第一部分

离散数学基础

第 1 章　计数基本原理

第 2 章　逻辑基础

第 3 章　集合论

第 4 章　整数的性质：数学归纳法

第 5 章　关系和函数

第 6 章　语言：有限状态机

第 7 章　关系：再次认识

第1章 计数基本原理

显而易见，学生在学习算术时是从数数(或者计数)开始的。只不过好像很少有学生更深入地学习计数的有关理论，而是转而投向“更难的”数学领域，例如代数、几何、三角以及微积分。因此，第1章将告诫读者：计数看似“简单”而实际上有其严肃性和困难性。

计数并不仅仅用于算术。它在诸如编码理论、概率与统计以及算法分析领域中也有着广泛的应用。以后的章节将给出这些应用的具体例子。

当进入这个迷人的数学领域时，我们将遇到许多叙述简单而解决起来有点“棘手”的问题。因此，需要学习和领会基本公式——但是不要过分地依赖这些公式。不去对每一个问题进行细致的分析，仅靠公式是几乎没有什么用处的。实际上，应该挑战自己去解决那些不寻常或者过去从没遇到过的问题。要经过自己的仔细分析，努力去寻找解决方案，不管这个方案是否与作者所提供的一致，这是因为对于给定的问题通常有多种不同的解决方法。

1.1 加法原理与乘法原理

对离散数学与组合数学的学习，首先从两个基本的计数原理开始：加法原理与乘法原理。这些原理的叙述和基本应用看起来相当简单。在解决更复杂的问题时，可以把问题分解成能利用基本计数原理解决的小问题。希望读者能掌握这种分解与合并的能力：先分解问题再把各部分解合并，以获得最终的答案。分析和解决大量各种各样的计数问题，并仔细记录所用到的原理是获得这种能力的有效途径。在本教材中将采用这种方法。

第一个计数原理可以叙述如下：

加法原理(Rule of Sum) 如果第一项任务有 m 种执行方式，第二项任务有 n 种执行方式，并且不能同时执行这两项任务，那么在这两项任务中完成一项共有 $m+n$ 种执行方式。

注意，我们说的特定出现(例如第一项任务)可以有 m 种出现方式，那么就假定这 m 种方式彼此是不同的，除非特别声明。在本教材中一直采用这种办法。

例 1.1 一所大学的图书馆有 40 本关于社会学的教材以及 50 本关于人类学的教材。利用加法原理，这所大学的某个学生可以从 40＋50＝90 本教材中选择一本，以更深入了解这两门学科中的一种。 ■

例 1.2 此原理可以推广到两个以上的任务，只要这些任务之间彼此不同时发生。例如，一位计算机系的教师有着关于 C++，Java 以及 Perl 的编程语言导引的教材，每种各有不同的七本，那么他可以从这 21 本教材中选择一本推荐给有兴趣学习第一门编程语言的学生。 ■

例 1.3 例 1.2 中的计算机系教师有两位同事。其中一位有三本关于算法分析的教材，另一位有五本这样的教材。如果用 n 来表示这位教师可以从同事们手中借出有关此主题不同教材的最大数目，则 $5 \leqslant n \leqslant 8$，这是因为两位同事手中的书可能有相同的。 ■

由下面的例子可以得到第二个计数原理。

例 1.4 为了做出工厂是否扩充的决定，经理指派她的 12 个职工组成两个委员会。委员会 A 由五个人组成，任务是调查这种扩充所能达到的所有可能的有利结果。另一个委员会 B 由七个人组成，将仔细检查这种扩充所能产生的所有不利影响。假设经理采取在下决定之前只和一个委员会成员谈话的方式，那么由加法原理，一共有 12 个人可供她选择。但是，为了做到没有偏袒，她将在做出决定以前，星期一与委员会 A 中的一个成员谈话，然后在星期二与委员会 B 中的一个成员谈话。利用下面的原理，将会发现她可以有 $5 \times 7 = 35$ 种方式选择这样的两个职工来谈话。 ■

乘法原理(Rule of Product) 如果一个过程可以分成第一阶段和第二阶段，若第一阶段有 m 种可能的结果，并且对于这些结果中的每一个，第二阶段都有 n 种可能的结果，则按指定的次序完成整个过程一共有 mn 种方式。

例 1.5 Central 大学的戏剧俱乐部准备一次春季演出。正在招聘男女主角，共有六位男士和八位女士前来面试。利用乘法原理，则导演可以有 $6 \times 8 = 48$ 种方式来分配两个主角。 ■

例 1.6 在此举例说明对乘法原理的另一种推广：考虑汽车牌照的制造，其中的符号由两个字母其后紧跟着四个数字组成。

a) 如果字母与数字都不允许重复，那么一共有 $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3\,276\,000$ 个不同的牌照。

b) 如果字母与数字都允许重复，那么一共有 $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6\,760\,000$ 个不同的牌照。

c) 如果类似于 b) 中允许重复，那么一共有多少个只含有元音字母(A，E，I，O，U)以及偶数数字的牌照(0 是一个偶数)？ ■

例 1.7 为了储存数据，计算机的主存储器中有着大量的电路，每个电路都可以存储一**位**(bit)——即**二进制数**(binary digit)0 和 1 中的任一个。这些存储电路被安排在称为(存储)单元的部分里。为了在计算机的主存储器中识别这些单元，每一个都被指定唯一的一个名字作为它的**地址**(address)。对于某些计算机，例如嵌入式微处理器(可以在汽车的点火系统中找到)，一个地址用 8 位的有序列表来表示，而每 8 位称为一个**字节**(byte)。利用乘法原理，一共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ 个这样的字节。因此，对于这些可以存储特定信息的单元来说，一共可以分配 256 个地址。

厨房中的用品，比如微波炉，也含有一个嵌入式微处理器。这些“小计算机”(例如可编程中断微处理器)包含成千上万个存储单元，并且用双字节的地址来标识这些单元在主存储器中的位置。这样的地址由两个连续的字节组成，也可以说是由 16 个连续位组成。因此一共有 $256 \times 256 = 2^8 \times 2^8 = 2^{16} = 65\,536$ 个可用地址来标识这些单元在主存储器中的位置。有些计算机使

用四个字节的地址系统。这些 32 位的结构目前用于 Pentium[①] 处理器中，其中一共有 $2^8\times2^8\times2^8\times2^8=2^{32}=4\ 294\ 967\ 296$ 个可用地址来标识这些单元在主存储器中的位置。当一个程序员使用 UltraSPARC[②] 或者 Itanium[③] 处理器时，那么他面对的就是具有八字节地址的存储单元。其中每个地址都由 $8\times8=64$ 位组成，并且对于这种结构一共有 $2^{64}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$ 个可用地址（当然，在实际中并不使用所有这些地址）。 ■

例 1.8 有时在求解问题的过程中，需要综合几种不同的计数原理。下面的例子将同时使用加法原理与乘法原理以获得最终的答案。

Foster 夫人在 AWL 公司经营着一个快餐店。店中的菜单如下：六种松饼、八种三明治以及五种饮料（热咖啡、热茶、冰茶、可乐和桔子汁）。AWL 公司的编辑 Dodd 女士派她的助理 Carl 去快餐店买午餐——或者是一个松饼和一杯热饮，或者是一个三明治和一杯冷饮。

利用乘法原理，Carl 可以有 $6\times2=12$ 种方式购买一个松饼和一杯热饮。再次使用乘法原理，她可以有 $8\times3=24$ 种方式购买一个三明治和一杯冷饮。因此由加法原理可知，Carl 一共有 $12+24=36$ 种方式来购买 Dodd 女士的午餐。 ■

1.2 排列

继续研究乘法原理的应用，现在转向**物品**（object，或者称为**对象**）的线性安排。当物品彼此不同时，这种安排常被称为**排列**（permutation）。我们将从一个典型例子开始，以建立处理线性安排的一些系统化方法。

例 1.9 在一个由 10 名学生组成的班级中，要挑选出五人坐成一行来照相。那么这样的线性安排有多少种可能情况？

这里的关键词是安排，指出了**顺序**（order）的重要性。如果 A，B，C，…，I，J 代表这 10 名学生，那么 BCEFI，CEFIB 以及 ABCFG 是三种不同的安排，尽管前两种安排包含着同样的五名学生。

为了回答这个问题，考虑以下的位置以及填补每个位置的所有可能的学生数目。填补一个位置就是完成整个过程的一个阶段。

10	×	9	×	8	×	7	×	6
第 1 个位置		第 2 个位置		第 3 个位置		第 4 个位置		第 5 个位置

在这一行中，10 名学生中的任何一个都可以占据第 1 个位置。因为不可能出现重复的情况，所以只能从剩下的 9 名学生中选择一名来填补第 2 个位置。按这种思路一直进行下去，第 5 个位置亦即最后一个位置只能从六名学生中挑选一个来填补。由此得到从 10 名学生中选择五名学生，一共有 30 240 种可能的安排。

如果从右到左填补所有位置，那么将会得到相同的答案——即 $6\times7\times8\times9\times10$。如果首先填补第 3 个位置，然后填补第 1 个位置，其次填补第 4 个位置，再次填补第 5 个位置，最后填补第 2 个位置，则答案是 $9\times6\times10\times8\times7$，还是同样的结果——30 240。 ■

① Pentium（奔腾）是英特尔（Intel）公司的一个注册商标。

② UltraSPARC 处理器由 Sun 微系统公司制造。

③ Itanium（TM）是英特尔公司的一个商标。

正如例 1.9 中所示，计数问题中常常出现连续正整数相乘的情况。因此，在处理这样的计数问题时，采用以下记号将大有益处。它有助于我们把答案表示成更简洁的形式。

定义 1.1 对于一个整数 $n\geqslant 0$，n 的**阶乘**(factorial)，记作 $n!$，定义为

$$0!=1,$$
$$n!=(n)(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)，\text{对于 } n\geqslant 1$$ ■

可以看到 $1!=1$，$2!=2$，$3!=6$，$4!=24$ 以及 $5!=120$。另外，对于每个 $n\geqslant 0$，都有 $(n+1)!=(n+1)(n!)$。

在介绍更深入的内容之前，先试着形象地考察一下 $n!$ 的增长有多么快。可以计算出 $10!=3\,628\,800$，这恰好是六个星期所对应的秒的总和。因此 $11!$ 将超过一年中秒的总和，$12!$ 将超过 12 年中秒的总和，而 $13!$ 将超过一个世纪中秒的总和。

如果采用阶乘记号，则例 1.9 中的答案可以表示成如下更简洁的形式：

$$10\times 9\times 8\times 7\times 6=10\times 9\times 8\times 7\times 6\times\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\frac{10!}{5!}$$

定义 1.2 对于给定的一组 n 个不同物品，这些物品的任意（线性）安排都称为这一组的一个**排列**(permutation)。 ■

首先看字母 a，b，c，一共有六种方式来安排或排列所有这三个字母：abc，acb，bac，bca，cab 和 cba。如果一次只把其中的两个排在一起，那么一共有六种 2 排列：ab，ba，ac，ca，bc 和 cb。

如果有 n 个不同物品，并且 r 是一个整数，其中 $1\leqslant r\leqslant n$，则由乘法原理可知，对于 n 个物品大小为 r 的排列数是：

$$\begin{aligned}P(n,r)&=\underset{\substack{\text{第 1 个}\\ \text{位置}}}{n}\times\underset{\substack{\text{第 2 个}\\ \text{位置}}}{(n-1)}\times\underset{\substack{\text{第 3 个}\\ \text{位置}}}{(n-2)}\times\cdots\times\underset{\substack{\text{第 } r \text{ 个}\\ \text{位置}}}{(n-r+1)}\\&=(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

对于 $r=0$，$P(n,0)=1=n!/(n-0)!$，所以 $P(n,r)=n!/(n-r)!$ 对于所有的 $0\leqslant r\leqslant n$ 都成立。例 1.9 就是此公式的一个例子，其中 $n=10$，$r=5$，并且 $P(10,5)=30\,240$。当把一组中的所有 n 个物品进行全排列时，有 $r=n$，所以 $P(n,n)=n!/0!=n!$。

注意，例如，如果 $n\geqslant 2$，那么 $P(n,2)=n!/(n-2)!=n(n-1)$。当 $n>3$ 时，则有 $P(n,n-3)=n!/[n-(n-3)]!=n!/3!=n(n-1)(n-2)\cdots(5)(4)$。

取自一组 n 个物品的大小为 r 的排列数是 $P(n,r)=n!/(n-r)!$，其中 $0\leqslant r\leqslant n$。（记住 $P(n,r)$ 计算的是（线性）排列，在其中物品是不允许重复的。）但是，如果允许重复，那么由乘法原理可知，一共有 n^r 种可能的可重复排列，其中 $r\geqslant 0$。

例 1.10 在英语单词 COMPUTER 中，字母的全排列数是 $8!$。如果只能使用其中的五个字母，则（大小为 5 的）排列数是 $P(8,5)=8!/(8-5)!=8!/3!=6720$。如果字母允许重复，那么由这 8 个字母组成的具有 12 字母序列一共有 $8^{12}\doteq 6.872\times 10^{10}$ 个。① ■

例 1.11 不同于例 1.10，在英语单词 BALL 中，这四个字母的全排列数是 12，而不是 $4!$

① 符号“≐”读作“约等于”。

(= 24)。原因是这里的四个字母不是彼此不同的。为了得到这 12 种排列，可以把它们列出来，如表 1.1(a)所示。

表 1.1

A	B	L	L	A	B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1
A	L	B	L	A	L_1	B	L_2	A	L_2	B	L_1
A	L	L	B	A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1	B
B	A	L	L	B	A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1
B	L	A	L	B	L_1	A	L_2	B	L_2	A	L_1
B	L	L	A	B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1	A
L	A	B	L	L_1	A	B	L_2	L_2	A	B	L_1
L	A	L	B	L_1	A	L_2	B	L_2	A	L_1	B
L	B	A	L	L_1	B	A	L_2	L_2	B	A	L_1
L	B	L	A	L_1	B	L_2	A	L_2	B	L_1	A
L	L	A	B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1	A	B
L	L	B	A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1	B	A
(a)				(b)							

如果把两个 L 区分成 L_1 和 L_2，那么就可以利用前面对于不同物品进行排列的思想；因为是四个不同的符号 B，A，L_1，L_2，所以一共有 4！=24 种排列，如表 1.1(b)所示。表 1.1 说明，对于每种不区分 L 的情况，都对应两种把 L 区分开的情况。因此

2×(字母 B，A，L，L 的排列数)=(符号 B，A，L_1，L_2的排列数)

由此可知英语单词 BALL 中四个字母的全排列数是 4!/2=12。 ■

例 1.12 利用例 1.11 中的思想，考虑英语单词 DATABASES 中的 9 个字母的全排列数。

每一种不区分 A 的情况，都对应着 3！=6 种把 A 区分开的情况。比如，若将 A 的所有下标都去掉，那么 $DA_1TA_2BA_3SES$，$DA_1TA_3BA_2SES$，$DA_2TA_1BA_3SES$，$DA_2TA_3BA_1SES$，$DA_3TA_1BA_2SES$ 和 $DA_3TA_2BA_1SES$ 都相当于同一个单词 DATABASES。此外，在认为两个 S 不同时，那么对于形如 $DA_1TA_2BA_3SES$ 的排列，它对应着一对排列 $DA_1TA_2BA_3S_1ES_2$ 和 $DA_1TA_2BA_3S_2ES_1$。因此

(2!)(3!)(英语单词 DATABASES 中所有字母的全排列数)

=(符号 D，A_1，T，A_2，B，A_3，S_1，E，S_2的全排列数)

所以英语单词 DATABASES 中的九个字母的全排列数是 9!/(2!3!)=30 240。 ■

在介绍可重复全排列的基本公式之前，应注意到在上面两个例子中，当我们面对新题型时，可以将其与前面的基本计数原理联系起来以解决问题。这种方法是数学上经常用到的，也常常出现在离散数学与组合数学的公式推导中。

在 n 个物品中，n_1 是第 1 种物品重复出现的次数，n_2 是第 2 种物品重复出现的次数，…，n_r 是第 r 种物品重复出现的次数，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则对于给定的这 n 个物品的(线性)全排列数是 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$。

例 1.13 MASSASAUGA 是一种北美洲所特产的棕白相间的毒蛇。MASSASAUGA 中所有字母的全排列一共有

$$\frac{10!}{4!3!1!1!1!}=25\ 200$$

种可能的排列结果。其中，若把四个 A 排在一起，则它的全排列数是

$$\frac{7!}{3!1!1!1!1!}=840$$

为了得到这个结果，可以将其转化为计算以下七个符号：AAAA(当作一个符号)，S，S，S，M，U，G 的全排列。 ■

例 1.14 在 xy 平面上，每次只允许向右(R)或者向上(U)走一个单位，确定从点(2，1)到点(7，4)的路径总数。图 1.1 中的粗线条为两条这样的路径。

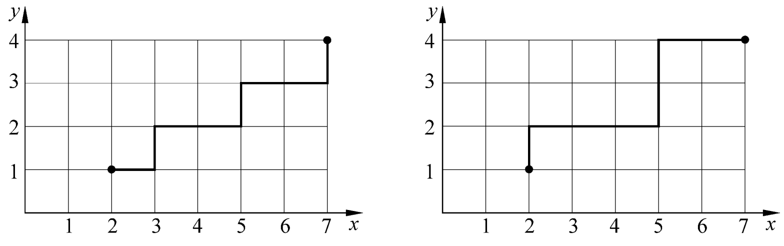

图 1.1

图 1.1 中每条路径的下面都列出了各个单步。例如，在图 1.1(a)中，R，U，R，R，U，R，R，U 代表从点(2，1)出发，首先向右移动一个单位[到点(3，1)]，然后向上移动一个单位[到点(3，2)]，接着向右移动两个单位[到点(5，2)]，依次类推，直到到达点(7，4)。路径由五个 R(代表向右的移动)以及三个 U(代表向上的移动)组成。

图 1.1(b)中的路径也是由五个 R 以及三个 U 组成。一般来说，从点(2，1)到点(7，4)的总行程，需要 7－2＝5 个向右的水平移动，以及 4－1＝3 个向上的垂直移动。因此，每一条路径都对应由五个 R 和三个 U 组成的一个序列，所以路径的总数就是五个 R 和三个 U 的全排列数，即 8!/(5!3!)＝56。 ■

例 1.15 现在举一个稍微抽象一点的例子：证明如果 n 和 k 都是正整数并且 $n=2k$，则 $n!/2^k$ 也是一个整数。因为我们的讨论是基于计数的，所以可以把它作为**组合证明**(combinatorial proof)的一个例子。

考虑 n 个符号 x_1，x_1，x_2，x_2，…，x_k，x_k。将这 $n=2k$ 个符号进行全排列就得到一个等式

$$\frac{n!}{\underbrace{2!2!\cdots2!}_{k个2!}}=\frac{n!}{2^k}$$

而等式的左边肯定是一个整数，从而得证。 ■

最后，我们要把目前所学到的知识推广到一种新的情况：排列不再是线性的。

例 1.16 有六个人，分别表示成 A，B，…，F，围坐到一个圆桌旁，问有多少种不同的圆排列？其中通过转圈得到的坐法视为相同的坐法。[在图 1.2 中，(a)和(b)中的排列认为是相同的，而(b)，(c)，(d)是三种不同的排列。]

我们将把这个问题与前面已经遇到的形式联系起来。考虑图 1.2(a)和(b)。从圆圈的顶部开始顺时针转，就可以列出两个不同的线性排列 ABEFCD 和 CDABEF，而实际上这两个是

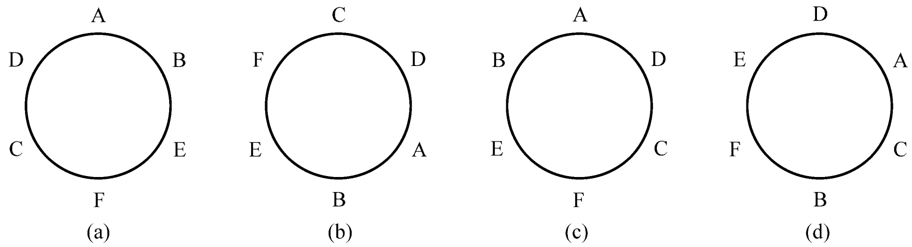

图 1.2

对应同一个圆排列的。除了这两个，另外的四个线性排列——BEFCDA，DABEFC，EFCDAB，和 FCDABE——也都是与(a)或(b)对应的同一个圆排列。既然每一个圆排列都对应着 6 个线性排列，所以有 6×(A，B，…，F 的圆排列数)＝(A，B，…，F 的线性全排列数)＝6!。

因此，A，B，…，F 围坐到圆桌旁，有 6!/6＝5!＝120 种不同的坐法。 ■

例 1.17 假定例 1.16 中的六个人是三对夫妇，其中 A，B，C 是女士。现在想把六个人安排到圆桌旁，使得男女交替坐(通过转圈得到的坐法仍然视为相同的坐法)。

在解决这个问题以前，换一种方法来求解例 1.16，这将有助于解决现在这个问题。如果把 A 安排在如图 1.3(a)所示的位置上，那么需要填补从 A 开始沿顺时针方向的五个位置。让 B，C，…，F 去填补这五个位置恰好是 B，C，…，F 在线性方式下的全排列问题，而这可以有 5!＝120 种方式。

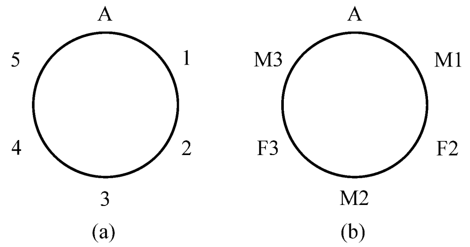

图 1.3

为了解决男女交替坐的新问题，考虑图 1.3(b)中所示的方法。A(一个女士)还是被安排在与前面相同的位置上。从 A 开始沿顺时针方向的下一个位置标记为 M1(男士 1)，这有 3 种填补方式。接着顺时针旋转，位置 F2(女士 2)可以有两种填补方式。按这种方式一直进行下去，并利用乘法原理，就可以有 3×2×2×1×1＝12 种方式来安排这六个人围坐在一起，而没有两位男士或者两位女士彼此相邻。 ■

练习 1.1 和 1.2

1. 在地方竞选活动中，8 名共和党人和 5 名民主党人被提名为地方教育董事会主席的候选人。
(a) 如果主席将是这些候选人之一，那么最后的胜出者会有多少种可能性？
(b) 在最后一次选举中是两个候选人(一个政党一位)进行竞争，那么一共有多少种可能性？
(c) 在(a)中用到哪种计数原理？在(b)中呢？

2. 回答例 1.6(c)。

3. 别克汽车有 4 种样式，12 种颜色，3 种发动机型号，以及 2 种传送装置。(a)一共可以制造多少种不同的别克车？(b)如果其中一种可用的颜色是蓝色，那么一共可以制造多少种不同的蓝色别克车？

4. 一个制药公司的董事会有 10 名成员。即将召开的股东大会计划要批准一个新的公司高级职员(从董事会成员中选取)的名单。
(a) 如果名单由一名总经理、一名副总经理、一名秘书以及一名出纳组成，那么董事会能提供给股东大会多少种不同的名单？
(b) 董事会中有 3 位医生。在以下条件下分别回答(a)中的问题：(i)总经理人选是 1 位医生；(ii)恰好有 1 位医生出现在名单上；(iii)至少有 1 位医生出现在名单上。

5. 在星期六购物的路上，Jennifer 和 Tiffany 亲眼目睹了两名男子从一个珠宝商店前面驾车逃离，而这时报警铃声开始响起。尽管一切来得太突然，

但是两个小姑娘在接受警察询问时还是能够提供有关逃跑车辆上车牌(其中的符号由两个字母其后紧跟着四个数字组成)的以下信息。Tiffany 确认车牌上的第二个字母不是 O 就是 Q,并且最后一个数字不是 3 就是 8。Jennifer 告诉警察车牌上的第一个字母不是 C 就是 G,并且第一个数字肯定是 7。那么警察一共需要检查多少种不同的车牌?

6. 为了筹钱建立新的市政游泳池,这个城市的商会主办了一次赛跑比赛。每位参加者需要缴纳 5 美元入场费,并且前 8 位完成比赛者将获得不同的奖品。

(a) 如果 30 人参加比赛,那么一共有多少种方式来赢得这些奖品?

(b) 如果 Roberta 和 Candice 是这场比赛的两位参加者,并且他们进入了前三名,那么一共有多少种方式来赢得这些奖品?

7. 一个"汉堡包店"打出广告说,顾客可以选择他的汉堡包任意加或者不加以下佐料的部分或者全部:番茄酱、芥末、蛋黄酱、生菜、番茄、洋葱、盐汁、干酪、蘑菇。那么一共可以有多少种不同的汉堡包?

8. Matthew 在一所规模较小的大学里从事计算机操作员的工作。一天晚上他发现当天有 12 个程序被提交上来需要进行批处理。那么在以下情况下 Matthew 各有多少种方式来安排这些程序处理的顺序?(a)没有限制;(b)他认为其中 4 个程序的优先级比其余 8 个程序的优先级高,从而先处理这 4 个程序;(c)他将这些程序分成三种优先级:4 个具有最高优先级、5 个具有较低优先级、3 个具有最低优先级,并且按照先处理最高优先级程序最后处理 3 个最低优先级程序的顺序。

9. Patter 的糕点店提供 8 种不同的酥皮点心和 6 种不同的松饼。除了销售糕点以外,还供应以下的小杯、中杯、大杯饮料:咖啡(包括黑咖啡、加奶油的、加糖的、加奶油和糖的)、茶(包括清茶、加奶油的、加糖的、加奶油和糖的、加柠檬的、加柠檬和糖的)、热可可饮料、桔子汁。当 Carol 来到 Patter 的糕点店时,各有多少种方式可以购买以下这些食品?

(a) 一块糕点和一个中杯饮料;

(b) 一块糕点和一杯咖啡,还要为她的老板 Didio 女士买一个松饼和一杯茶;

(c) 一块酥皮点心和一杯茶,还要为 Didio 女士买一个松饼和一杯桔子汁,为她的两位助手 Talbot 先生和 Gillis 夫人各买一块糕点和一杯咖啡。

10. Pamela 有 15 本不同的书。她把这些书放在两排书架上,使得每一排至少有一本书,一共有多少种方式?(这些书是一本接一本地竖着横排在一起,并且在每一排上的书都从最左边开始摆放。)

11. 有 3 个小城镇,记为 A,B,C,由一个双向公路系统彼此连接,如图 1.4 所示。

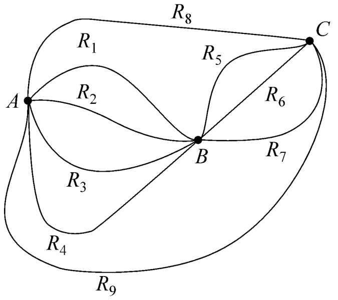

图 1.4

(a) Linda 一共有多少种方式可以从城镇 A 到城镇 C?

(b) Linda 一共有多少种方式可以从城镇 A 到城镇 C 再回到城镇 A?

(c) 在(b)的往返旅行中,一共有多少种方式使得返程路线(即从城镇 C 到城镇 A)与 Linda 从城镇 A 到城镇 C 的路线至少部分不同(例如,若 Linda 从城镇 A 到城镇 C 沿着公路 R_1 和 R_6,然后返程时她可以选择公路 R_6 和 R_3,或者公路 R_7 和 R_2,或者公路 R_9 等,但是不能沿着公路 R_6 和 R_1)?

12. 列出字母 a, c, t 的所有全排列。

13. (a) 8 个字母 a, c, f, g, i, t, w, x 有多少个全排列?

(b) 考虑(a)中的全排列。有多少个以字母 t 开头的?有多少个以字母 t 开头并以字母 c 结尾的?

14. 计算下面的每个值。

(a) $P(7, 2)$ (b) $P(8, 4)$

(c) $P(10, 7)$ (d) $P(12, 3)$

15. 符号 a, b, c, d, e, e, e, e, e 有多少种全排列使得 e 彼此不邻接?

16. 在一个通信系统中使用由 40 个符号组成的字母表来传输消息。如果消息(由符号组成的序列)中的符号可以重复,那么发送器可以发出多少个有 25 个符号的不同消息?如果符号允许重复,

并且 40 个符号中的 10 个只能出现在消息中的第 1 个位置或者最后一个位置，其余 30 个符号可以出现在任意位置，那么一共有多少个有 40 个符号的不同消息？

17. 在互联网中，每台计算机的网络接口都被赋予一个或多个互联网地址。这些互联网地址在本质上依赖于网络的规模。因为有着关于保留网络号的互联网标准(STD2)，所以每个地址都是一个 32 **位**(bit)的字符串，并且分为以下的三类：(1)A 类地址，用于规模最大的网络，以 0 开头其后紧跟着 7 位**网络号**(network number)，然后是 24 位**本地地址**(local address)。但是，禁止使用全 0 或全 1 的网络号以及全 0 或全 1 的本地地址。(2)B 类地址，用于中等规模的网络。这种地址由 2 位字符串 10 开头，其后紧跟着 14 位网络号，然后是 16 位本地地址。但是，禁止使用全 0 或全 1 的本地地址。(3)C 类地址，用于最小规模的网络。这种地址由 3 位字符串 110 开头，其后紧跟着 21 位网络号，然后是 8 位本地地址。再次禁止使用全 0 或全 1 的本地地址。按照这种网络标准，各类分别有多少个在互联网上可用的地址？

18. Morgan 正在考虑购买一台低档计算机。经过细致的市场调查以后，她发现有 7 种计算机(每种都由显示器、CPU、键盘、鼠标组成)满足她的需求。此外，她还计划购买 4 种调制解调器中的一种，3 种光驱中的一种以及 6 种打印机中的一种(这里给出的每种外围设备，例如调制解调器，都与所有这 7 种计算机兼容)。那么 Morgan 可有多少种方式来购买一台低档计算机？

19. 一位计算机科学系教授的书架上有 7 本不同的编程书籍。其中 3 本介绍 C++，其余 4 本介绍 Java。那么在下列情况下，教授分别有多少种方式可以把这些书放在书架上？(a)没有限制；(b)两种语言交替摆放；(c)关于 C++ 的所有书籍放在一起；(d)关于 C++ 的所有书籍放在一起并且关于 Java 的所有书籍放在一起。

20. 在互联网上，数据是以被称为**数据包**(datagram)的结构化位块形式进行传输的。

(a) DATAGRAM 中所有字母的全排列数是多少？

(b) 对于(a)中的全排列，其中有多少种使所有的三个 A 放在一起？

21. (a) SOCIOLOGICAL 中所有字母的全排列数是多少？

(b) 对于(a)中的全排列，其中有多少 A 和 G 放在一起？

(c) 对于(a)中的全排列，其中有多少所有元音字母放在一起？

22. 正整数 n 由数字 3，4，4，5，5，6，7 组成，如果要使得 n 大于 5 000 000，那么一共有多少个这样的正整数？

23. 有 12 个靶(形状相同)悬挂成 4 列，如图 1.5 所示。在第 1 列中有 4 个红色(R)靶，在第 2 列中有三个白色(W)靶，在第 3 列中有两个绿色(G)靶，在第 4 列中有三个蓝色(B)靶。为了加入学校集训队，Deborah 必须打中所有这 12 个靶(使用手枪并且只有 12 发子弹)，而且只能从每列的最下端开始打起。在这些条件下，Deborah 有多少种不同的方式来打中这 12 个目标？

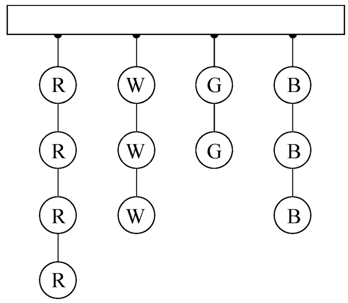

图 1.5

24. 证明对于所有整数 n，$r\geqslant 0$，如果 $n+1>r$，则：

$$P(n+1,r)=\left(\frac{n+1}{n+1-r}\right)P(n,r)$$

25. 分别确定 n 的值，使得以下每个等式成立：

(a) $P(n,2)=90$

(b) $P(n,3)=3P(n,2)$

(c) $2P(n,2)+50=P(2n,2)$

26. 在 xy 平面上，如果每次只允许向右(R)或者向上(U)走一个单位，那么从点(0，0)到点(7，7)一共有多少条不同的路径？从点(2，7)到点(9，14)一共有多少条这样的路径？从这两个结果可以总结出什么结论？

27. (a) 在欧几里德平面上，若每次移动只能按照下面的方式之一，那么从(−1，2，0)到(1，3，7)一共有多少条不同的路径？

(H)：$(x,y,z)\rightarrow(x+1,y,z)$

(V)：$(x,y,z)\rightarrow(x,y+1,z)$

(A)：$(x,y,z)\rightarrow(x,y,z+1)$