量型方程

$$u' = bf(u) + a.$$

类似的方程可能有许多,而其思路都是作某种变量置换之后,使新方程成为可分离变量型.

3. 一阶线性微分方程

此种类型方程的形式为

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{14.8}$$

当 $q(x) \equiv 0$ 时,

$$y' + p(x)y = 0 \tag{14.9}$$

是可分离变量型方程,称为一阶线性齐次方程,容易求得其解为

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{14.10}$$

对于一阶线性非齐次方程(14.8),它不是可分离变量型的,其解当然也不可能是函数(14.10),但是能否将其中的 c 当作新的未知函数来代替 y,而使新方程变量分离呢?即令

$$y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \quad 或写成\ c(x) = y\,\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

为适应上述变换,将方程(14.8)两边同乘 $\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$, 得

$$y'\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} + p(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}y = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{14.11}$$

即

$$\left(y\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)' = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{14.12}$$

于是得

$$c'(x) = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

$$c(x) = \int \left(q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + A.$$

从而有

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int \left(q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x. \tag{14.13}$$

这就是方程(14.8)的解. 在解这种方程时,没有必要死记公式(14.13),可以直接利用步骤(14.11),两边同乘因子 $\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$, 而后直接积分方程(14.12).

例 14.3.1　求解方程 $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$.

【解】　将方程两边同乘函数

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} = \mathrm{e}^{\ln x} = x,$$

得到新方程

$$(xy)' = \sin x,$$

两边积分得

$$xy = -\cos x + c,$$

$$y = \frac{c}{x} - \frac{\cos x}{x}.$$ 【解毕】

要指出的是,解(14.13)中 $Ae^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ 正是线性齐次方程(14.9)的一般解,而后一部分正是线性非齐次方程(14.8)的一个特解.这种解的结构形式,对一阶线性方程总是正确的.

与一阶线性方程很像的一类非线性方程

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 1) \tag{14.14}$$

称为伯努利方程,它通过变量置换可以变成线性方程,为此改写方程(14.14)成为

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x),$$

$$\frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

令 $u(x) = y^{1-\alpha}$,得关于 u 的线性方程

$$\frac{1}{1-\alpha}u' + p(x)u = q(x).$$

4. 全微分方程与积分因子

任何一阶方程都可以写成微分形式

$$X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{14.15}$$

这使人联想到对隐函数 $F(x,y) = c$ 求微分时的形式,如果有

$$X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y, \tag{14.16}$$

则方程(14.15)就变成

$$\mathrm{d}F(x, y(x)) = 0,$$

因而方程(14.15)有由隐函数给出的解

$$F(x,y) = c.$$

由混合偏导数相等可得方程(14.15)左端能变成式(14.16)的形式的条件为

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

从而可推出所谓“可积性条件”:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{14.17}$$

当然,这里的条件是 X,Y 的偏导数连续.

满足这种条件的方程显然非常少,但可以通过方程两边同乘一个函数,使之成为这种方程.这在原则上总是可能的,但实际上是将原问题转化为解另一个更一般的困难问题.

而在某些特别的情况下，这种方法能解决一些问题，这叫做积分因子方法，所乘的函数叫做积分因子. 具体在找积分因子时，通常是利用“凑微分”逐步来实现，其中常用的公式是：

$$u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u=\mathrm{d}(uv);$$

$$\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2}=\mathrm{d}\left(\frac{v}{u}\right).$$

$u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u$ 的常用积分因子有

$$\frac{1}{u^2},\quad \frac{1}{v^2},\quad \frac{1}{u^2\pm v^2},\quad \frac{1}{uv}.$$

例如，由

$$\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}=\frac{\dfrac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2}}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{v}{u}\right)}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{v}{u}\right),$$

可知$\dfrac{1}{u^2+v^2}$是 $u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u$ 的一个积分因子.

例 14.3.2　求解$(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$.

【解】　这不是线性方程，也不是可分离变量型，但可利用凑全微分的方法试试(当然可以先用可积性条件检验一下，是否是全微分方程，本题满足可积性条件).

凑全微分的过程是，先分解，把显而易见的全微分凑出来，再步步深入.

$$\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-\frac{x}{y}\mathrm{d}y\right)=0,$$

$$\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\mathrm{d}y+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y}\right)=0,$$

$$\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left[\mathrm{d}y+y\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)\right]=0,$$

$$\mathrm{d}x+\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)\right]=0,$$

$$\mathrm{d}(x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})=0,$$

$$x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=c.$$

【解毕】

例 14.3.3　求解 $y\mathrm{d}x+(x-3x^3y^2)\mathrm{d}y=0$.

【解】

$$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-3x^3y^2\mathrm{d}y=0,$$

$$\mathrm{d}(xy)-\frac{3x^3y^3}{y}\mathrm{d}y=0,$$

两边同乘$\dfrac{1}{x^3y^3}$得

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^3}-\frac{3}{y}\mathrm{d}y=0,$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}((xy)^{-2})-3\mathrm{d}(\ln y)=0,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2x^2y^2}+3\ln y\right)=0,$$

$$\frac{1}{2x^2y^2}+3\ln y=c.$$

【解毕】

14.4　高阶可降阶方程

二阶方程的一般形式是

$$y''=f(x,y,y'). \tag{14.18}$$

从利用积分求解的思路来看，主要是通过变量置换将方程降阶. 一般性的降阶方法是没有的，必须具体方程具体处理. 在方程(14.18)的右端函数中，属于缺 y 和 y'，缺 y 或缺 x 这 3 种情形，有一般的降阶处理方法.

（1）对缺 y,y' 的方程

$$y''=f(x), \tag{14.19}$$

仅需作两次不定积分即可.

也可以利用分部积分方法求解如下：

$$\begin{aligned}y(x)&=\int_{x_0}^{x}y(t)\mathrm{d}t+y(x_0)\\&=-\int_{x_0}^{x}y(t)\mathrm{d}(x-t)+y(x_0)\\&=-(x-t)y'(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x}+\int_{x_0}^{x}(x-t)y''(t)\mathrm{d}t+y(x_0)\\&=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t+y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0),\end{aligned}$$

其中，$y(x_0)$及 $y(x_0)$是任意常数.

（2）对缺 y 的方程

$$y''=f(x,y'), \tag{14.20}$$

仅需令 $p(x)=y'(x)$，就降成关于 p 的一阶方程

$$p'=f(x,p).$$

（3）对缺 x 的方程

$$y''=f(y,y'), \tag{14.21}$$

将 y 看作自变量,即令 $p(y)=y'(x)$,则

$$y''(x)=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

于是得到关于 $p(y)$的一阶方程

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p).$$

例 14.4.1 求$(1+x^2)y''+2xy'=x^3$ 的一般解.

【解】(方法 1) 这是 $y''=f(x,y')$型的方程,为此,可令 $p(x)=y'$,$y''=p'(x)$,代入原方程得

$$(1+x^2)p'+2xp=x^3.$$

这是关于 $p(x)$的一阶线性方程,可用一阶线性方程规范方法求解.但该题可以有如下显然的方程变形:

$$[(1+x^2)p]'=x^3,$$

两边积分,并加以整理可得

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^4}{4(1+x^2)}+\frac{c_1}{1+x^2}=\frac{x^4-1+1}{4(1+x^2)}+\frac{c_1}{1+x^2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2-1}{4}+\frac{c_1}{1+x^2}.$$

方程两边再积分得

$$y=c_1\arctan x+c_2+\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}.$$ 【解毕】

(方法 2) 根据该题的特点,也可以通过两边直接积分来降阶,即

$$\int_0^x(1+x^2)y''\mathrm{d}x+\int_0^x 2xy'\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}.$$

利用分部积分法,有

$$(1+x^2)y'\Big|_{x=0}^{x}-\int_0^x 2xy'\mathrm{d}x+\int_0^x 2xy'\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4},$$

$$(1+x^2)y'-y'(0)=\frac{x^4}{4},$$

这样就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^4}{4(1+x^2)}+\frac{y'(0)}{1+x^2},$$

其中 $y'(0)$是任意常数.以下求解过程与方法 1 相同. 【解毕】

例 14.4.2　解满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 及方程

$$2yy''=1+(y')^2$$

的特解.

【解】（方法 1）　这是 $y''=f(y,y')$ 型的方程，为此可令 $p(y)=y'$，则

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

代入原方程得

$$2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2,$$

$$\frac{2p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两边积分并利用初始条件 $p(1)=0$，得

$$\int_0^p\frac{\mathrm{d}p^2}{1+p^2}=\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

即

$$\ln(1+p^2)=\ln y,$$

$$1+y'^2=y, \tag{14.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y-1}}=\mathrm{d}x,$$

再利用初始条件 $y(0)=1$，并积分得

$$\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y-1}}=\int_0^x\mathrm{d}x,$$

即 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$.　　【解毕】

（方法 2）　本题还可以用凑微分的方法求解.

首先将方程变成微分形式

$$2y\mathrm{d}y'-y'\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,$$

两边同乘 y' 得

$$y\mathrm{d}(y')^2-(y')^2\mathrm{d}y=\mathrm{d}y,$$

两边再乘 $\dfrac{1}{y^2}$ 得

$$\frac{y\mathrm{d}y'^2-y'^2\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{y'^2}{y}\right)=-\mathrm{d}\frac{1}{y}.$$