二 元 函 数

第7章

7.1 二元函数及其图形

7.1.1 二元函数的概念

前面已经讲过，函数就是一种对应关系. 如果 x,y 表示两个可变化的实数，而且 y 的变化由 x 惟一确定，我们就说 y 是 x 的一元函数，记为 $y=f(x)$，其中称 x 为自变量，而称 y 为因变量. x 的变化范围称为函数 $f(x)$ 的定义域，实数 $y=f(x)$ 的变化范围称为函数的值域.

如果我们研究的对象有三个变量 x,y,z，其中变量 z 依赖于 x,y(即 x,y 的值确定后，z 的值也随之确定)，但 x,y 之间没有彼此依赖的关系，这时就说 z 是自变量 x,y 的一个**二元函数**，记为 $z=f(x,y)$，其中，x,y 称为自变量，它们的变化范围称为**函数的定义域**(它一般是一个平面区域). 实数 $z=f(x,y)$ 的变化范围称为函数的**值域**. 例如，对一个底半径为 r，高为 h 的圆柱体，其体积 $V=\pi r^2 h$ 及其表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2$ 都是自变量 r,h 的二元函数，它们的定义域是半无界的四分之一平面：$0<r<+\infty, 0<h<+\infty$. 又如，在某个平面区域 D(例如一个县的范围)中引进了坐标，使 D 中的任意一点可以用平面坐标 (x,y) 来表示，那么这一点的海拔高度 z 就是 x,y 的二元函数 $z=f(x,y)$，这个函数的定义域就是 D，而值域就是区间 $[a,b]$，其中 a,b 分别是全县最低和最高处的海拔高度.

定义 7.1 设 D 是平面上的一个实数点 (x,y) 的非空集合，f 是定义在 D 上的一个对应关系. 如果对任意点 $(x,y)\in D$ 都有一个惟一的实数 z 通过 f 与之对应，我们就说 f 是定义在

D 上的一个二元函数,记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

其中(x,y)称为自变量,z 称为因变量;D 称为函数的定义域,而集合 $\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数的值域.

平面上的点(x,y)可以看成是一个向量,所以二元函数也可以看成是一个平面向量到实数域$\mathbb{R}$ 的一个对应.

可以类似地定义任意 n 元函数. 例如,一些生活中常碰到的如大气中一点的温度、湿度等都是这点的位置(体现为它在三维空间的坐标(x,y,z))及时间 t 的四元函数.

* 如果 A,B 分别表示两个集合,则集合 $A\times B$ 就表示所有的元素对(a,b)所组成的集合,其中 $a\in A,b\in B$. 用这个符号,上述圆柱体积和其表面面积作为 r,h 的二元函数,其定义域就可以写成$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

一般二元函数在平面上定义域的结构要比一元函数的定义域(直线上的点集)复杂. 本书不会对它们进行研究,只是把一些常碰到的名词列在下面,请读者与直线上的情况加以比较.

(1) **邻域**　平面$\mathbb{R}^2$ 上一个点 $A(a,b)$的 δ 邻域是指平面上所有与点(a,b)的距离$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$小于正实数 δ 的点的集合. 记为 $U(A,\delta)$.

邻域是一个基本的定义,由此而得到下面一系列定义.

(2) **内点**　指平面集合 S 中满足下列条件的点 A:对此点 A 存在正实数 δ,使 $U(A,\delta)\subset S$.

(3) **边界点**　指平面集合 S 中满足下列条件的点 A:对任意 $\delta>0$,$U(A,\delta)$都不包含于 S,而 $U(A,\delta)\cap S\neq\varnothing$(空集).

(4) **开集**　指平面$\mathbb{R}^2$ 上这样的集合:集合中的每一点都是内点.

(5) **闭集**　如果 $\mathbb{R}^2\backslash S$ 是开集,则称 S 是闭集.

(6) **集合的内部**　平面集合 S 的内部就是 S 中所有内点的集合.

(7) **集合的边界**　平面集合 S 的全体边界点所组成的集合. 记为∂S.

(8) **集合的闭包**　平面集合 S 的闭包就是集合 $S\cup\partial S$.

(9) **连通集**　一个平面集合 D,如果其中任意两点都可以用位于 D 内部的有限条直线段连接起来,就说 D 是一个连通集.

(10) **区域**　平面上的连通开集就称为区域. 如果对某个区域存在两个实数 k,K,使得对此区域中所有点 $P(x,y)$,都满足不等式 $k\leqslant x,y\leqslant K$,则称这个区域是**有界区域**;否则就称之为**无界区域**.

例 7.1　$z=ax+by$,a,b 为常数,这是一个标准的二元线性函数,它在三维空间表示一张平面. 它的定义域是全平面$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

例 7.2 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. 这是一个以原点为中心,半径为 1 的上半球面,定义域为 $x^2+y^2\leqslant 1$.

例 7.3 $f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$. 这是一个以原点为顶点的锥面,定义域为全平面;即对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$,这个方程确定惟一的一个值 z.

例 7.4 $z=a^2x^2+b^2y^2$. 这是一个椭圆抛物面,定义域为全平面.

例 7.5 $z=xy$. 这是一个马鞍面,定义域为全平面.

例 7.2～例 7.5 的图形见 6.5 节.

和一元函数的情况一样,求函数定义域的一般办法是:当自变量都有实际背景时,其实际变化的范围就是函数的定义域;当自变量没有具体的实际意义,但函数有明显的表达式时,函数的定义域就是使表达式中的运算都有意义的那些实数的集合.

7.1.2 二元函数的图形

二元函数的表示方法有以下三种:列表表示,数学表达式和图形表示.用数学表达式来表示函数又分为显函数形式与隐函数形式.对于二元函数来说,所谓显函数形式就是常用的 $z=f(x,y)$ 形式;而隐函数形式则是用一个三元方程的一个解来表示一个函数:一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 只能解出一个未知数,在某个范围内可以把 x,y 看成参数解出 z,得到 $z=f(x,y)$,也可以把 x,z 看成参数解出 y,得到 $y=g(x,z)$.所以一个 n 元方程一般表示一个 $n-1$ 元函数. 再推广一下:含有 n 个变量,m 个方程的方程组一般可以解出 m 个显函数(当然要有条件). 至于用图形来表示一个二元函数,又分为用三维曲面表示和用平面等值线表示.

所谓一个函数的等值线(或等高线),是指曲面 $z=f(x,y)$ 和平面 $z=a$(a 是任意常数)相交所得的平面曲线.

* 并不是任何一个三元方程一定可以解出一个变量为其他两个变量的函数.例如,在方程

$$x^2+(x-1)^2+y^2+(y+1)^2+z^2=0$$

中,给定其中任意两个变量的一对实数值,都无法找到另外一个变量的实数值使之满足方程.有一些使方程有解的充分条件,这里就不提了.

下面举几个图形表示函数的例子.

例 7.6 $z=x-2y$.

这是一个平面.图 7.1 是它的三维图形,图 7.2 是它的平面等值线图.

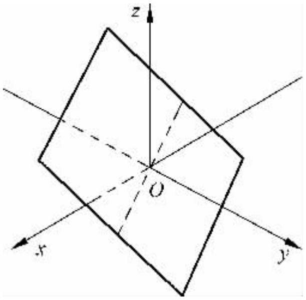

图　7.1

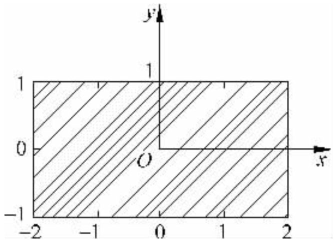

图　7.2

例 7.7　$z=x^2-y^2$.

这是一个双曲抛物面(马鞍面). 图 7.3 是它的三维图形,图 7.4 是它的平面等值线.

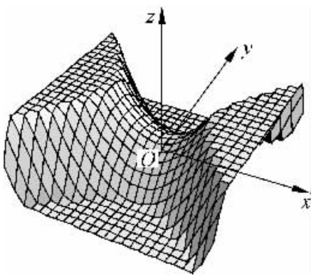

图　7.3

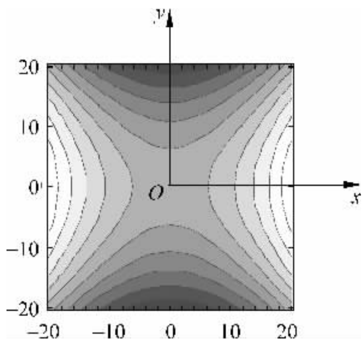

图　7.4

如果把图 7.3 看做是一座山的话,可以看出,如果我们站在 O 点,沿着平面直线 y 轴正反两个方向走都是下山的路;而沿着 x 轴往正反两方向走就都是上山的路. 换句话说,对于这个马鞍面和平面 $x=0$ 所交的曲线而言,O 点是这条曲线的极大值点;而对于马鞍面和平面 $y=0$ 所交的曲线而言,O 点是这条曲线的极小值点. 曲面上具有这种性质的点称为**鞍点**.

例 7.8　$z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$.

图 7.5 是它的曲面图形,图 7.6 是它的等值线图.

如果把这个曲面看成是一座小山的一部分,则可以看出,它在 $-3\leqslant x$, $y\leqslant 3$ 这个范围内,在点(0,0)有一个峰,高度与海平面平(其他地方低于海平面). 此外,从图上还可以看出,在这个范围内,曲面有两个鞍点:(2,0),(0,2).

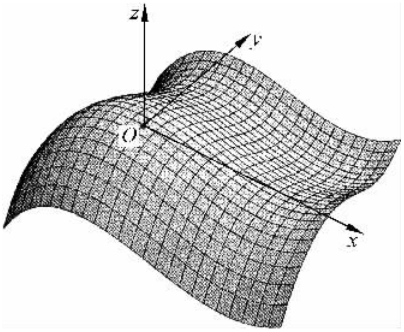

图　7.5

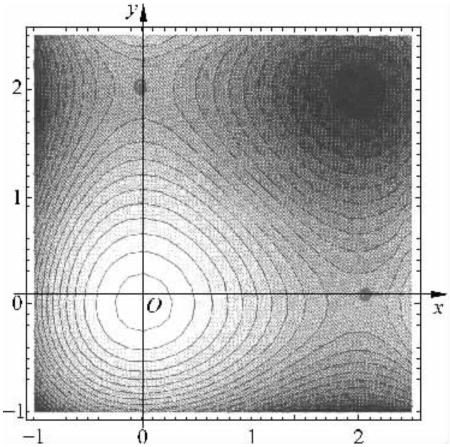

图　7.6

例 7.9　$z=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$.

图 7.7 和图 7.8 分别是这个函数的曲面表示和等值线表示. 这个曲面只在(0,0)处有一个峰,高度为 1.

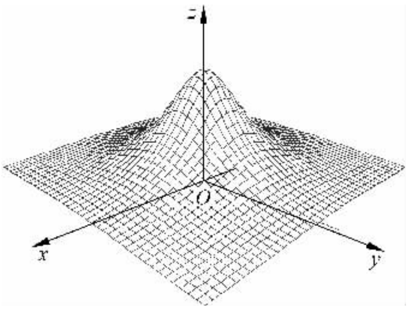

图　7.7

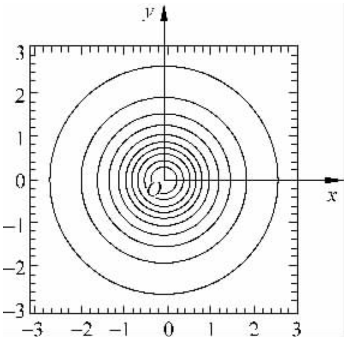

图　7.8

从图 7.8 和图 7.6 还可以看出：如果任意两条相邻的等值线 $z=h$,$z=k$ 的高度差 $h-k$ 相等,例如一个表示海拔高度的地形图,高度每差 10m 画一条等值线,如 100m,110m,120m,…,则等值线分布越密的地方说明这些地方山势越陡峻,因为经过很短的平面距离就会形成较大的高度差.

* **例 7.10**　$z=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y}}\,(y>0)$.

这个函数的三维图形和等值线图如图 7.9 和图 7.10 所示.

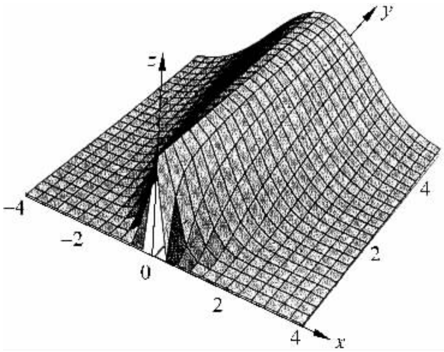

图　7.9

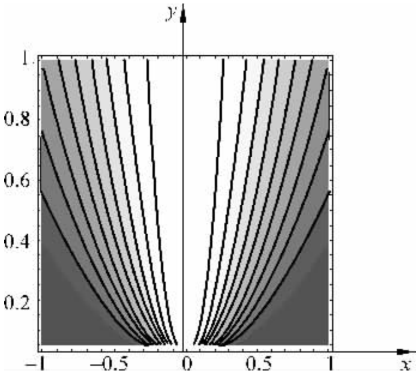

图　7.10

由于函数的定义域为 $y>0$，所以它的值域为 $0<z\leqslant 1$. 等值线是这个曲面和平面 $z=k$（常数）所交的平面曲线，其方程为 $e^{-\frac{x^2}{y}}=k$. 或者换个常数来化简，令 $c=-\ln k$，由于 $0<k\leqslant 1$，从而 $0\leqslant c<+\infty$，等值线方程就成为 $\dfrac{x^2}{y}=c$ 或 $y=\dfrac{1}{c}x^2$. 这是一族（随 c 而变）典型的抛物线，而且常数 c 越小，抛物线向上的开口也越小；对于常数 $c=0$（或 $k=1$），对应的等值线是直线 $x=0$（即 y 坐标轴），所对应的函数值是 $z=1$. 这些都可以从图上看出.

有些一元函数是分段定义的，二元函数也有相应的“分块定义”的函数.

例 7.11　$$z=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x<1, -1<y<1,\\ 1+x, & -1<x<0, -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这是一个分段（块）定义的二元函数，其曲面表示如图 7.11 所示. 由于它的形状，因此有时也称之为“帐篷函数”.

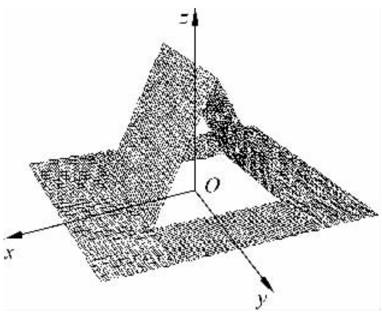

图　7.11

例 7.12　$z=\begin{cases}1-x^2-y^2, & x^2+y^2<1, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

这又是一个分块定义的函数,其图形见图 7.12.

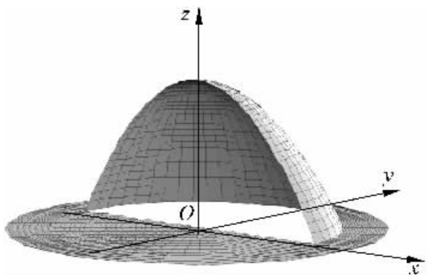

图　7.12

和一元函数一样,在以上二元函数的例子中,以平面为图形的**线性函数** $z=ax+by$ 是最简单而且也是最重要的. 它说明函数值 z 与作为自变量的向量(x,y)成"正比",即如果向量(x,y)数乘 k 倍而成为 $k(x,y)=(kx,ky)$,则相应的函数值 z 也增加(或减少)k 倍,即 $kz=a(kx)+b(ky)$. 人们常用线性函数来逼近某个函数在一点的值.

下面仿照一元函数引进一些常用的名词.

定义 7.2　对于二元函数 $z=f(x,y)$,如果存在两个实数 m 和 M,使得对定义域中所有点(x,y),下面的不等式成立:

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M,$$

则称 $f(x,y)$是**有界函数**,m 叫做 $f(x,y)$的**下界**,M 叫做 $f(x,y)$的**上界**.

如果 m,M 中只有一个存在,则称 $f(x,y)$是**半有界**的;如果 m,M 都不存在,则称 $f(x,y)$是一个**无界函数**.

在上面所列的 7 个函数图形的例子中,只有例 7.6、例 7.7 和例 7.8 是无界函数,其他都是有界函数.

定义 7.3　设二元函数 $z=f(x,y)$的定义域 D 关于原点对称,如果对任意的$(x,y)\in D$,都有 $f(-x,y)=f(x,y)$,则称函数对于变量 x 是偶函数;如果都有 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则称函数对于变量 x 是奇函数. 同样可以定义函数 $f(x,y)$对变量 y 的偶函数和奇函数. 最后,如果对任意$(x,y)\in D$,都有 $f(-x,-y)=f(x,y)$,则称 $f(x,y)$是一个二元偶函数;如果 $f(-x,-y)=-f(x,y)$,则称它是一个二元奇函数.

* 如果函数 $f(x,y)$只是对于变量 x 来考虑，则不必要求它的定义域 D 关于原点对称，只要关于 x 轴对称就可以了. 同样对变量 y 也是如此.

本节中的例 7.10 和例 7.12 是对变量 x 的偶函数，例 7.7，例 7.9 及例 7.11 是二元偶函数，而例 7.6 和例 7.8 则什么都不是.

在一元函数 $y=f(x)$中，如果自变量 x 不出现，则它表示一条与 x 轴平行的直线，因为在这条直线上，x 可以取任何值. 而在二元函数 $z=f(x,y)$中，如果有一个变量，例如 x 不出现，则它的图形就是一个以 yOz 平面上的曲线 $z=f(y)$为准线，母线与 x 轴平行的柱面(图 7.13). 因为在此柱面上，x 可以任意取值.

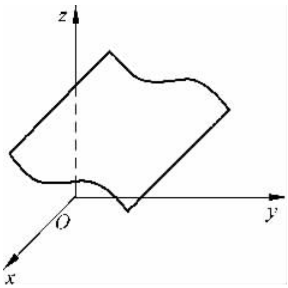

图　7.13

* 如果在 $z=f(x,y)$中，x,y 都不出现，这个式子的图形是什么？

* 对于二元函数来说，没有单调增加或单调减少的概念. 这是因为一个一元函数只有一个自变量和一个因变量，它们都是实数，而实数是可以比较大小的. 说一个一元函数在某一区间是单调增加的，就意味着当自变量的值在此区间内由小变大(或由大变小)时，因变量(函数值)也由小变大(或由大变小)，即两个变量的变化方向相同；如果说它在此区间是单调减少的，即指两个变量的变化相反. 对二元函数 $z=f(x,y)$来说，因变量(函数值)z 固然是一个可比大小的实数，但它的自变量(x,y)却是一个不能比大小的向量. 因此自变量的“增加”或“减少”就没有意义，也就谈不上二元函数的单调变化了.

* 一个二元函数如何定义它的反函数？一元函数 $y=f(x)$代表两个实数 $x\to y$ 的一个对应，如果把变量 x 变为 y，则它的反函数 f^{-1} 就把变量 y 变为 x. 这里的前提是函数 f 不能把不同的 x 对应到同一个 y，否则反函数就变成多值了. 现在看二元函数 $z=f(x,y)$，它代表二维向量(x,y)和实数 z 的一个对应，如果按处理一元函数的思路，反函数(如果有的话)f^{-1} 就应该把实数 z 对应到一个二维向量(x,y)，而且每个 z 只能对应于惟一的向量(x,y). 而这一点对一般函数来说是做不到的. 因为一般的函数都有自己的等值线，也就是给定一个 z 后，与之对应的所有点(x,y)所组成的曲线，一般不会只对应一个惟一的点. 于是在通常情况下，我们不去考虑二(多)元函数的反函数问题.

习题 7.1

1. 求下列函数在指定点的值：

(1) $f(x,y)=2x^2-y^2$, $f(1,2)$, $f(2,1)$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$, $f(1,-1)$, $f(1,2)$；

(3) $f(x,y)=2x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+1$, $f(1,2)$, $f(2,1)$；

(4) $f(x,y)=xye^{x^2+y^2}$, $f(0,0)$, $f(1,1)$, $f(-1,-1)$；

(5) $f(x,y)=x\ln y-2y\ln x$, $f(1,e)$, $f(e,1)$；

(6) $f(x,y)=x\sin y+y\cos x$, $f(\pi,\pi)$, $f(-\pi,-\pi)$；

(7) $f(x,y,z)=xe^{\frac{y}{z}}$, $f(1,1,1)$, $f(1,0,1)$；

(8) $f(x,y,z)=\dfrac{x\ln yz+y\ln zx+z\ln xy}{x+y+z}$, $f(1,2,3)$, $f(3,2,1)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x,y)=4-2x-3y$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$；

(3) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$；

(4) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$；

(5) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$；

(6) $f(x,y)=\dfrac{1+\sin xy}{xy}$；

(7) $f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2)$；

(8) $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}}$；

(9) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$.

3. 说明下列函数的图形，并画出简图：

(1) $f(x,y)=x$；

(2) $f(x,y)=x+y$；

(3) $f(x,y)=x^2+y^2$；

(4) $f(x,y)=4-x^2-y^2$；

(5) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$；

(6) $f(x,y)=9-x^2$；

(7) $f(x,y)=6-\sqrt{x^2+y^2}$；

(8) $f(x,y)=\sqrt{36-4x^2-9y^2}$.

4. 指出下列函数的等值线，并画出简图：

(1) $f(x,y)=y-x^2$；

(2) $f(x,y)=x^2-y^2$；

(3) $f(x,y)=4-x^2-y^2$；　　(4) $f(x,y)=y-\sin x$；

(5) $f(x,y)=144-9x^2-16y^2$.

5. 求下列函数的定义域，指出它们是否是开集？并说明理由.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x}\ln(x+y)$；　　(2) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$；

(3) $f(x,y)=\dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{x-y^2}$；　　(4) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

7.2　函数运算

因为二元函数的值仍为实数，所以二元函数的四则运算与一元函数的情形没有什么不同.

定义 7.4　设函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$的定义域为 D，$k\in\mathbb{R}$，则对它们进行四则运算的结果（和差、积、商）还是一个函数，它们的定义域不变，而函数值则由下列式子定义：

(1) $(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$；

(2) $(kf)(x,y)=kf(x,y)$；

(3) $(fg)(x,y)=f(x,y)g(x,y)$；

(4) $(f/g)(x,y)=f(x,y)/g(x,y)$，$g(x,y)\neq 0$.

其中左端前一个括号内表示对两个函数进行四则运算后所得的函数，这些函数在(x,y)的值等于右端的值.

函数的复合　和一元函数一样，二元函数也有复合的问题. 例如 $z=f(x,y)=xy+\ln(x^2+y^2+1)$，$x=g(u,v)=u+v$，$y=h(u,v)=u-v$，则有复合函数

$$z=f(g(u,v),h(u,v))=u^2-v^2+\ln(2u^2+2v^2+1).$$

又例如以原点为顶点，以平面 $z=1$ 上的曲线 $f(x,y)=x^2+4y^2-1=0$ 为准线的锥面方程 $z^2=x^2+4y^2$，它就来自复合函数的方程 $f(x/z,y/z)=0$.

函数的复合不一定要求自变量的个数相同，例如在函数 $z=f(x,y)$中，如果令 $x=g(t)$，$y=h(t)$，则复合函数是一个一元函数，

$$z=f(x,y)=f(g(t),h(t))=F(t).$$

例 7.13　根据统计，哺乳动物的耗氧量 C 与它所在外部温度 T(℃)与体内温度 U 之差成正比：$C=\dfrac{2.5(T-U)}{m^{2/3}}$，其中 m 为动物体重（单位：kg）.