

第 1 章 向量代数与空间解析几何

空间解析几何通过坐标法把空间上的点与有序数组对应起来, 把空间上的图形和方程对应起来, 从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何知识对学习多元函数微积分是不可缺少的.

本章内容包括: 向量代数、平面和直线、曲面和曲线等.

1.1 向量及其运算

1.1.1 空间直角坐标系

在空间取定一点 O , 以 O 为原点作三条有相同的长度单位并且两两垂直的数轴, 依次记作 x 轴、 y 轴和 z 轴, 统称为**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, z 轴则在铅直线上. 它们的正方向符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时, 竖起的拇指的指向为 z 轴的正向 (图 1.1). 这样就建立了空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ **直角坐标系**, 点 O 称为该坐标系的**原点**.

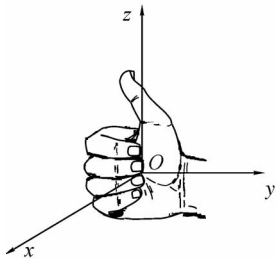


图 1.1

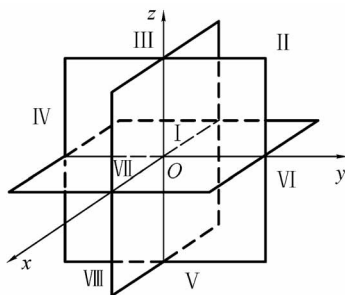


图 1.2

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面, 称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 Oxy 平面, 另外两个坐标面称为 Oyz 面和 Ozx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 称为八个卦限. 其中在 Oxy 面上方并且在 Oyz 面前方、 Ozx 面右方的那个卦限称为第 I 卦限, 在 Oxy 面上方按逆时针方向依次为 I、II、III、IV 卦限, 在 Oxy 面下方与 I、II、III、IV 卦限相对的依次是 V、VI、VII、VIII 卦限 (图 1.2).

设 M 是空间一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴并与这三个坐标轴分别交于点 P, Q 和 R (图 1.3). 设点 P, Q 和 R 在三个坐标轴上的坐标分别为 x, y 和 z , 这样, 空间的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x, y, z . 反过来, 对给定的有序数组 x, y, z , 在三个坐标轴上分别取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R , 再过点 P, Q, R 作平面分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴, 这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x, y, z 所惟一确定的点. 这样, 空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系, 称 x, y, z 为点 M 的**坐标**, 依次称 x, y, z 为点 M 的**横坐标**, **纵坐标**和**竖坐标**, 并把点 M 记作 $M(x, y, z)$.

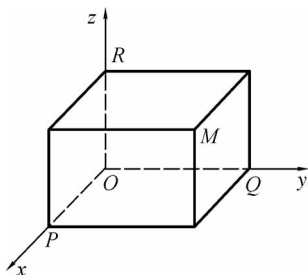


图 1.3

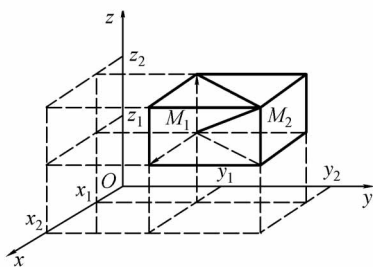


图 1.4

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点, 过 M_1, M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 1.4), 各棱的长度分别为

$$|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|.$$

根据勾股定理, 对角线 M_1M_2 的长度, 即空间两点 M_1, M_2 的距离为

$$d(M_1, M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d(O, M) = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1.1.1 在 z 轴上求一点 M , 使该点与点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等.

解 因为所求的点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 由题意有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7 - z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2 - z)^2}.$$

两边平方, 解得 $z = \frac{14}{9}$. 于是所求点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

1.1.2 向量的概念

在研究实际问题时, 我们通常遇到两种不同类型的量, 一类是只有大小的量, 例如时间、温度、质量、体积等, 这种量称为**数量**或**标量**; 另一类是既有大小又有方向的量, 例如力、速度、加速度等, 这种量称为**向量**或**矢量**.

向量通常用黑体字母来表示, 如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{i}$ 等, 也可以用上方加箭头的字母来表示, 如 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{i}$ 等. 数学上往往用一个有方向的线段来表示向量, 如果线段的起点是 M_0 , 终点是 M , 那么这个有向线段记为 $\overrightarrow{M_0M}$, 它表示一个向量, 线段的长度表示向量的大小, 线段的方向表示向量的方向. 为以后讨论问题的方便, 我们对向量和表示它的有向线段不加区分.

向量的大小叫作向量的**模**, 向量 $\mathbf{a}$ 的模记为 $|\mathbf{a}|$. 模为零的向量叫作**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$, 规定零向量的方向是任意的. 模为 1 的向量叫作**单位向量**.

如果两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模相等, 方向相同, 则称这两个向量**相等**, 记为 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 这说明, 如果两个向量的大小与方向是相同的, 那么不论它们的起点是否相同, 我们就认为它们是同一向量, 这样理解的向量称为**自由向量**, 本书只讨论自由向量.

如果向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同方向或者反方向, 称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ **平行**, 记为 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$. 由于零向量的方向是任意的, 故可认为零向量与任何向量都平行.

在直角坐标系中, 以坐标原点 O 为起点, 以点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于点 O 的**向径**, 常用 $\mathbf{r}$ 表示, 即 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$. 空间的每一点都对应着一个向径 $\overrightarrow{OM}$, 反过来, 每个向径 $\overrightarrow{OM}$ 都和它的终点 M 相对应.

1.1.3 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个不平行的向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 任取一点 M , 作 $\overrightarrow{MA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{MB} = \mathbf{b}$, 以 MA , MB 为邻边的平行四边形 $MACB$ 的对角线为 MC (图 1.5), 则向量 $\overrightarrow{MC} = \mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**和**, 记为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

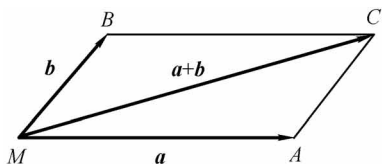


图 1.5

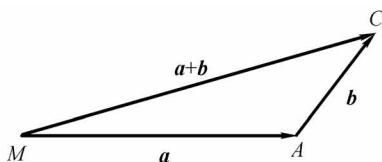


图 1.6

这个定义向量加法的规则称为向量加法的**平行四边形法则**. 这个法则没有对两个平行向量的加法加以定义, 为此我们再给出一个蕴含了平行四边形法则的加法定义:

设有两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 任取一点 M , 作 $\overrightarrow{MA} = \mathbf{a}$, 再以 A 为起点, 作 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 连接 MC , 则向量 $\overrightarrow{MC} = \mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和, 记为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (图 1.6).

这个规则称为向量加法的**三角形法则**.

向量的加法满足如下运算规律:

- (1) 交换律 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
- (2) 结合律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

2. 向量与数的乘法

对任意实数 λ 和向量 $\mathbf{a}$, 定义 λ 与 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个向量, 记为 $\lambda\mathbf{a}$, 它的模和方向规定如下:

- (1) $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$;
- (2) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 同方向; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 反方向; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

向量与数的乘法运算又称为向量的**数乘**.

几何直观上, $\lambda\mathbf{a}$ 是与 $\mathbf{a}$ 平行的向量, 只是把 $\mathbf{a}$ 伸缩了 λ 倍 (图 1.7).

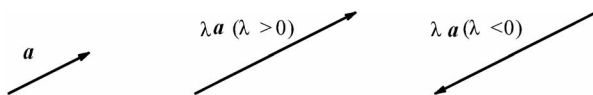


图 1.7

向量的数乘满足如下运算规律:

- (1) 分配律 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$;
- (2) 结合律 $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

其中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是任意向量, λ 和 μ 是任意实数.

对于非零向量 $\mathbf{a}$, 用 $\mathbf{e}_a$ 表示与 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量, 由向量的数乘定义, 有

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_a \quad \text{或} \quad \mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

即任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘.

定理 1.1.1 设有向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, 且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的充要条件是存在实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

证明 必要性 设 $\mathbf{b} // \mathbf{a}$, 若 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则取 $\lambda = 0$, 有 $\mathbf{b} = \mathbf{0} = 0\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$. 若 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同方向时 $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_a$, 取 $\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 有

$$\lambda\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = |\mathbf{b}|\mathbf{e}_a = |\mathbf{b}|\mathbf{e}_b = \mathbf{b}.$$

同样的, 当 b 与 a 反方向时, 取 $\lambda = -\frac{|b|}{|a|}$, 有 $b = \lambda a$.

充分性 若 $b = \lambda a$, 由数乘的定义知 $b // a$. □

利用向量的加法和数乘, 可以定义向量的减法.

对于向量 b , 称 $(-1)b$ 为 b 的**负向量**, 记作 $-b$. 向量 a 与 b 的**差**规定为

$$a - b = a + (-b).$$

若将向量 a 和 b 的起点重合, 则从向量 b 的终点到向量 a 的终点所引的向量就是 $a - b$ (图 1.8).

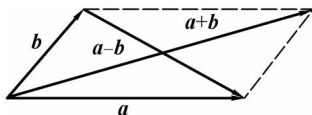


图 1.8

向量的加法和向量的数乘统称为向量的**线性运算**.

例 1.1.2 证明三角形两边中点的连线 (中位线) 平行于第三边, 其长度等于第三边长度的一半 (图 1.9).

证明 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AD = DB$, $AE = EC$, 由向量的线性运算法则, 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} \\ &= 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\ &= 2\overrightarrow{DE},\end{aligned}$$

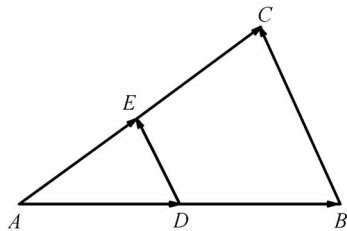


图 1.9

因此 $\overrightarrow{DE} // \overrightarrow{BC}$, 且 $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|$. □

1.1.4 向量的坐标

1. 向量的坐标

为了建立向量与数的联系, 我们把向量放在直角坐标系中加以讨论, 定义向量的坐标, 从而把向量与有序数组对应起来.

在空间直角坐标系中, 记 i, j, k 分别是与 x 轴、 y 轴、 z 轴同方向的单位向量, 称为 $Oxyz$ 坐标系下的**基本单位向量**.

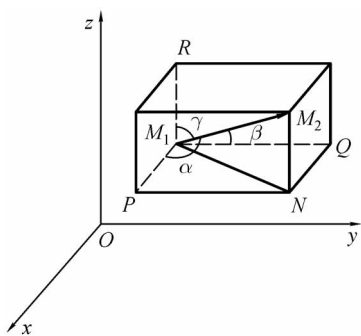


图 1.10

设 $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 是空间直角坐标系中的一个向量, 其起点和终点的坐标为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$. 以 M_1M_2 为对角线作一个各棱分别平行于三个坐标轴的长方体 (图 1.10), 有

$$\begin{aligned}\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM_2} \\ &= \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R},\end{aligned}$$

由向量与和它同方向的单位向量的关系, 知

$$\overrightarrow{M_1P} = (x_2 - x_1)\vec{i}, \quad \overrightarrow{M_1Q} = (y_2 - y_1)\vec{j}, \quad \overrightarrow{M_1R} = (z_2 - z_1)\vec{k},$$

分别称 $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ 为向量 $\vec{a}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的**投影**, 并记为

$$x_2 - x_1 = a_x, \quad y_2 - y_1 = a_y, \quad z_2 - z_1 = a_z,$$

则

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.\end{aligned}$$

称为向量 $\vec{a}$ 按基本单位向量的分解表示式, 其中 $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ 分别叫做向量 $\vec{a}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的**分量**.

称有序数组 a_x, a_y, a_z 为向量 $\vec{a}$ 的**坐标**, 并把向量 $\vec{a}$ 记为

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

称为向量 $\vec{a}$ 的**坐标表示式**.

特别地, 从原点到 $M(x, y, z)$ 的向径

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

即如果向量的起点为坐标原点, 那么这个向量的坐标与它的终点的坐标是一致的.

由此可知, 每个向量都惟一地确定一个有序数组; 反过来, 每一个有序数组都能惟一地确定一个向径, 而我们讨论的是自由向量, 因而每一个有序数组都能惟一地确定一个向量. 这样向量和它的坐标就是一一对应的.

向量的坐标表示使用的是圆括号, 这与点的坐标表示相同, 我们从上下文是容易区别它们的.

2. 向量的模及方向余弦的坐标表示

设向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (a_x, a_y, a_z)$, 其起点和终点的坐标为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 由空间两点距离公式, 知 $\mathbf{a}$ 的模

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

而

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1,$$

于是得

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.1.1)$$

非零向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向之间的夹角 α, β, γ 称为 $\mathbf{a}$ 的方向角 (规定 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$), 方向角的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 $\mathbf{a}$ 的方向余弦. 由图 1.10, 知

$$\begin{aligned} a_x &= |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cos \alpha, \\ a_y &= |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \beta = |\mathbf{a}| \cos \beta, \\ a_z &= |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \gamma = |\mathbf{a}| \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

即

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

当 $\mathbf{a}$ 的坐标给出后, 由式 (1.1.1) 和 (1.1.3) 可以确定它的模和方向角 (即大小和方向); 反过来, 当 $\mathbf{a}$ 的模和方向角已知时, 由式 (1.1.2) 可以确定它的坐标.

容易验证方向余弦满足如下的关系式:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

与非零向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量的坐标表示式为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a &= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} (a_x, a_y, a_z) \\ &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \end{aligned}$$

即 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是与向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量.

例 1.1.3 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2}),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

例 1.1.4 设点 M 位于第二卦限, 向径 $\overrightarrow{OM}$ 与 y 轴、 z 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OM}| = 8$, 求点 M 的坐标.

解 由 $\beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{4}$ 及 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 得

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

又点 M 在第二卦限, $\cos \alpha < 0$, 所以

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= |\overrightarrow{OM}| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= 8 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= (-4, 4, 4\sqrt{2}), \end{aligned}$$

这就是点 M 的坐标.

3. 向量线性运算的坐标表示

设有向量

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} = (b_x, b_y, b_z),$$

由向量加法及数乘的运算律, 有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \pm (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\
 &= (a_x \pm b_x) \mathbf{i} + (a_y \pm b_y) \mathbf{j} + (a_z \pm b_z) \mathbf{k}, \\
 \lambda \mathbf{a} &= \lambda(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \\
 &= \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k},
 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) &= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z), \\
 \lambda \mathbf{a} &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).
 \end{aligned}$$

即两个向量相加减等于对应坐标相加减, 数乘向量等于用这个数乘以向量的各个坐标.

由定理 1.1.1 知, 当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的充要条件是 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. 按照向量的坐标表示式即为

$$(b_x, b_y, b_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

因此, 当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的充要条件为

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z,$$

或写成

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda,$$

即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的对应坐标成比例 (若 a_x, a_y, a_z 中某个为零时, 则上式中理解为相应的分子为零).

1.1.5 向量的乘积运算

1. 向量的数量积

首先, 我们定义向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角: 将 $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 平移使它们的起点重合, 它们所在的射线之间的夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**夹角**(图 1.11), 记作 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. 如果 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{2}$, 则称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ **垂直**, 记为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

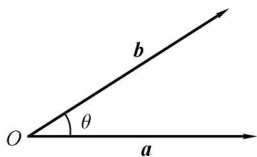


图 1.11

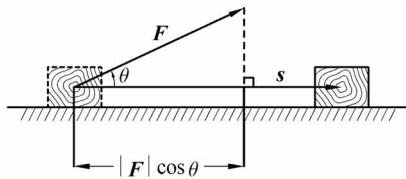


图 1.12

如果某物体在外力 F 的作用下沿直线移动, 位移向量为 s , 则力 F 所作的功为

$$W = |F||s| \cos \theta,$$

其中 $\theta = (\widehat{F, s})$ (图 1.12). 由此实际背景出发, 我们来定义向量 a 与 b 的数量积.

定义 1.1.1 设有向量 a 和 b , $\theta = (\widehat{a, b})$, 规定向量 a 与 b 的数量积是一个数, 记作 $a \cdot b$, 其值为

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta. \quad (1.1.4)$$

两个向量的数量积又叫作点积或内积. 根据数量积的定义, 上述问题中力 F 所作的功就可以表示为 $W = F \cdot s$.

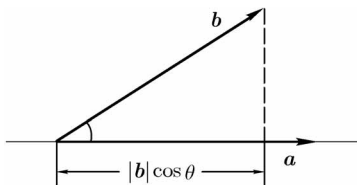


图 1.13

式 (1.1.4) 中的因子 $|b| \cos \theta$ 叫作向量 b 在向量 a 上的投影, 记作 $\text{Prj}_a b$, 即 $\text{Prj}_a b = |b| \cos \theta$. 当 θ 是锐角时, $\text{Prj}_a b$ 是 b 在 a 所在直线上投影线段的长度 (图 1.13); 当 θ 是钝角时, $\text{Prj}_a b$ 是投影线段长度的相反数.

同样, 因子 $|a| \cos \theta$ 叫作向量 a 在向量 b 上的投影, 记作 $\text{Prj}_b a$, 即 $\text{Prj}_b a = |a| \cos \theta$. 因此, 有

$$a \cdot b = |a| \text{Prj}_a b = |b| \text{Prj}_b a.$$

数量积具有下列性质:

- (1) $a \cdot a = |a|^2$.
- (2) 向量 $a \perp b$ 的充要条件是 $a \cdot b = 0$.

事实上, 当 a 与 b 有一个为 0 时, 结论显然成立; 当 a 与 b 均不为 0 时, 按定义, $a \perp b$ 的充要条件是 $\theta = (\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{2}$, 即 $a \cdot b = |a||b| \cos \theta = 0$.

数量积具有下列运算规律:

- (1) 交换律 $a \cdot b = b \cdot a$;
- (2) 分配律 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- (3) 结合律 $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$ (λ 为实数).

下面推导数量积的坐标表示式. 设

$$a = a_x i + a_y j + a_z k = (a_x, a_y, a_z),$$

$$b = b_x i + b_y j + b_z k = (b_x, b_y, b_z).$$

由数量积的运算规律, 有