

第 1 篇

理论力学（静力学）

第 1 章

静力学基础

1.1 绪 论

静力学(statics)是工程力学的重要内容之一。它主要研究物体在力系作用下的平衡问题。

平衡(equilibrium)是机械运动的一种特殊形式,它是指物体相对于惯性坐标系(凡是对牛顿运动定律适用的坐标系就称为惯性坐标系)处于静止状态或作匀速直线运动的状态。对多数工程问题而言,可以把固结在地球上的坐标系当作惯性坐标系来研究物体相对于地球的平衡问题。

把作用于同一物体上的若干个力总称为**力系**(force system)。如果两个力系分别作用于同一物体并能产生同样的效应,则该两力系互为**等效力系**(equivalent force system)。若一个力系作用于某物体而使其保持平衡,则该力系称为**平衡力系**(force system of equilibrium)。一个力系要成为平衡力系应满足的条件称为**平衡条件**(equilibrium condition)。

工程实际中,作用于物体的力系往往比较复杂。在研究过程中,经常需要将复杂的力系加以简化,亦即用一个较为简单的等效力系去代替原力系,并据此推出力系的平衡条件。

因此,静力学着重研究以下两个问题:

(1) **力系的简化** 将作用于物体上的已知力系进行简化,用另一较简单且与之等效的力系来代替原力系,以便于分析和讨论;

(2) 力系的平衡 建立物体在各种力系作用下的平衡条件。根据这些条件,求出作用于平衡物体上的某些未知力及物体所处的位置。

在各种工程中都存在大量的静力学问题。例如,在土木和水利工程中,用移动式吊车起吊重物时,必须根据平衡条件确定起重量不超过多少才不致使吊车翻倒;设计屋架时,必须将所受的重力、风雪压力等载荷加以简化,再根据平衡条件求出各杆所受的力,据此确定各杆截面的尺寸;其他如水闸、大坝、桥梁等建筑,设计时都需进行受力分析,以便得到既安全又经济的设计方案。在机械工程中,进行机械设计时,也往往要应用静力学理论分析机械零、部件的受力情况,作为强度计算的依据。对于运转速度缓慢或速度变化不大的零、部件的受力分析,通常都可简化为平衡问题来处理。除此以外,静力学的理论方法在航空航天、能源化工、生物医学等学科中也有应用。可见,静力学理论在生产实践中应用很广,在力学理论上也是很重要的。

1.2 静力学基本概念

1.2.1 刚体的概念

在静力分析中我们把物体看作刚体。所谓**刚体**(rigid body),是指在力的作用下其大小和形状保持不变的物体。这是一种理想化的模型,实际上刚体是不存在的。因为任何物体受力后都会有或多或少的变形。但在许多情况下,物体受力后虽有变形,但都很小。在研究物体的平衡或运动时,这种微小变形成为一个次要因素,可略去不计,这样处理既可简化对问题的研究,又不影响问题的实质。所以在静力学中,我们把实际物体都抽象为刚体。而在另一些情况下,比如要研究物体的外力和变形的关系时,变形便上升为主要因素,不能再把物体看作刚体,而要看作变形体,变形体问题将在后面的材料力学中研究。静力学主要以刚体为研究对象,所以也称为刚体静力学。

1.2.2 力的概念

经过长期的生产实践和科学实验,人们建立起力的概念。**力**(force)是物体间的相互机械作用,这种作用使物体的运动状态或形状发生改变。把力使物体运动状态发生变化的效应称为力的**运动效应**(effect of motion)或外效应;把力使物体产生变形的效应称为力的**变形效应**(effect of deformation)或内效应。

力对物体作用的效应取决于力的大小、方向和作用点,简称为力的**三要素**(three elements of a force)。

力的大小是指物体间相互作用的强弱程度。在国际单位制(SI)中,力的单位为N或kN。

力的方向包括方位和指向两个含义,如铅直向下,水平向右等。

力的作用点指的是力在物体上的作用位置。一般说来,力的作用位置并不是一个点而是一定的面积。但是,当作用面积小到可以不计其大小时,就抽象成为一个点,该点就是力的作用点;而这种作用于一点的力则称为**集中力**(concentrated force)。过力的作用点,沿力的方位的一条直线,称为力的作用线。

力有大小和方向,且力的相加服从矢量的平行四边形法则(参见 1.3 节),因此力是矢量。

在图 1-1 中,力 F 用带单箭头的直线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示。线段长度可按一定比例代表力矢的大小,线段的方位(θ 角)和箭头指向表示力矢的方向,A 点(或 B 点)表示力矢的作用点。

对刚体而言,只要保持力的大小和方向不变,把力的作用点沿作用线移到刚体上任一点,并不改变力对刚体的作用效应。例如,用小车运送物品,如图 1-2 所示,不论在车后 A 点用力 F 推车,还是在车前同一直线上的 B 点用力 F 拉车,其效果是一样的。把作用在刚体上的力沿作用线可移动的性质,称为**力的可传性**(transmissibility of a force)。正因如此,力是**滑动矢量**(sliding vector)。用几何方法表示时,可将力矢画在作用线上的任一点。

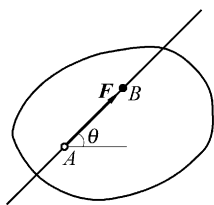


图 1-1 力矢的表示

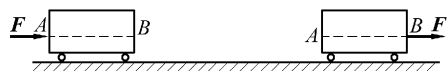


图 1-2 力的可传性

1.3 静力学公理

静力学公理,是人们在长期的生活和生产活动中概括和总结出来的,并经过大量实践反复检验的力的基本性质,它们是静力学理论的基础。

公理一 二力平衡公理(equilibrium principle of two forces)

作用于同一刚体的两个力成平衡的充分与必要条件是:两个力的大小相等,方向相反,作用线相同(简称两力等量、反向、共线)。

例如,在一根静止刚杆的两端沿着直线 AB 施加两个拉力,如图 1-3(a)所示,或

两个压力如图 1-3(b) 所示的 F_1 及 F_2 , 并使 $F_1 = -F_2$, 由经验可知, 刚杆将保持静止, 所以 F_1 与 F_2 两个力成平衡。反之, 如果 F_1 与 F_2 不满足上述条件, 即它们的作用线不同, 或者 $F_1 \neq -F_2$, 则刚体将开始运动, 即两个力不能平衡。

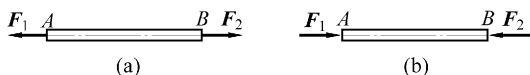


图 1-3 二力平衡杆件

在工程上, 通常把只受两个力作用而处于平衡的构件称为二力构件(或二力杆)。二力构件上的力必满足二力平衡条件。

公理二 加减平衡力系公理 (principle of added or moved equilibrium force system)

在作用于刚体的已知力系中加上或减去任一平衡力系, 不改变原力系对刚体的作用效应, 如图 1-4 所示(图中 S_1 与 S_2 是一对平衡力系, 即 $S_1 = -S_2$, 且作用于同一作用线上)。

该原理的正确性是显而易见的。因为一个平衡力系不会改变刚体的运动状态, 所以, 在原力系中加上或减去一个平衡力系, 都不会使刚体运动状态发生改变, 即新力系与原力系等效。

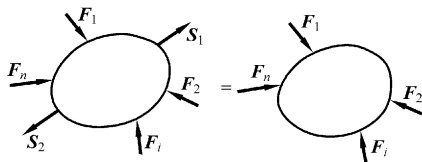


图 1-4 等效力系

应用上面两个原理, 可从理论上证明力的可传性(请读者自行推证)。

公理三 力的平行四边形法则 (parallelogram law)

作用于物体上同一点的两个力可以合成为一个力, 此合力方向由以原两力矢为邻边所构成的平行四边形的对角线矢量来表示。

如图 1-5(a) 作矢量 $\vec{AB}$ 及 $\vec{AD}$ 分别代表力 F_1 及 F_2 , 以 AB 和 AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则对角线矢 $\vec{AC}$ 即代表 F_1 与 F_2 的合力 F_R ; 力 F_1 及 F_2 则称为 F_R 的分力。

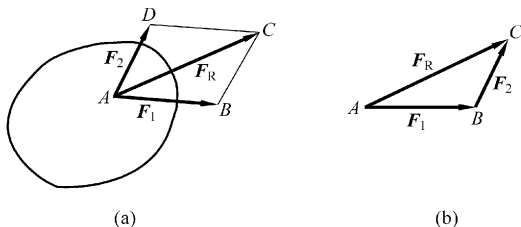


图 1-5 力的合成

平行四边形法则表明, 共点的两个力的合力等于这两个力的矢量和, 用矢量方程

表示,即

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

自然,合力也作用于两分力的公共作用点 A 。

有时,我们不用平行四边形法则而用**三角形法则**(triangle law)求合力的大小和方向:在图 1-5(b)中,作矢量 $\vec{AB}$ 代表力 $\boldsymbol{F}_1$,再从 $\boldsymbol{F}_1$ 的末端 B 作矢量 $\vec{BC}$ 代表力 $\boldsymbol{F}_2$,最后从 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点 A 向 $\boldsymbol{F}_2$ 的末端 C 作矢量 $\vec{AC}$,则 $\vec{AC}$ 即为合力 $\boldsymbol{F}_R$ 。但应注意,力三角形 ABC 只表明力的大小和方向,而不表示力的作用点或作用线。

平行四边形法则还可推广应用于不共面的多个共点力求合力的情形。

公理四 作用与反作用定律(principle of action and reaction)

两物体间相互作用的力(作用力与反作用力)总是大小相等,方向相反,沿同一直线分别作用于这两个物体上,如图 1-6 所示。

公理四指出,力总是成对出现的, A 物体给 B 物体一作用力时, B 物体必给 A 物体一反作用力,且两者等量、反向、共线。但应注意,作用力与反作用力分别作用于不同的两物体上。在分析每个物体的受力时,只应考虑它所受的作用力,而不应考虑它作用于其他物体的反作用力;同时也不能把作用力与反作用力看成为一对平衡力。

这一公理就是牛顿第三定律,不论物体是静止的或运动着的,这一定律都成立。

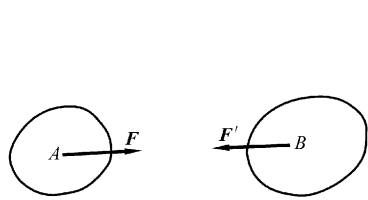


图 1-6 作用力与反作用力

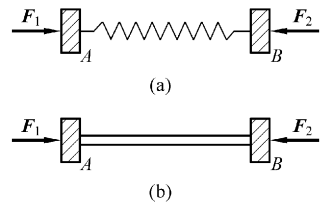


图 1-7 刚化原理说明

公理五 刚化原理(principle of rigidization)

当变形体在某一力系作用下处于平衡时,如将此变形体刚化为刚体,其平衡状态不变。

例如,在图 1-7(a)中,弹簧 AB 在力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 的作用下保持平衡。若将该弹簧硬化为图 1-7(b)中的刚杆,其平衡状态不改变。

这一公理告诉我们:可以将刚体的平衡条件,应用到变形体的平衡问题中去。但应注意,对刚体而言是必要且充分的平衡条件,对变形体来说,仅是必要的,而非充分的。变形体平衡时,除了它所受的力必须满足平衡条件以外,还需满足与变形体的物理性质有关的某些附加条件。

刚化原理建立了刚体静力学和变形体静力学之间的联系,这对于研究变形体静力学具有重要的意义。

1.4 力在直角坐标轴上的投影及沿直角坐标轴的分解

按照矢量的运算规则,可将一个力分解成两个或两个以上的分力。最常用的是将一个力沿直角坐标轴 x, y, z 方向分解为 3 个分力,如图 1-8 所示。

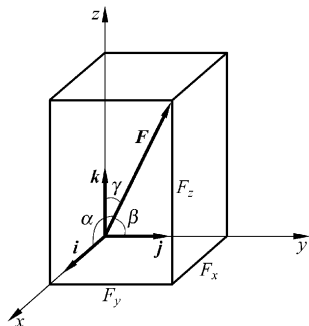


图 1-8 力沿坐标轴分解

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (1-1)$$

这就是力 $\mathbf{F}$ 沿直角坐标轴的分解公式。其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是沿坐标轴正向的单位矢量, F_x, F_y, F_z 分别是力 $\mathbf{F}$ 在 x, y, z 轴上的投影。

若已知 $\mathbf{F}$ 与 x, y, z 坐标轴正向的夹角 α, β, γ , 则

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} \\ F_y = F \cos \beta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} \\ F_z = F \cos \gamma = \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \end{cases} \quad (1-2)$$

式中的角 α, β, γ 可以是锐角,也可以是钝角,因此力的投影可能为正或负。若力与坐标轴正向的夹角为钝角,也可改用其补角(锐角)计算力的投影的大小,而根据观察来判断投影的符号。这种求力的投影方法被称为直接投影法。

也就是说,一个力在某一轴上的投影,等于该力与沿该轴方向的单位矢量之标积。该结论不仅适用于力在直角坐标轴上的投影,也适用于力在任一轴上的投影。例如,有一轴 ξ ,沿该轴正向的单位矢量为 $\mathbf{n}$,则力 $\mathbf{F}$ 在 ξ 轴上的投影为 $F_\xi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 。设 $\mathbf{n}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的方向余弦为 l_1, l_2, l_3 , 则

$$F_\xi = F_x l_1 + F_y l_2 + F_z l_3 \quad (1-3)$$

当力 $\mathbf{F}$ 与某两个坐标轴的夹角(如 α, β)不易确定时,可先将力 $\mathbf{F}$ 投影到 Oxy 坐标面上,得矢量 $\mathbf{F}'$ (矢量在平面上的投影仍为矢量),然后再把这一矢量投影到两个坐标轴上即可。如图 1-9 中,已知角 γ 和 θ ,则力在 3 个坐标轴上的投影分别为

$$\begin{cases} F_x = F \sin \gamma \cos \theta \\ F_y = F \sin \gamma \sin \theta \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases} \quad (1-4)$$

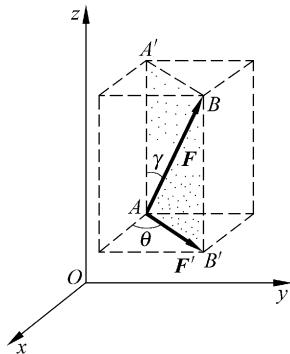


图 1-9 力在坐标轴上的投影

这种求力的投影方法被称为二次投影法,在实际计算中应用很多,必须熟练掌握。

如果已知力 F 在 x, y, z 轴上的投影 F_x, F_y, F_z , 反过来则可求得该力的大小及方向余弦:

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \end{cases} \quad (1-5)$$

1.5 力 矩

实践证明, 作用于物体的力, 通常不仅可使物体移动, 还可使物体转动。由物理学已知, 力的转动效应是用力矩(moment)来度量的。

1.5.1 力对一点的矩

设有一作用于物体的力 F , 它使物体绕 O 点转动的效应用力 F 对 O 点的矩 M_O (或 $M_O(F)$) 来度量, 如图 1-10 所示。

这里的 O 点称为力矩中心 (centre of moment), 简称矩心。矩心 O 至力 F 作用线的垂直距离 a 称为力臂 (arm of force)。

一般情况下, 力 F 对 O 点的矩取决于以下 3 个要素:

(1) 力矩大小 它等于力 F 的大小与力臂 a 的乘积, 即

$$M_O(F) = Fa \quad (1-6)$$

力矩的单位是 $N \cdot m$ 或 $kN \cdot m$ 等。

(2) 力矩方位 它取决于力 F 与矩心 O 所构成平面的方位, 即 M_O 垂直于力 F 与矩心 O 所决定的平面。

(3) 力矩指向 按右手螺旋法则确定 (以右手螺旋的转向为力矩的指向, 则螺旋前进的方位就代表矩矢 M_O 的指向)。

必须注意, 力矩 $M_O(F)$ 既然与矩心位置有关, 因而矩矢 $M_O(F)$ 只能画在矩心 O 处, 而不能随意画在别处, 所以力矩矢量是定位矢 (fixed vector)。

将力 F 沿其作用线移动时, 由于 F 的大小、方向以及由 O 点到力作用线的距离都不变, 力 F 与矩心 O 构成的平面的方位也不变, 根据力对一点的矩的定义可知, 对于 O 点的矩也不变。也就是说, 力对于一点的矩不因力沿其作用线移动而改变。

如果从矩心 O 作矢量 $\vec{OA}$, 用 r 表示, 称为力作用点 A 对于 O 点的矢径或位置矢

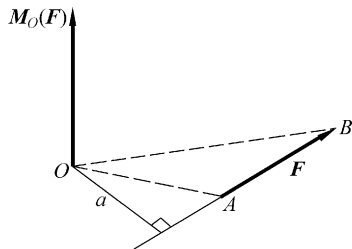


图 1-10 力对一点的矩

(radius vector or position vector), 见图 1-11, 则力 $\mathbf{F}$ 对于 O 点的矩 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 可用矢积 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 来表示。因为, 根据矢积的定义, $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 是一个矢量, 它的模恰好与 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 的模相等, 它的方向也与 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 的方向相同。因而

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1-7)$$

也就是说, 一个力对于任一点的矩等于该力作用点对于矩心的矢径与该力的矢积。式(1-7)即为力对 O 点的矩的矢积表达式。

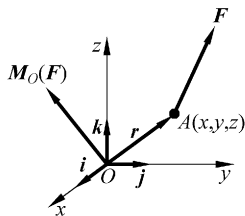


图 1-11 力对一点的矩的矢积表示

若过矩心 O 取直角坐标系 $Oxyz$, 并设力 $\mathbf{F}$ 的作用点 A 的坐标为 (x, y, z) , 如图 1-11 所示, 则式(1-7)可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (xi + yj + zk) \times (F_x i + F_y j + F_z k) \\ &= (yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k \end{aligned} \quad (1-8)$$

式(1-8)即为力对点的矩的解析式。也可用行列式表示为

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

对于平面力系问题, 取各力所在平面为 Oxy 面, 则任一力的作用点坐标 $z=0$, 力在 z 轴上的投影 $F_z=0$, 于是式(1-8)及式(1-9)退化为代数式

$$M_O(F) = xF_y - yF_x, \quad \text{或} \quad M_O(F) = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \quad (1-10)$$

利用式(1-8)或式(1-9), 我们可由一个力的作用点的坐标及该力的投影计算其对 O 点的矩, 而无需量取 O 点到力作用线的距离。

由于坐标的选取是任意的, 式(1-8)、式(1-10)还告诉我们, 计算一个力对一点的矩时, 可将该力分解成为 2 个或 3 个适当的相互垂直的分力, 分别计算它对该点的矩, 再求代数和或矢量和。

对于平面力系问题, 力对点的矩还可表示为

$$M_O(\mathbf{F}) = \pm Fa \quad (1-11)$$

其正负号的规定是: 逆时针转向的力矩为正值, 顺时针转向的力矩为负值。

1.5.2 力对一轴的矩

力不仅能使物体绕某一点转动, 还能使物体绕某一轴转动。

设刚体上作用有一力 $\mathbf{F}$, 有一与此力的作用线不平行也不垂直的 Oz 轴。任取一平面 N 垂直于 z 轴, 并令 z 轴与平面 N 的交点为 O 。将力 $\mathbf{F}$ 分解为两个分力: 平行于 z 轴的分力 $\mathbf{F}_z$, 垂直于 z 轴在平面 N 内的分力 $\mathbf{F}'$ 。显然, 分力 $\mathbf{F}_z$ 不能使刚体绕 z

轴转动,它对 z 轴的转动效应为零。而分力 F' 使刚体绕 z 轴转动的效应决定于 F' 与其垂直距离 a 的乘积,即可用平面 N 内 F' 对 O 点的矩来度量,如图 1-12 所示。可表示为

$$M_z(\mathbf{F}) = M_O(\mathbf{F}') = \pm F'a \quad (1-12)$$

由此可得力对一轴的矩的概念:一个力对于某一轴的矩等于此力在垂直于轴的任一平面上的投影对轴与该平面的交点的矩。该轴通常称为矩轴。力对轴的矩是一代数量,式(1-12)中的正负号按右手螺旋法则确定,即用右手四指表示该力使物体转动的方向,大拇指的指向与轴的正向一致时,取正号;反之,取负号。

力对一轴的矩的单位也是 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 等。

从定义可知,当力沿其作用线移动时,并不改变力对轴的矩。当力与矩轴相交 ($a=0$) 或当力与矩轴平行 ($F'=0$) 时,力对轴的矩为零。或者说,力与矩轴共面时,力对轴之矩为零。

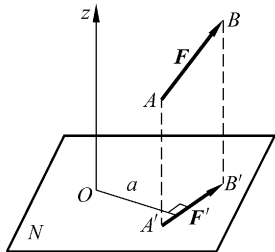


图 1-12 力对某一轴的矩

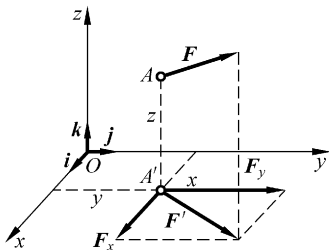


图 1-13 力对各坐标轴的矩

力对轴的矩可用解析式表示。如图 1-13 所示,作直角坐标系 $Oxyz$,设力 $\mathbf{F}$ 的作用点 A 的坐标为 $A(x, y, z)$,则力 $\mathbf{F}$ 在坐标轴上的投影为 F_x, F_y, F_z 。根据式(1-10)、式(1-12)可得

$$\begin{cases} M_x(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y \\ M_y(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z \\ M_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x \end{cases} \quad (1-13)$$

用式(1-13)计算力对轴的矩,往往比直接根据定义计算来得方便。

1.5.3 力对点的矩与力对轴的矩的关系

力对一点的矩与对一轴的矩两者是不同的,但它们之间能否建立某种联系呢?

根据力对点的矩的解析式(1-8)知, $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 在 3 个坐标轴上的投影分别为