第 1 章　行　列　式

在经济学及其他领域中, 线性代数是必不可少的基础理论之一, 它在研究离散变量之间的线性关系上有着重要的应用, 而行列式是研究线性代数的基础工具, 也是线性代数中的一个重要概念. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法, 进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　n 阶行列式的引出

在初等代数中, 曾用消元法求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

为消去方程组 (1.1.1) 中的未知数 x_2, 以 a_{22} 与 a_{12} 分别依次乘以式 (1.1.1) 的第一个方程与第二个方程的两端, 然后两个方程相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地, 消去 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则方程组 (1.1.1) 有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

在式 (1.1.2) 中, 其各自的分母均由方程组 (1.1.1) 中未知数的系数构成, 把这 4 个系数按它们在方程组 (1.1.1) 中的位置, 排成两行两列 (横排称行, 竖排称列) 的数表, 即用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.3}$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为 **2 阶行列式**. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1.4}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为 2 阶行列式的**元素**; 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为**列标**, 表明该元素位于第 j 列. 在式 (1.1.3) 中从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为 2 阶行列式的**值**(或展开式). 于是 2 阶行列式的值便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

利用 2 阶行列式的概念, 式 (1.1.2) 中 x_1, x_2 的分子也可以写成 2 阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式 (1.1.2) 可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上式为二元一次线性方程组的求解公式. 值得注意的是分母 D 是由方程组 (1.1.1) 的系数所确定的 2 阶行列式 (称为**系数行列式**), x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的 2 阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的 2 阶行列式.

例 1.1.1 *求解二元一次线性方程组*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -3, \\ 2x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

所以该方程组有解, 且

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3-4=-7, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6-(-6)=0.$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{7} = -1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{7} = 0.$$

类似地, 对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.6}$$

表示的代数和式为 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$, 称为 3 阶行列式的**值**(或称 **3 阶行列式的展开式**).

上述定义表明 3 阶行列式的值可按图 1.1 的“对角线法则”计算. 其遵循的规律为三条实线看作是平行于主对角线的连线, 实线上连结的三个元素的乘积取正号; 三条虚线看作是平行于副对角线的连线, 虚线上连结的三个元素的乘积取负号. 然后取这六项之和即为 3 阶行列式的值.

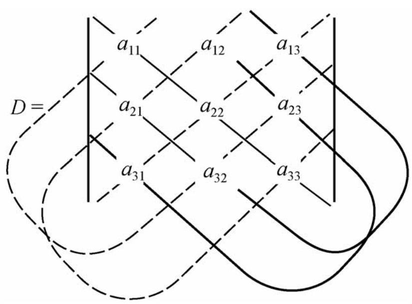

图 1.1

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

可用对角线法则计算出 D_1, D_2, D_3 的值, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1.1.5) 的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.1.7}$$

例 1.1.2 计算 3 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按照对角线法则, 得

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times 1+2\times(-3)\times(-2)+(-4)\times(-1)\times 2 \\ &\quad -(-4)\times 2\times(-2)-1\times(-3)\times 2-2\times(-1)\times 1 \\ &= 2+12+8-16+6+2=14. \end{aligned}$$

例 1.1.3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的 3 阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\ &= x^2-5x+6. \end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$, 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

请读者注意, 对角线法则仅适用于 2 阶与 3 阶的行列式. 为研究 4 阶及更高阶的行列式, 先介绍 n 阶行列式的引出.

对于 n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n, \end{cases} \tag{1.1.8}$$

也可类似二、三元的线性方程组引出的 2, 3 阶行列式而引出 n 阶行列式. 式 (1.1.8) 的系数行列式记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.9}$$

若令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

那么, 我们若称方程组 (1.1.8) 的系数行列式 (1.1.9) 为 **n 阶行列式**, 则自然会提出以下几个问题：(1) $D=$? (2) 若 $D \neq 0$, 方程组 (1.1.8) 是否有惟一解? (3) 若方程组 (1.1.8) 有惟一解, 其求解公式是否是 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\cdots,n)$? 关于这些问题, 我们将在本章结束之前, 给读者一个明确的回答.

下面先来研究第一个问题, n 阶行列式 (1.1.9) 怎样展开.

1.1.2 n 阶行列式的定义

在式 (1.1.9) 中若划去 a_{ij} 所在的第 i 行, 再划去 a_{ij} 所在的第 j 列, 余下来的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**, 记为 M_{ij}, 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

则称 A_{ij} 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

为了研究 n 阶行列式如何展开, 先来分析低阶行列式的展开式, 从而总结出 n 阶行列式的展开方法.

1 阶行列式 $D = |a_{11}| = a_{11}$;

2 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

其中, $A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}, A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}$.

3 阶行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

可见, 2 阶与 3 阶行列式的展开式都等于第一行各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 这称为行列式按第一行展开, 它们都是用一些低阶行列式表示高一阶的行列式. 因此, 人们自然就会想到用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式. 下面给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1.1 *n 阶行列式 (1.1.9) 是一个代数和式, 当 $n = 1$ 时, 定义*

$$D = |a_{11}| = a_{11};$$

当 $n \geqslant 2$ 时, 定义

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

其中 $A_{ij}(j = 1, 2, \cdots, n)$ 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

* 由定义可见, n 阶行列式的展开式是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 构成的 n 次齐次多项式, 它共有 $n!$ 项, 每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积, 在全部 $n!$ 项中, 带正号和带负号的项各占一半 (以上结论可根据定义, 用数学归纳法证明). 当第 1 行元素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时, n 阶行列式是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐次多项式.

例 1.1.4 计算 3 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按第 1 行展开, 得

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+(-4)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=8+14-8=14.$$

1.1.3 几种特殊的行列式

1. 对角行列式

称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**对角行列式**.

由定义 1.1.1, 得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ (\text{主对角线 } n \text{ 个元素的乘积}).$$

2. 下三角行列式

称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**下三角行列式**.

由定义 1.1.1, 得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 副对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}\left|a_{n1}\right|$$

$$=(-1)^{n+n+(n-1)+\cdots+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

1.2 行列式的性质与计算

利用 n 阶行列式的定义, 可以将 n 阶行列式表示为第一行的各元素与其对应的代数余子式 (即 $n-1$ 阶的行列式) 乘积的代数和. 这个过程可以依次进行下去,

直到求出行列式的值. 但是当 n 很大时, 计算量是相当大的. 为了简化行列式的计算, 我们将讨论行列式的性质.

1.2.1 行列式的性质

定义 1.2.1 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

令

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.2.1 行列式与其转置行列式的值相同, 即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

利用定义和数学归纳法可以证明 (证明略) 性质 1.2.1. 例如, 上三角行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

也是主对角元素的乘积.

性质 1.2.1 表明, 行列式中的行与列具有相同的地位, 因此行列式有关行的性质对列也同样成立, 反之亦然.

性质 1.2.2 n 阶行列式 (1.1.9) 对任一行按下式展开, 其值相等, 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

性质 1.2.2 也可以利用定义和数学归纳法证明 (证明略). 利用性质 1.2.1, 行列式按任一列展开, 其值也相等.

性质 1.2.3 互换行列式的两行 (列) 元素, 行列式的值仅改变符号.

性质 1.2.3 可用数学归纳法证明 (证明略).

推论 1.2.1 若行列式两行 (列) 对应元素相同, 则行列式的值为 0.

证明 把相同的两行 (列) 互换, 则有 $D=-D$. 故 $D=0$.

性质 1.2.4 把行列式的某一行 (列) 的各元素都乘以同一常数 k, 等于用 k 乘行列式的值.

推论 1.2.2 行列式某一行 (列) 所有元素的公因子可以提到行列式的符号外面.

推论 1.2.3 若行列式某两行 (列) 对应元素成比例, 则此行列式的值等于零.

性质 1.2.5 若行列式的某一行 (列) 的元素都是两数之和, 例如第 j 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下面两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.5 将 D 按第 j 列展开即可得到证明.

用行列式的性质和特殊行列式的计算公式, 可简化行列式的计算.

例如,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2+0 & 3 \\ 0 & 1+0 & 2 \\ 0 & 0+1 & -1 \end{vmatrix},$$