# 第1章 函数

## 1.1 函数的概念与图形

### 1.1.1 函数的概念

在日常生活中,有两种常见的量:一种量的值是固定的,称为常量;一种量可以取不同的值,称为变量. 函数研究的就是变量之间的对应关系. 例如,圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 就给出了面积 $S$ 与半径 $r$ 之间的关系,而周长公式 $l=2\pi r$ 给出的则是周长 $l$ 与半径 $r$ 之间的关系.

* 这里我们假设所研究的对象只有两个变量,其中一个依赖另一个的变化,称之为一元函数. 一般的情况是可以有 $m+n$ 个变量,其中 $m$ 个变量依赖于另外 $n$ 个变量的变化,而后 $n$ 个变量中彼此则没有依赖的关系. 这种函数称为 $n$ 元向量值函数.

* 在以下的讨论中,只要不特别声明,变量都取值于实数,即有理数(有限或循环小数)和无理数(无穷非循环小数).

**定义 1.1** 设 $D$ 是一个非空实数集,$f$ 是定义在 $D$ 上的一个对应关系,若对于任意的实数 $x\in D$,都有惟一的实数 $y\in\mathbb{R}$ 通过 $f$ 与之对应,则称 $f$ 是定义在 $D$ 上的一个**函数**,记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 $x$ 称为**自变量**,$y$ 称为**因变量**. 自变量的取值范围 $D$ 称为函数的**定义域**,所有函数值构成的集合

$$\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

现代意义上的函数概念是由德国数学家狄利克雷

(Dirichlet)给出的，而记号 $y=f(x), x\in D$ 则是由瑞士数学家欧拉(Euler)首先使用的.

* 对于一元函数，它的定义域通常是一个有限或无穷的区间，例如开区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$，闭区间 $[0,5]$，$[-5,0]$，半开半闭区间 $(-\infty, 2]$，等等.

**例 1.1** 求圆的面积作为半径的函数及周长作为半径的函数的定义域和值域.

**解** 由于圆最小可以收缩成一个点，所以半径最小可以为零. 当圆越来越大时，其半径也越来越大，而且可以取到任何给定的正数，从而函数 $S=\pi r^2$ 及 $l=2\pi r$ 的定义域是无穷区间 $[0,+\infty)$，而值域也是无穷区间 $[0,+\infty)$.

**例 1.2** 求函数 $y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt{1-x}$，$y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域.

**解** 函数 $y=x^2$ 的定义域和值域分别是 $(-\infty,+\infty)$ 和 $[0,+\infty)$；

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域和值域分别是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域和值域分别是 $[0,+\infty)$ 和 $[0,+\infty)$；

函数 $y=\sqrt{1-x}$ 的定义域和值域分别是 $(-\infty,1]$ 和 $[0,+\infty)$；

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域分别是 $[-1,1]$ 和 $[0,1]$.

**例 1.3** 求狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

的定义域与值域.

**解** 定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是两个数的集合 $\{0,1\}$.

一般来说，求函数定义域的原则是，当自变量具有实际背景时，其实际变化范围就是函数的定义域，如当自变量表示的是长度、时间、绝对温度时，其值都是非负的，像圆的面积函数和周长函数的定义域就是这种情况；当自变量没有什么具体的实际意义时，函数的定义域就是使函数表达式中的运算都有意义的那些数的集合，这时又称函数的定义域为自然定义域.

### 1.1.2 函数的图形

最常用的表示函数的方法是数学表达式，除此之外，利用图形表示函数也是一种常用方法. 事实上，在现代的函数概念出现之前，人们是将函数等同于

图形的.那时,所谓研究函数,就是研究曲线.函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形指的是 $xOy$ 平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$.图 1.1～图 1.10 是一些常见的幂函数的图形.

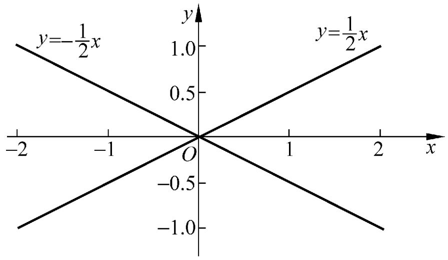


图 1.1

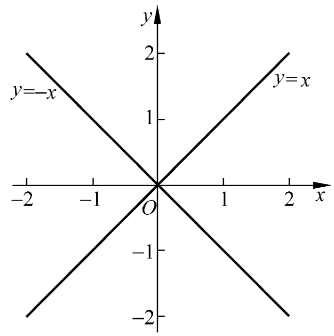


图 1.2

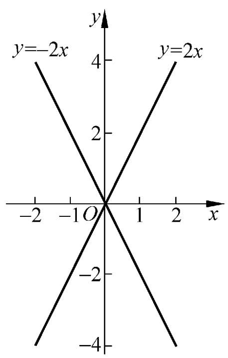


图 1.3

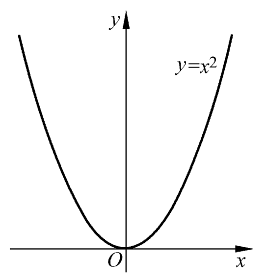


图 1.4

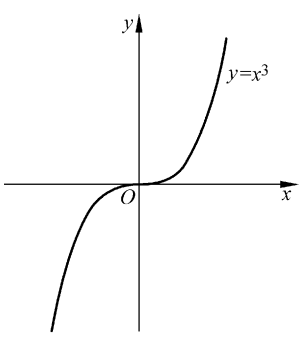


图 1.5

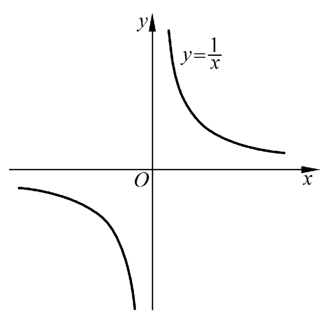


图 1.6

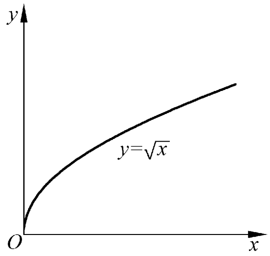


图　1.7

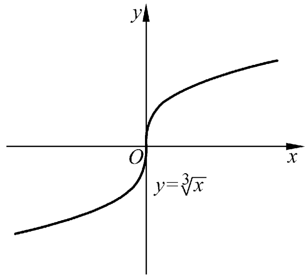


图　1.8

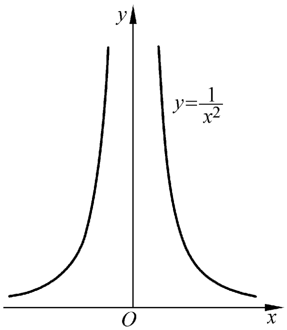


图　1.9

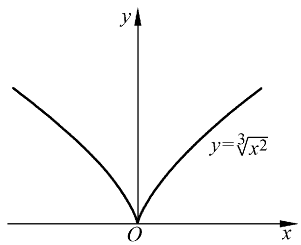


图　1.10

在以上的图形所表示的函数中，特别简单而重要的是以直线为图形的函数 $y=f(x)=kx$，它又叫做**线性函数**. 其函数关系就是我们熟知的正比关系，即函数值 $y$ 与自变量 $x$ 成正比，比例常数为 $k$. 例如，一辆汽车平均每小时行驶 40km，3 小时就行驶 120km，这里 $x$ 是小时数，$y$ 是公里数，而 $k$ 就是一个表示平均速率的比例常数. 一般来说，当人们对函数关系不太清楚，只从经验上感到自变量和因变量的变化趋势相同，即二者同时变大或同时变小，在这种情况下，往往容易假设它们之间的函数关系是正比关系. 当然，如果没有更充分的理由，这种假设往往是错误的(例如古希腊人认为作用于质点上力的大小与质点的速度成正比). 但奇怪的是，如果把这种变化关系限制在一个很小的范围内，再加上一点条件，就可以把它们看成是一种近似的线性(或正比)关系. 这是本书将要讨论的一个重要问题.

从这些简单的函数图形能得到函数本身的一些信息：不难看出，图 1.4 所表示的二次函数不可能取负值，它有最小值 0(当 $x=0$ 时)，它关于 $y$ 轴对称，即 $f(-x)=f(x)$；当 $x<0$ 时，$x$ 的增加导致 $y$ 减少，直到 $x$ 增加到 0 时 $y$ 减少到 0，反过来，$x$ 的减少导致 $y$ 增加；对于 $x>0$ 的情形可进行类似的讨

论.从图 1.5 看,三次函数可以取任何值,但没有最大值也没有最小值;在整个定义域中,$y$ 随着 $x$ 的增大而增大,而且它与原点对称,即 $f(-x)=-f(x)$. 图 1.6 表示的是反比函数,它也与原点对称,但在 $x=0$ 没有定义;在定义域的两个部分 $x<0$,$x>0$,$y$ 的值分别都随 $x$ 值的增大而减少;与前面几个函数不同的是,当 $x$ 沿正方向无限制地增加时,对应的 $y$ 值将无限制地减少而接近于 0.

对其他几个函数的图形也可以进行类似的简单分析. 注意图 1.10 有一个与其余函数图形不同的特点:它在 $x=0$ 处有一个“尖点”.

为了便于描述上面提到的一些现象,下面引进几个名词.

**定义 1.2** 对于函数 $f(x)$,如果存在两个实数 $m$ 和 $M$,使对 $f(x)$ 定义域中所有的 $x$,不等式

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

成立,则称 $f(x)$ 是**有界函数**,$m$ 叫做 $f(x)$ 的**下界**,$M$ 叫做 $f(x)$ 的**上界**.

如果 $m,M$ 中只有一个存在,则称 $f(x)$ 是**半有界的**;如果 $m,M$ 都不存在,则称 $f(x)$ 是一个**无界函数**.

在前面所列的函数图形中,图 1.4,图 1.7,图 1.9,图 1.10 是半有界函数(都是有下界而无上界),其他都是无界函数. 狄利克雷函数是一个有界函数.

**定义 1.3** 设函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义,若对于任意的 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in D$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上**严格单调增加**. 这时也称 $f(x)$ 是 $D$ 上的**严格单调增加函数**,$D$ 又称为函数 $f(x)$ 的**严格单调增加区间**. 若对于任意的 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in D$,都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上**单调增加**,$D$ 也称为函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**.

类似地可以定义**严格单调减少函数和单调减少区间**. 根据定义,函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加函数,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格单调减少,在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加.

从幂函数的图形中,还可以发现函数的另外一个性质,这就是函数 $y=x^2$,$y=\dfrac{1}{x^2}$,$y=\sqrt[3]{x^2}$ 的图形关于 $y$ 轴对称,而函数 $y=kx$,$y=x^3$,$y=\dfrac{1}{x}$,$y=\sqrt[3]{x}$ 的图形则关于坐标原点对称. 我们用“奇偶性”这个概念来描写函数图形的这种对称性质.

**定义 1.4** 设函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义,而且 $D$ 关于坐标原点对称,如果对任意的 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 是区间 $D$ 上的**奇函数**;如果对任意的 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 是区间 $D$ 上的**偶函数**.

根据定义，对于奇函数，由于点$(x,f(x))$，$(-x,-f(x))$都在函数图形上，而且$(x,f(x))$与$(-x,-f(x))$关于原点对称，所以奇函数的图形关于坐标原点对称. 对于偶函数，由于点$(x,f(x))$，$(-x,f(x))$都在函数图形上，而且$(x,f(x))$与$(-x,f(x))$关于 $y$ 轴对称，所以偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.

**例 1.4**　讨论函数 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=x^3+1$ 的奇偶性.

**解**　函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$. 由于

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x),$$

所以 $f(x)$是偶函数.

另一方面，由于

$$g(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1,$$

它既不等于 $g(x)$，也不等于$-g(x)$，所以函数 $g(x)$既非奇函数又非偶函数.

### 1.1.3　分段函数

在研究某些问题时，函数在它的定义域内，其对应关系并不总是能用一个数学表达式给出的. 比如邮寄信件时，所付的邮资与所寄信件重量的函数关系；又如个人收入所得税的纳税额与个人收入之间的函数关系都不能用单一的一个数学表达式给出，这种函数就是所谓的分段函数. 分段函数的定义可以表述为，若函数 $f(x)$在其定义域上不能用统一的一个数学表达式给出，但在定义域的不同范围内可以用不同的数学表达式表示，则称 $f(x)$是一个**分段函数**.

函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

就是一个分段函数，图 1.11 是 $y=f(x)$的图形.

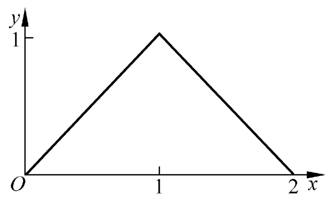


图　1.11

函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**；函数$[x]$称为**取整函数**，$[x]$的值是不大于 $x$ 的最大整数. 这是两个常见的分段函数，图 1.12 和图 1.13 分别是它们的图形.

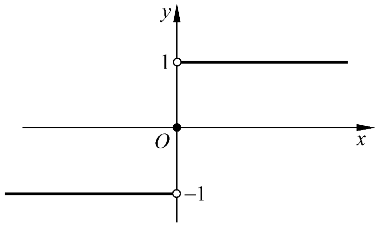


图 1.12

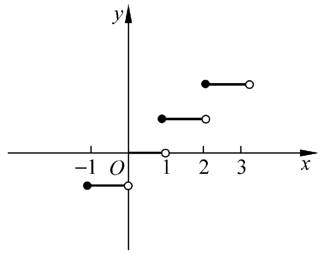


图 1.13

## 习题 1.1

1. 判断下列每组函数中的函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=2\ln x$, $g(x)=\ln x^2$;

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $g(x)=x-1$;

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=x$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=10-x^2$;　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=(\sqrt{x})^2$;　　(4) $f(x)=\sqrt{3x-5}$;

(5) $f(x)=\ln(2x+1)$;　　(6) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3x+2}$;

(7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;　　(8) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$;

(9) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$;　　(10) $f(x)=\arcsin\sqrt{2x+1}$.

3. 对下列函数计算 $f(a+h)-f(a)$并化简:

(1) $f(x)=3x+2$;　　(2) $f(x)=x^2$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

4. 作出下列函数的图形:

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$;　　(2) $f(x)=(-1)^{[x]}$, $[x]$是取整函数;

(3) $f(x)=|x|+x$;　　(4) $f(x)=|2x+3|$;

(5) $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\geqslant 1,\\ x^2, & |x|<1;\end{cases}$　　(6) $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\pi.\end{cases}$

5. 如果 $f(x)$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少.

## 1.2　三角函数、指数函数、对数函数

### 1.2.1　三角函数

三角函数是一种具有周期性的重要函数. 自然界中的许多现象都具有周期性，如行星的运动、季节的变化等. 在学习了三角级数以后，我们就会知道几乎所有的具有周期性的函数都可以用正弦函数和余弦函数的代数和表示.

三角函数的定义可以在一个圆心在原点、半径为 $r$ 的圆上给出，如图 1.14，定义

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x},$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y},\quad \sec\theta=\frac{r}{x},\quad \csc\theta=\frac{r}{y}.$$

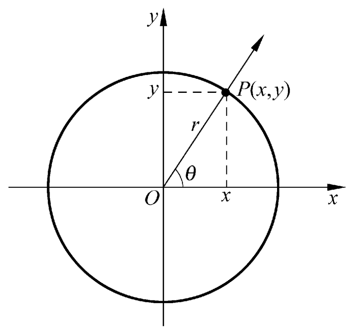


图　1.14

从中不难看出，

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},$$

因此正弦函数 $\sin\theta$ 和余弦函数 $\cos\theta$ 又称为基本三角函数.

下面是常用的一些三角函数之间的基本关系：

(1)
$$\cos^2 x+\sin^2 x=1;$$
$$\sec^2 x=1+\tan^2 x.$$

(2) 倍角公式

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;$$
$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

(3) 半角公式

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};$$

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

(4) 和角公式

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y;$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y;$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}.$$

(5) 和差化积公式

$$\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

(6) 积化和差公式

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y));$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y));$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)).$$

(7) 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

其中 $a,b,c$ 分别是三角形三个角 $A,B,C$ 对应的边.

(8) 余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

由于当 $\theta$ 的值增加 $2\pi$ 后,点 $P$ 又回到了原来的位置,所以

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\quad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta,\quad \tan(\theta+2\pi)=\tan\theta,$$

$$\cot(\theta+2\pi)=\cot\theta,\quad \sec(\theta+2\pi)=\sec\theta,\quad \csc(\theta+2\pi)=\csc\theta.$$

这种函数值重复出现的性质就是函数的周期性.

**定义 1.5** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，若存在正数 $T>0$，使得对任意的 $x\in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是一个**周期函数**，$T>0$ 称为 $f(x)$ 的**周期**. 如果 $T$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T,3T$ 等也是函数 $f(x)$ 的周期，一般说的周期指的是最小正周期.

事实上，正弦函数 $\sin\theta$ 和余弦函数 $\cos\theta$ 的周期是 $2\pi$，正切函数 $\tan\theta$ 和余切函数 $\cot\theta$ 的周期是 $\pi$. 图 1.15～图 1.20 给出了三角函数的图形. 函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 的图像如图 1.21 所示.

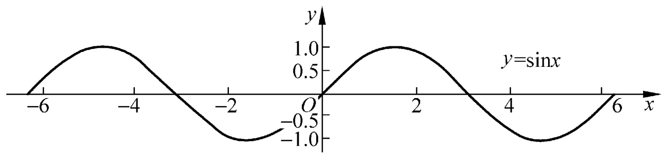


图 1.15

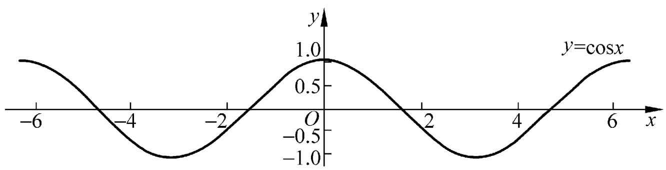


图 1.16

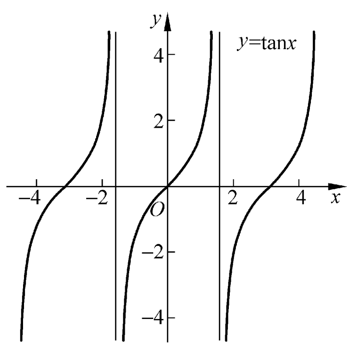


图 1.17

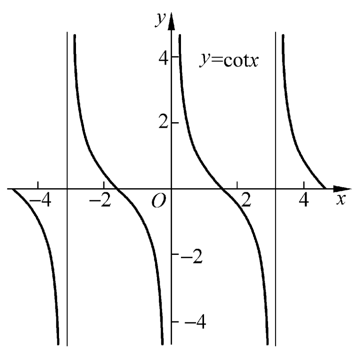


图 1.18

## 1.2.2 指数函数

指数函数是科学研究与工程技术中的一类重要函数，有着非常广泛的应