第 1 章　向量代数与空间解析几何

本章包含向量代数与空间解析几何两部分内容．这些内容是学习多元函数微积分的预备知识，同时也是重要的数学工具，在后继数学课程的学习中也有重要应用.

1.1　向量代数

一、主要内容

向量的概念，向量的运算，向量的积.

二、教学要求

1. 理解空间直角坐标系的概念，理解向量的概念及其表示；

2. 掌握向量的运算 (线性运算、数量积、向量积), 了解两个向量垂直、平行的条件；

3. 理解单位向量、方向角与方向余弦，向量的坐标表示式，掌握用坐标表示式进行向量运算的方法；

4. 掌握向量的数量积、向量积的运算，了解混合积.

三、例题选讲

例 1.1　*在 x 轴上求出一点 M, 使它与点 $M_1(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.*

解　设在 x 轴上所求点 M 的坐标为 $(x,0,0)$, 下面求出 x.

由条件 $|M_1M|=\sqrt{30}$, 即

$$\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{30},$$

$$(x-4)^2=25,$$

得

$$x=9 \quad \text{或} \quad x=-1.$$

故所求点 M 为 $(9,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

例 1.2 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,-4,7)$, 其终点坐标为 $(2,-1,7)$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标及模 $|\boldsymbol{a}|$.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标为 (x,y,z), 因为向量的坐标是其终点坐标与始点坐标之差，所以有

$$2-x=4,\quad -1-y=-4,\quad 7-z=7,$$

由此解得

$$x=-2,\quad y=3,\quad z=0.$$

而

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=\sqrt{81}=9.$$

故向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标为 $(-2,3,0), |\boldsymbol{a}|=9$.

例 1.3 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的负向及 y 轴、z 轴的正向构成相等的锐角，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解 依题意知

$$\alpha=\pi-\theta,\quad \beta=\theta,\quad \gamma=\theta\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$

因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 即

$$\cos^2(\pi-\theta)+\cos^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

所以

$$3\cos^2\theta=1\quad 或\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例 1.4 模长为 2 的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角是 $\dfrac{\pi}{4}$, 与 y 轴的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的夹角是 γ, 则

$$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\gamma=1,$$

即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cos^2\gamma=1.$$

由此解得

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

因为

$$\boldsymbol{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right),$$

而 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a$, 所以

$$\boldsymbol{a} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 1, \pm 1\right).$$

例 1.5 已知 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2$, 求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}), |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2$, 即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = 8 - 4 = 4, \quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 2 \quad (\text{由 } |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \geqslant 0, \text{故舍去} -2).$$

或由给定条件知

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{4}$, 于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

例 1.6 设 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 5, (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{2}{3}\pi$, 若向量 $\boldsymbol{m} = \lambda\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 互相垂直, 求常数 λ.

分析 两个向量互相垂直的充分必要条件是其数量积为零，由此入手求出常数 λ.

解

$$\begin{aligned}
0 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} &= (\lambda\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\
&= 3\lambda\boldsymbol{a}^2 + (51 - \lambda)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 17\boldsymbol{b}^2 \\
&= 12\lambda + (51 - \lambda)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 425 \\
&= 12\lambda + (51 - \lambda)\times 2\times 5\times\cos\frac{2}{3}\pi - 425 \\
&= 17\lambda - 680.
\end{aligned}$$

即 $\lambda = 40$.

例 1.7 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

分析 利用数量积的运算律和单位向量的概念求解.

解 因为

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\right)\\&=3+2\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

例 1.8 求垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(4,5,3)$ 的单位向量 $\boldsymbol{e_c}$.

解 因为向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 所以所求的单位向量 $\boldsymbol{e_c}$ 必与向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共线. 而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&1\\4&5&3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3,$$

于是，所求的单位向量 $\boldsymbol{e_c}$ 为

$$\boldsymbol{e_c}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k},$$

或 $-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{i}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{j}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{k}$ 也是所求的单位向量.

例 1.9 已知向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, 且与向量 $\boldsymbol{c}=(1,2,-7)$ 的数量积为 10, 求向量 $\boldsymbol{x}$.

分析 利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即可.

解 设 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$, 则依题意得

$$\begin{cases}2x-3y+z=0,\\x-2y+3z=0,\\x+2y-7z=10.\end{cases}$$

由上面方程组解得

$$x=7,\quad y=5,\quad z=1,$$

故所求向量为 $\boldsymbol{x}=(7,5,1)$.

四、疑难问题解答

1. 从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是否可以推出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$? 反过来，从 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是否可以推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, 为什么？

答　从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 可知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小必相等，所以必有 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 反过来，由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 只知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，二向量的方向未必相同，所以由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 不能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，下列各式在什么条件下才能成立？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

答　当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，(1) 式成立 (图 1.1); 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})>\dfrac{\pi}{2}$ 时，(2) 式成立 (图 1.2); $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向时，(3) 式成立；$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向, 即当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$ 时，(4) 式成立 (图 1.3).

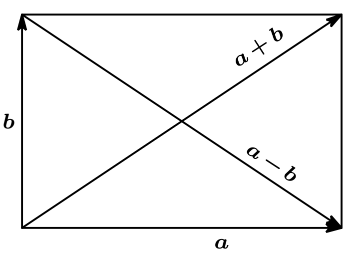

图　1.1

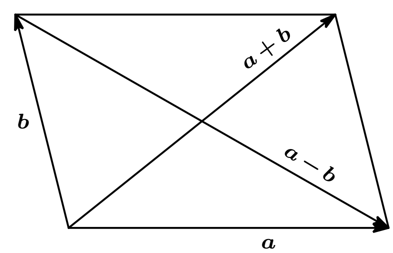

图　1.2

3. 下列说法是否正确，为什么？

(1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 是单位向量;

(2) $2\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$;

(3) 与 x,y,z 三坐标轴的正向夹角相等的向量，其方向角为 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

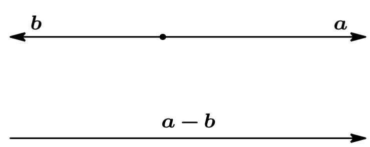

图　1.3

答　(1) 不正确．由单位向量的定义知，模为 1 的向量称为单位向量．因为向量 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的模 $|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\neq 1$, 故 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 不是单位向量.

(2) 不正确．由于向量是既有大小又有方向的量，所以 $2\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 没有大小可言，不能比较．当然向量的模是可以比较大小的，如 $|2\boldsymbol{i}|=2>|\boldsymbol{j}|=1$.

(3) 不正确. 与三坐标轴正向夹角相等的向量, 其方向角不是 $\dfrac{\pi}{3}$. 因为任一向量的三个方向角 α, β, γ 应满足关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时, 有 $3\cos^2\alpha = 1$, 即 $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \alpha = \arccos\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq \dfrac{\pi}{3}$. 又因为

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \neq 1,$$

所以三个方向角均为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的向量是不存在的.

练习 1.1

1. 设向量 $\boldsymbol{a} = (4, -1, 3)$ 和 $\boldsymbol{b} = (5, 2, -2)$, 求 $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角相等, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点坐标为 $A(1, 0, -1)$, 终点坐标为 $B(4, -4, 11)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向角.

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦满足下列条件:
(1) $\cos\beta = 0$; (2) $\cos\beta = 1$; (3) $\cos\beta = \cos\gamma = 0$. 说明这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的特点.

5. 设 $A(1, -1, 3), B(-1, 1, 4)$, 求 z 轴上的点 C 坐标, 使 $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.

6. 设点 M 的向径与 x 轴, y 轴正向分别成 $60°, 45°$ 的角, 向量的模为 8, 求点 M 的坐标.

7. 若向量 $\boldsymbol{a} = (3, -5, 8)$ 和 $\boldsymbol{b} = (-1, 1, z)$ 的和与差相等, 求 z.

8. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 同时垂直于向量 $\boldsymbol{b} = (3, 6, 8)$ 和 x 轴, 且 $|\boldsymbol{a}| = 2$, 求 $\boldsymbol{a}$.

练习 1.1 参考答案与提示

1. $(23, 4, 0)$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角分别为 α, β, γ, $\alpha = \beta = \gamma$. 由 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. 可得 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$或$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. 13; $\alpha = \arccos\dfrac{3}{13}, \beta = \arccos\left(-\dfrac{4}{13}\right), \gamma = \arccos\dfrac{12}{13}$.

4. (1) $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴垂直或 $\boldsymbol{a}$ 与 Oxz 面平行; (2) $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴平行或 $\boldsymbol{a}$ 与 Ozx 面垂直; (3) $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴平行或 $\boldsymbol{a}$ 与 Oyz 面垂直.

5. $\left(0,0,\dfrac{7}{2}\right)$.

6. $\left(4,4\sqrt{2},\pm 4\right)$.

7. $z=1$.

8. $\boldsymbol{a}=\pm\left(0,\dfrac{8}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$.

1.2 平面与直线

一、主要内容

平面的方程，空间直线及其方程.

二、教学要求

1. 掌握平面方程与直线方程及其求法;

2. 了解平面、直线的相互关系，会求平面与平面，直线与直线，平面与直线之间的夹角;

3. 会求点到直线和点到平面的距离.

三、例题选讲

例 1.10 已知一个平面通过 x 轴和点 $M_0(4,-3,-1)$, 求这个平面的方程.

分析 由题设的条件知，所求平面通过 x 轴，那么平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 应垂直于 x 轴，同时也垂直于 $\overrightarrow{OM_0}$. 这样可以取法向量 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{i}\times\overrightarrow{OM_0}$, 再由平面过原点 O, 用点法式可以写出所求平面的方程. 另外，还可以利用此平面方程的特殊性求出此方程.

解 方法 1 依题设条件知

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\times\overrightarrow{OM_0}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

又平面过点 $O(0,0,0)$. 因此所求平面方程为

$$0(x-0)+1\cdot(y-0)-3(z-0)=0,$$

即

$$y-3z=0.$$

方法 2　依题设条件知，所求平面方程应为

$$By + Cz = 0,$$

又所求平面过已知点 $M_0(4,-3,-1)$, 将点 M_0 代入上面方程得

$$-3B - C = 0 \quad \text{或} \quad C = -3B.$$

即

$$By - 3Bz = 0,$$

由于 $B \neq 0$, 所以在上式两边同时消去 B, 得所求方程为

$$y - 3z = 0.$$

例 1.11　求过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t+2, \\ y = 3t-4, \\ z = t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

分析　由于所求的平面与已知直线垂直，所以可取直线的方向向量作为平面的法向量，由平面的点法式方程即可得所求的平面方程. 应当注意已知直线是参数式方程.

解　已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_1 = (-1,3,1)$, 取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1$, 因平面过点 $M(1,2,-1)$, 故所求平面的方程为

$$-(x-1) + 3(y-2) + 1 \cdot (z+1) = 0,$$

即

$$x - 3y - z + 4 = 0.$$

例 1.12　求两个平面 $2x - y + z - 6 = 0$ 和 $x + y + 2z - 5 = 0$ 的夹角.

解　已知两个平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = (2,-1,1), \quad \boldsymbol{n}_2 = (1,1,2),$$

所以

$$\cos\theta = \frac{|2\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{2},$$

因此，所求夹角为 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

例 1.13 确定下列各组中平面与平面间的关系：

(1) $x+y-z-1=0$ 与 $2x+2y-2z+3=0$;

(2) $x+y+z=0$ 与 $x+y-2z+3=0$.

解 (1) 两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)\,,\boldsymbol{n}_2=(2,2,-2)$, 满足条件

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2},$$

故这两个平面平行.

(2) 两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)\,,\boldsymbol{n}_2=(1,1,-2)$, 满足条件

$$1\times1+1\times1+1\times(-2)=0,$$

故这两个平面垂直.

例 1.14 设有直线

$$L_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1} \text{ 与 } L_2:\ \begin{cases} x-y=6,\\ 2y+z=3,\end{cases}$$

求直线 L_1 与 L_2 的夹角.

解 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,-2,1)\,,L_2$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2$ 为

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

所以 L_1 与 L_2 之间的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 1.15 已知直线

$$L_1:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2} \text{ 和 } L_2:\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1},$$

求过两直线 L_1 和 L_2 的平面方程.

分析 所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 L_1 和 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$, 即 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$, 所以可以取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$. 解此题的关键是求出平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 下一

步是求出平面上的一个点. 因为直线 L_1 上的点 $M_1(2,-2,3)$ 在所求平面上，再用点法式方程即可.

解 因为 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$, 所以取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$. 即

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\-1&2&1\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

又点 $M_1(2,-2,3)$ 在所求平面上，从而所求平面方程为

$$-5(x-2)-3(y+2)+(z-3)=0,$$

即

$$5x+3y-z-1=0.$$

例 1.16 求过点 $M(-1,2,3)$, 垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$, 且平行平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

分析 关键是求出直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$. 所求直线垂直于已知直线，即 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1$. 所求直线平行于已知平面，即 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{n}_1=(7,8,9))$. 因此取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}_1$.

解 依题意知

$$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1,\quad \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1,$$

取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}_1$, 有

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

又直线过点 $M(-1,2,3)$, 从而所求直线方程为

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-3}$$

或

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}.$$

例 1.17 确定直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 与平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$ 的位置关系.