第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件及其概率

一、主要内容

随机试验和随机事件的概念, 随机事件的关系及运算, 概率的定义和性质, 古典概型和几何概型的概率计算.

二、教学要求

1. 理解随机试验、样本空间和随机事件的概念，掌握随机事件间的关系和运算.

2. 理解概率的定义，掌握概率的性质.

3. 掌握古典概率及几何概率的计算，能用概率的基本性质计算随机事件的概率.

三、例题选讲

例 1.1　写出下列随机试验的基本空间：

(1) 掷两枚骰子，分别观察其出现的点数；

(2) 观察某昆虫的存活时间；

(3) 一人射靶三次，观察其中靶次数；

(4) 口袋中装有 10 个球， 6 个白球， 4 个红球，分别标有 $1\sim 10$ 号，从中任取一球，观察球的号数；

(5) 在单位圆内任取一点，记录它的坐标.

解　(1) $\Omega=\{(1,1),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),(3,1),\cdots,(3,6),(4,1),\cdots,(4,6),(5,1),\cdots,(5,6),(6,1),\cdots,(6,6)\}$.

其中 (i,j) 表示第一枚骰子掷出 i 点，第二枚骰子掷出 j 点 $(i,j=1,2,3,4,5,6)$.

(2) $\Omega=(0,+\infty)$.

(3) $\Omega=\{w_{000},w_{001},w_{010},w_{011},w_{100},w_{101},w_{110},w_{111}\}$, 其中 w_{000} 表示三次均没中靶， w_{110} 表示第一次中靶，第二次中靶，第三次没中靶，依次类推.

(4) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(5) 取一直角坐标系，则有 $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$, 若取极坐标系，则有 $\Omega = \{(\rho, \theta), \rho < 1, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$.

例 1.2 设 A, B, C 为三件事，用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生， B 与 C 不发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) A, B, C 中至少有一个发生；

(4) A, B, C 都发生；

(5) A, B, C 都不发生；

(6) A, B, C 中不多于一个发生；

(7) A, B, C 中不多于两个发生；

(8) A, B, C 中至少有两个发生.

解 以下分别用 $D_i(i = 1, 2, 3, \cdots, 8)$ 表示 $(1), (2), \cdots, (8)$ 中所给出的事件. 注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生，例如事件 A 不发生即 $\overline{A}$ 发生.

(1) $D_1 = A\overline{B}\,\overline{C}$ 或写成 $D_1 = A - B - C$.

(2) $D_2 = AB\overline{C}$ 或写成 $D_2 = AB - C$.

(3) $D_3 = A \cup B \cup C$ 或写成 $D_3 = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$, 或写成 $D_3 = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$.

(4) $D_4 = ABC$.

(5) $D_5 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) $D_6 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或写成 $D_6 = \overline{AB \cup BC \cup CA} = \overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CA}$.

(7) $D_7 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$ 或写成 $D_7 = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 或写成 $D_7 = \overline{ABC}$.

(8) $D_8 = AB \cup BC \cup CA$ 或写成 $D_8 = ABC \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$.

例 1.3 一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击击中目标 $(i = 1, 2, 3)$, 试用文字叙述下列事件： $A_1 \cup A_2$; $\overline{A}_2$; $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; $A_1A_2A_3$; $A_3 - A_2$; $\overline{A_1 \cup A_2}$; $\overline{A}_1\,\overline{A}_2$; $\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$; $\overline{A_2A_3}$; $A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$.

解 $A_1 \cup A_2$ 表示“前两次至少有一次击中目标”；

$\overline{A}_2$ 表示“第二次射击未击中目标”；

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示“三次射击中至少有一次击中目标”；

$A_1A_2A_3$ 表示“三次射击都击中了目标”；

$A_3 - A_2$ 表示“第三次击中但第二次未击中目标”；

$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1\ \overline{A}_2$ 表示 “前两次射击都没有击中目标”；

$\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 = \overline{A_2 A_3}$ 表示 “后两次射击至少有一次未击中目标”；

$A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$ 表示 “三次射击中至少有两次击中目标”.

例 1.4 指出下列关系中哪些成立，哪些不成立.

(1) $\overline{A}B = A \cup \overline{B}$; (2) 若 $AB = \varnothing$, 且 $C \subset A$, 则 $BC = \varnothing$;

(3) $AB \cup A\overline{B} = \Omega$; (4) 若 $\overline{A} \subset \overline{B}$, 则 $A \supset B$;

(5) $\overline{A-B} = \overline{A} - \overline{B}$; (6) $\overline{(A \cup B)\,C} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

解 (1) 不成立. 因为左边不含 A 而右边含 A.

(2) 成立. 因若 $BC \neq \varnothing$, 又 $C \subset A$, 则 $BA \neq \varnothing$, 此与条件矛盾.

(3) 成立. 因为 $B,\overline{B}$ 不同时发生，从而 AB 与 $A\overline{B}$ 也不同时发生.

(4) 成立. 若 B 发生不导致 A 发生，则导致 $\overline{A}$ 发生， $\overline{A} \subset \overline{B}$, 即导致 $\overline{B}$ 发生，从而 $B \subset \overline{B}$, 矛盾.

(5) 不成立. 因为 $\overline{A-B} = \overline{(A\overline{B})} = \overline{A} \cup B$, 而 $\overline{A} - \overline{B} = \overline{A} \cap B$.

(6) 不成立. 因为 $\overline{(A \cup B)\,C} = \overline{A}\ \overline{B} \cup \overline{C}$.

例 1.5 已知两事件： $A \subset B, P(A) = 0.2, P(B) = 0.3$, 求：

(1) $P\left(\overline{A}\right)$; (2) $P\left(\overline{B}\right)$; (3) $P(AB)$;

(4) $P(A \cup B)$; (5) $P\left(B\overline{A}\right)$; (6) $P(A-B)$.

解 (1) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$;

(2) $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$.

(3) $P(AB) = P(A) = 0.2$.

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3$.

(5)
$$\begin{aligned} P\left(B\overline{A}\right) &= P(B(\Omega - A)) = P(B) - P(AB) \\ &= P(B) - P(A) = 0.3 - 0.2 = 0.1. \end{aligned}$$

(6) $P(A-B) = 0$.

例 1.6 已知 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.25, P(A-B) = 0.25$, 求 $P(AB)$, $P(A \cup B), P(B-A), P\left(\overline{A}\ \overline{B}\right)$.

解 $P(AB) = P(A) - P(A-B) = 0.4 - 0.25 = 0.15$;

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.25 - 0.15 = 0.5$;

$P(B-A) = P(B) - P(AB) = 0.25 - 0.15 = 0.1$;

$P\left(\overline{A}\ \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$.

例 1.7 证明：对任意事件 A,B 有

$$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B).$$

证明

$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(AB)&=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)\\&\quad+P(AB)P(AB)\\&\leqslant P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)\\&\quad+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)\\&=[P(A-B)+P(AB)][P(B-A)+P(AB)]\\&=P(A)P(B).\end{aligned}$$

所以 $$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B).$$ □

例 1.8 设事件 A 与 B 同时发生必导致 C 发生，则 (　　).

(A) $P(C)=P(AB)$;　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$;

(C) $P(C)=P(A\cup B)$;　　(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.

解　由于 $P(C)\geqslant P(AB)$, 而

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

所以选 (B).

例 1.9 袋内放有 2 个伍分，3 个贰分和 5 个壹分的钱币，任取其中 5 个，求钱额总数超过壹角的概率.

解　共有 10 个钱币，任取 5 个，则基本事件总数为 C_{10}^5, 有利于事件 A(取 5 个钱币金额超壹角) 的情形有以下两种：

(1) 取 2 个 5 分币；其余 3 个可任取，其总数为

$$\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^3+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_5^3;$$

(2) 取 1 个 5 分币，则 2 分币至少要取 2 个，其总数为

$$\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_5^2.$$

故有利于事件 A 的基本事件总数为

$$\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^3+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_5^2=126.$$

所以
$$P(A)=\frac{126}{\mathrm{C}_{10}^{5}}=\frac{1}{2}.$$

例 1.10 一批产品有 10 件，其中有 3 件次品．求下列事件的概率：

(1) 从中随机地取 3 件，其中恰有 2 件次品；

(2) 从中随机地取 3 件，每次取一件，放回抽样，其中恰有 2 件次品．

解 (1) 设 A 表示事件 “从中随机地取 3 件，恰有 2 件次品”．在一共 10 件产品中随机地取 3 个，共有 $n=\mathrm{C}_{10}^{3}$ 种取法，且是等可能的．对于事件 A, 在 3 件产品中恰有 2 件次品共有 C_3^2 种取法，有 1 件正品共有 C_7^1 种取法．由乘法原理 A 中包含， $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^1$ 个基本事件，于是
$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^1}{\mathrm{C}_{10}^{3}}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}.$$

(2) 设事件 B 表示事件 “从中随机地取 3 件，每次取一件，作放回抽样，其中恰有 2 件次品”．由于作放回抽样，每次可供抽取的产品都有 10 件，由乘法原理，应有 10^3 个基本事件，且是等可能的．对于事件 B,3 个位置中先挑出 2 个位置放次品，共有 C_3^2 种放法，再者次品有 $3\times 3=3^2$ 种放法，正品有 7 种放法，故 B 包含 $\mathrm{C}_3^2\times 3^2\times 7$ 个基本事件，于是
$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_3^2\times 3^2\times 7}{10^3}=0.189.$$

例 1.11 设有 r 个人， $r\leqslant 365$. 并设每人的生日在一年的 365 天中的每一天的可能性是均等的，问此 r 个人生日都不相同的概率是多少？

解 r 个人都以等可能的机会在 365 天中的任一天出生，故基本事件总数为 365^r, 设 A 为 “r 个人生日都不相同” 的事件，则 A 所含的基本事件数为 “从 365 个不同元素中任意取出 r 个不同元素的排列个数”，即为 $\mathrm{P}_{365}^{r}=\dfrac{365!}{(365-r)!}$. 于是
$$P(A)=\frac{365!}{(365-r)!365^r}.$$

例 1.12 设有大小相同标号分别为 $1,2,3,4,5$ 的 5 个球，同时有标号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个盒子，将 5 个球放入 10 个盒子中，假设每个球放入任何一个盒子中的可能性相同，并且每个盒子可以同时容纳 5 个以上的球，求下列事件的概率：

(1) 某指定的 5 个盒子各有一个球；

(2) 每个盒子中最多只有 1 个球；

(3) 某指定的盒子内不空．

解 5 个球放入 10 盒子中，因为每个球有 10 种投法，据乘法原理，共有 10^5 种不同的投法．且是等可能的．

(1) 设 A 表示“某指定的 5 个盒子中各有 1 个球”的事件． A 包含的基本事件数，即 5 个不同元素的全排列，共有 $n_A = 5!$, 于是

$$P(A) = \frac{5!}{10^5} = 0.0012.$$

(2) 设 B 表示“每个盒子中最多只有一个球”的事件． B 包含的基本事件数，因为不指定哪 5 个盒子有球，首先从 10 个盒中任取 5 个盒子，共有 C_{10}^5 种取法．然后再求取出的这个 5 个盒子中，每个盒子有一球包含的基本事件数为 5! 个，据乘法原理知 $n_B = \mathrm{C}_{10}^5 \times 5!$, 于是

$$P(B) = \frac{\mathrm{C}_{10}^5 \times 5!}{10^5} = 0.3024.$$

(3) 设 C 表示“某指定的盒子内不空”的事件； $\overline{C}$ 表示“某指定的盒子是空”的事件， $\overline{C}$ 包含基本事件数即 5 个球可以向另外 9 个盒子任意投，共有 9^5 种投法，于是

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{9^5}{10^5} = 0.40951.$$

例 1.13 从一副扑克牌 (52 张) 中，任取 3 张 (不重复抽取), 求取出的 3 张牌中至少有 2 张花色相同的概率．

解 设 A 表示“取出的 3 张牌中至少有 2 张花色相同”的事件，考虑 $\overline{A}$, 它表示“取出的 3 张牌花色各异”，相当于从 4 种花色中选取 3 种花色，再从选定的花色中各抽取 1 张牌．因此 $\overline{A}$ 包含的基本事件数为 $\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_{13}^1\mathrm{C}_{13}^1\mathrm{C}_{13}^1$. 易求试验的基本事件总数为 C_{52}^3, 故

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_{13}^1\mathrm{C}_{13}^1\mathrm{C}_{13}^1}{\mathrm{C}_{52}^3} \approx 0.602.$$

例 1.14 从 5 双不同的手套中任取 4 只，这 4 只手套中至少有两只手套配成一双的概率是多少？

分析 设 A 表示事件“取出的 4 只手套至少有两只手套配成一双”，则 $\overline{A}$ 表示“ 4 只手套中没有两只配成一双”，本题有多种解法．

解 方法 1　5 双手套中任取 4 只共有 $\mathrm{C}_{10}^4 = 210$ 种取法，且为等可能的．先考虑 $\overline{A}$ 包含的基本事件数．为使取出的 4 只手套中没有两只能配成一双的．我们先从 5 双手套中任取 4 双，然后从取出的 4 双手套中各取一只共有 $\mathrm{C}_5^4 \times 2^4 = 80$ 种取法．于是

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{80}{210} = \frac{13}{21}.$$

方法 2 5 双手套中任取 4 只有 $C_{10}^4 = 210$ 种取法, 且是等可能的. 为使取出的 4 只中至少有两只能配成一双，我们先从 5 双手套中任取 1 双，再从剩下的 4 双中任取 2 只, 共有 $C_5^1C_8^2$ 种取法, 因为有重复, 要减去 C_5^2. 因此 $n_A = C_5^1C_8^2 - C_5^2$, 于是

$$P(A) = \frac{C_5^1C_8^2 - C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

方法 3 设 A_1 表示事件 "取出的 4 只手套恰有两只能配成一双"， A_2 表示事件 "取出的 4 只手套恰好配成两双"，于是 $A = A_1 \cup A_2$, 而

$$P(A_1) = \frac{C_5^1\left(C_8^2 - C_4^1\right)}{C_{10}^4}, \quad P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{10}^4}.$$

于是

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_9^1\left(C_8^2 - C_4^1\right)}{C_{10}^4} + \frac{C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

例 1.15 自 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 这 9 个数中随机地取出一个数，取后放回，连续取 n 次，求取到的 n 个数之积能被 10 整除的概率.

分析 如果直接求解，则很繁琐，若能求出逆事件的概率，再利用概率的性质计算就会容易得出．其他问题也常采用这种方法.

解 试验的每个结果对应一个从 9 个元素中允许重复的 n 个元素的排列，因此基本事件总数为 9^n.

设 A 表示事件 "取出的 n 个数之积能被 10 整除"，则 $\overline{A}$ 表示事件 "取出的 n 个数之积不能被 10 整除"，由于 $10 = 2 \times 5$, 把 $\overline{A}$ 分成两个事件的和.

设 B 表示事件 "取出 n 个数中不含 5 "； C 表示 "取出的 n 个数中必含 5, 但不含 2,4,6,8 中任何一个". 则 B 与 C 中是互不相容的，且 $\overline{A} = B \cup C$.

B 包含的基本事件，即 $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9,$ 这 8 个数中允许重复取 n 个的排列，共有 8^n 个，因此

$$P(B) = \frac{8^n}{9^n}.$$

C 包含的基本事件是由 $1, 3, 5, 7, 9,$ 这 5 个数允许重复取 n 个数的排列，共有 5^n 个，减去由 $1, 3, 7, 9$ 这 4 个数允许重复取 n 个的排列数 4^n 个，得 $5^n - 4^n$ 个，因此 $P(C) = \dfrac{5^n - 4^n}{9^n}$, 故

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}.$$

例 1.16 设 n 个人排成一行，甲与乙是其中的两人，求这 n 个人的任意排列中甲与乙之间恰有 $r\,(r < n-1)$ 个人的概率．若这 n 个人围成一圈，证明甲与乙之间恰有 r 个人的概率与 r 无关 (在圆排列时仅考虑从甲到乙的顺时针方向).

解　n 个人的任意一种排列都是一个基本事件，故共有 $n!$ 个基本事件．令 $A=\{$甲与乙之间恰有 r 个人$\}$，由于甲、乙中任选 1 人有 C_2^1 种方法，设甲 (乙) 排在第 i 位时，则乙 (甲) 必排在第 $i+n-1$ 位上，且 $i+r+1\leqslant n$，即 $i\leqslant n-r-1$．从而选出的人只有 $n-r-1$ 种排法，余下的人在 $n-2$ 个位置上有 $(n-2)!$ 种排法．所以

$$P(A)=\frac{C_2^1(n-r-1)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

若 n 个人围成一圈，共有 $(n-1)!$ 种排列方法，由上计算， n 个人排队使甲、乙之间恰有 r 个人；且甲在乙前共有 $(n-r-1)(n-2)!$ 种排法．另这样的排队也可分成两步来完成：先让 n 个排成一圈，使从甲到乙的顺时针方向上甲与乙之间共有 r 个人，然后让甲及前面 $n-r-2$ 个人中以任何一个人为首排队，并保持相对位置不变，设前者有 X 种排法；而后者应有 $n-r-1$ 种排法．由乘法原理，有 $(n-r-1)(n-2)!=X(n-r-1)$，即 $X=(n-2)!$．所以事件 A 中包含 $(n-2)!$ 个基本事件，从而

$$P(A)=\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{1}{n-1}$$

与甲、乙之间人数 r 无关．

例 1.17　*在边长为 3 的正方形内，随机抛入一个半径为 1 的圆环．设圆环的圆心一定落入正方形内，求圆环能与正方形的边相交的概率．*

解　半径为 1 的圆能与正方形的边相交的充要条件是圆环的圆心落入圆中阴影部分 G(图 1.1)；故由几何概型的计算公式，有

$$P=\frac{G\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{9-1}{9}=\frac{8}{9}.$$

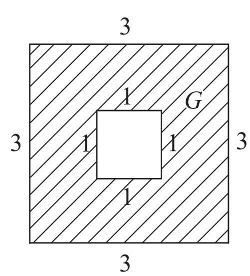

图 1.1

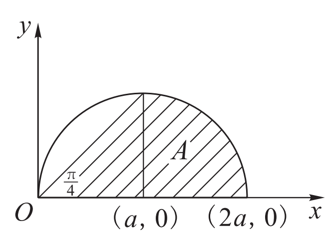

图 1.2

例 1.18 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a为正常数) 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率是多少？

解 样本空间 Ω 可表示为 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ 的上半圆的所有点 (图 1.2), 此时 Ω 的面积为 $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

令 $A = \{$掷点和原点的连线与x轴的夹角小于$\dfrac{\pi}{4}\}$, 则

$$A\text{的面积} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\mathrm{d}r = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\pi,$$

所以

$$P(A) = \frac{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4}\pi}{\dfrac{\pi}{2}a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

小结 本节的主要内容是概率的概念及古典概型的计算，这是概率论中最基本的内容. 在计算比较复杂的事件的概率时，常常先将复杂事件用简单事件通过运算表示，然后再利用概率的性质计算复杂事件的概率.

四、疑难问题解答

1. 怎样理解互逆事件和互斥事件？

答 若 $AB = \varnothing$, 则称事件 A 与 B 为互不相容或互斥. 从“事件是由一些基本事件所构成的”这个观点看，互斥事件无非是说：构成这两个事件各自的试验结果中不能有公共的基本事件.

若给定一个事件 A, 则“ A 不发生”这个事件，称为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$.A 和 $\overline{A}$ 称为互逆事件. 例如：掷一枚骰子，事件“出现 1 点”和“出现 5 点”互斥；事件“出现点数不小于 4 点”和“出现点数小于 4 ”互逆.

互逆事件和互斥事件有明显的区别：当样本空间划分为含所考察的两个事件在内的每个事件时，这两个事件才可能互斥；当样本空间仅划分为所考察的两个事件时，这两事件才能互逆. 某一试验中，互斥事件可以都不发生，互逆事件有且仅有一个发生. 也就是说互逆事件一定互斥，但互斥事件不一定互逆.

2. 样本空间的选取是否惟一？

答 解决许多古典概型问题有不同的方法，这往往是由样本空间的不同构造引起的，也就由基本事件确定的不同而引起的.

例 某次掷两颗骰子，求出现点数和为偶数的概率.

方法 1　样本空间 Ω={(奇, 奇),(奇, 偶),(偶, 奇),(偶, 偶)},A={(奇, 奇),(偶, 偶)}, $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

方法 2　样本空间 Ω ={(点数和为奇数),(点数和为偶数)},A ={点数和为偶数 }, $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

方法 3　若基本空间 $\Omega=\{(i,j)|i,j=1,2,\cdots,6\}$, 样本空间基本事件总数为 $6\times6=36$; 事件 A 基本事件数 $2\times3\times3=18, P(A)=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$.

所以，样本空间的选取一般不惟一，在解题过程中，选取适当的样本空间，对快速正确的解题有很大作用.

3. 古典概型中易忽略的问题.

答　解决古典概型的问题包括两个步骤：

(1) 选取适当的样本空间，其中的基本事件数必须是有限的，而且基本事件的发生是等可能的;

(2) 求样本空间及事件中的基本事件数.

在解决具体问题时往往重视步骤 (2) 而忽视了步骤 (1). 所以在这里特别强调: 基本事件的发生必须是等可能的, 并且要求其概率的事件必须是样本空间的子集. 以下用例子说明.

例　某次掷两枚骰子，求出现的点数和为偶数的概率.

取样本空间 Ω={(奇, 奇),(奇, 偶),(偶, 奇),(偶, 偶)},A={(奇, 奇),(偶, 偶)}, 则 $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. 若取样本空间 Ω={(两奇),(一奇，一偶),(两偶)}A={(两奇),(两偶)}, 则 $P(A)=\dfrac{2}{3}$. 显然后者的结果是错误的，因为后面所取样本空间中基本事件发生不是等可能的：　$P(\text{两奇})=\dfrac{1}{4}, P((\text{一奇，一偶}))=\dfrac{1}{2}$.

总之，违背 “基本事件的发生必须是等可能的，并且要求其概率的事件必须是样本空间的子集” 这一要求而求解古典概型的问题，会得出错误甚至荒谬的结果.

练习 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 口袋中装有 10 个球， 6 个白球，分别标有 $1\sim10$ 号，从中任取一球，观察球的号数;

(2) 掷两枚骰子，分别观察其点数;

(3) 一人射靶三次，观察其中靶次数;

(4) 将 1 米长的尺子折成三段，观察各段长度.