# 第 1 章 投资理论概述

## 1.1 组合投资理论

1952 年马柯维茨(Markowitz)提出的投资组合理论通常被认为是现代金融学的发端。马柯维茨在他的划时代论文《投资组合选择》(见参考文献[11])中假设投资者均为风险厌恶者,即理性投资者的目标在于:在风险给定的条件下,追求预期收益的最大化;而在收益给定的条件下,追求风险的最小化。若用 $\mu$ 代表投资组合的预期收益率,$\sigma$ 代表预期收益率的标准差(即投资组合的风险),马柯维茨断言,投资者的目标是追求$(\mu,\sigma)$空间中效用的最大化。给出了如何在众多的证券中建立起一个具有较高收益和较低风险的最佳证券组合。1958 年托宾证明了风险规避型投资者在$(\mu,\sigma)$空间中的无差异曲线必定具有一定曲率,且呈凸状。而在不存在无风险投资机会的条件下,投资有效界面(即马柯维茨有效边界)呈凹形。因此在$(\mu,\sigma)$空间中,投资者的无差异曲线与投资有效界面将有且仅有一个切点,该切点所代表的证券组合便是投资者的最优投资组合。由于最优投资组合的确定需要计算大量的证券收益率、方差和证券之间的协方差,且是一个二次规划,不适应于实际应用。因此,1963 年夏普(Sharpe)提出了简化形式的计算方法,即现在所称的单指数模型,这一简化形式,使组合投资理论在大量的证券经营中更实用了。在这个模型中,夏普把证券的风险分为系统性(不可分散)风险和非系统性(可分散)风险两部分。系统性风险就是市场风险,指证券价格的哪一部分变动是由于整个市场价格变动的影响造成的。它反映各种证券的价格对市场价格变化的敏感性或反应性的强弱。每种证券的系统风险是不同的,可用 $\beta$ 值(见后面章节)表示,说明证券价格受市场影响的程度。非系统风险是指价格的哪一部分变动是由具体证券本身特点造成的。而证券本身的特点是指发行单位的盈利能力、管理效率等因素的不稳定而产生的风险。单指数模型还指出,投资者因承担较大风险而获得较高收益,但收益只与系统风险相联系,与非系统风险无关。因此,投资者不可能因承担可分散风险而得到报酬。

## 1.2 资本资产定价模型

资本资产定价模型(capital asset pricing model,CAPM)以马柯维茨的投资组合理论为基础,完整地回答了在资本市场均衡时,证券收益的决定机制问题。为使用现代组合投资理论的投资者提供了:

(1) 组合投资风险与收益关系;

(2) 单个证券资产风险的度量;

(3) 单个证券资产风险与收益的关系。

这个模型的主要特点是一种证券资产的预期收益率可以用这种证券资产的风险的相对测度 $\beta$ 因子测定,在不存在套利机会下,则存在一种均衡,即如果证券的风险相同,则它们的预期收益率应该相同。该模型可以表述为

$$E(r_j) = r_f + \beta_j(E(r_m) - r_f)$$

其中,$E(r_j)$ 为证券 $j$ 的期望收益率;

$r_f$ 为无风险利率;

$\beta_j$ 为证券 $j$ 的系统风险系数;

$E(r_m)$ 为市场组合投资的期望收益率。

这个模型的主要框架为:首先运用马柯维茨均值—方差准则,投资者能够估计到所有证券组合中每一种证券的预期收益率、标准差和协方差。根据这些估计值,投资者就能推导出马柯维茨有效集合。然后给定无风险资产收益率,投资者就能识别出切点处证券组合和线性有效集合的位置。最后,投资者对切点处证券组合进行投资,并按无风险收益率进行借或贷,具体借或贷数量依赖于投资者对风险—收益的偏好。

资本资产定价模型由夏普于 1964 年、林特纳(Lintner)于 1965 年和莫森(Mossion)于 1966 年从不同角度独立发现的,是马柯维茨模型的具体运用,其简单直观的特点使之从诞生之日起就备受投资者的青睐,得到了广泛的应用。为了提高资本资产模型的实用性,20 世纪 70 年代上半期,经济学家们在简化最初构成模型的众多苛刻条件方面取得了巨大的进展。布莱克(Black)于 1972 年和布鲁南(Bulunan)于 1970 年简化了模型无税收和无风险利率不变的假设;莫顿(Merton)于 1973 年成功地将模型单周期的局限进行了拓展,建立了时标资产定价模型(ICAPM)。20 世纪 80 年代开始,一些金融经济学家应用心理学中有关人的行为建立了行为资本资产定价模型来解释金融投资中的一些异常

现象，如噪声交易、从众心理等。这些理论形成了现代金融投资理论中的行为学派，又称为“行为金融”。

## 1.3　套利定价理论

在一定的假设下，当资本市场达到均衡时，一方面，CAPM 给出了资产收益率的决定机制，但是由于难以得到真正的市场组合，致使 CAPM 不易被检验；另一方面，一些经验的结果如小公司现象：当以公司的规模为基础形成资产组合时，考虑到估计 $\beta$ 的差异后，小公司的年平均收益率比大公司的年平均收益率高出将近 20%，这种现象不能用 CAPM 解释。罗斯(Ross)于 1976 年提出了一个旨在替代 CAPM 的套利定价理论(arbitrage pricing theory，APT)。套利定价模型也是一个均衡资产定价模型，其不同于 CAPM 之处在于该模型并不要求投资者是风险规避者，即 APT 并不依据预期收益率和标准差来寻找最优投资组合，它更加强调资产收益率的生成结构，指出资产的收益率取决于一系列影响资产收益率的因素。而套利活动则能确保资本市场均衡的实现。其理论基础是一价定律，即两种风险—收益性质相同的资产不能按不同的价格出售。APT 模型一经提出，金融经济学家们便围绕 CAPM 模型与 APT 模型孰优孰劣的问题各执一端，争论不休。但对它的研究已成为金融投资当中的重要内容。

## 1.4　期权定价理论

期权是 20 世纪国际金融市场创新实践的一个成功典范。它的诞生对金融理论和实践带来了巨大的影响。1973 年，布莱克(Black)与舒尔茨(Scholes)的著名论文《期权定价与公司负债》及同年莫顿的论文《期权的理性定价理论》奠定了期权定价模型的理论基础，并推导出第一个完整精确的期权定价公式，即 Black-Scholes 模型，为金融财务学开创了一个崭新的领域。舒尔茨和莫顿因其在建立期权定价模型方面所做出的开拓性贡献被授予 1997 年诺贝尔经济学奖，布莱克虽然因为在 1995 年 8 月逝世而未能享此殊荣，但其英名也将永载经济学史册。至今，关于期权理论与应用的研究已成为金融学领域最活跃的分支之一。

期权，按照最一般的定义是在将来某一时刻按一定价格买卖某种资产的权利。而在

期权交易中,如何给买卖双方确定公平的期权费即期权定价,自然是一个非常重要的问题。期权定价模型(Black-Scholes)给出了依赖于标的资产的执行价格 $E$、现货价格 $S_0$、到期时间 $t$、波动率 $\sigma$ 和无风险利率 $r$ 的欧式看涨期权价格 $C_0$ 的定价公式:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ee^{-rt} N(d_2)$$

其中,$N(\cdot)$ 是标准正态分布函数;

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{E} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{E} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

上述公式建立在一系列严格基础之上,包括:

(1) 标的资产收益率服从正态分布;

(2) 标的资产可以自由买卖,且可以卖空;

(3) 标的资产到期前不支付红利;

(4) 投资者可以以无风险利率进行借贷;

(5) 没有税收、交易成本等额外费用;

(6) 标的资产价格具有连续性,服从几何布朗运动,其波动率的标准差为常数。

Black-Scholes 模型是现代金融理论的重大突破,但其只能用于欧式期权定价,而实际场内交易的期权美式比欧式多。科克斯(Cox)、罗斯和鲁宾斯坦(Rubinstern)于 1979 年提出了二叉树(二项式)期权定价模型,使得标准期权有了定价基础。以后许多专家学者都试图通过放松 Black-Scholes 模型假设来修正期权定价公式,在这一方面的尝试一直没有停止过。布莱克、舒尔茨和莫顿在期权方面的贡献远远超出了衍生工具定价的范畴,他们所提出的方法可以广泛运用于经济活动的各个方面,为资产定价在许多领域中的应用铺平了道路。

# 第 2 章　投资收益与风险的统计分析

## 2.1　均值与方差

我们研究的是未来一段时间投资某一证券的收益率，显然它是不确定的，它因受到许多因素的影响而随着有关条件和客观状态的变化而变化。因此，可以把收益率视为随机变量。作为随机变量，在不同的客观状态下，它将有不同的取值。如果能对客观状态发生的可能性即概率给予评估（例如通过对状态的分析，或通过主观概率试验法，或通过对历史数据的处理，建立模型，预测出各种状态可能发生的概率），那么，就可以通过随机变量的数学期望和方差描述出所持证券可能的预期收益率和收益率对预期收益率的可能偏离。

设收益率 $r$ 是随机变量，它的取值为 $r_1, r_2, \cdots, r_N$，相应的概率分布为 $p_1, p_2, \cdots, p_N$，即 $p_i = P(r = r_i), i = 1, 2, \cdots, N$，则

$$E(r) = \sum_{i=1}^{N} r_i p_i$$

称之为收益率的期望值，简称预期收益。

$$\sigma^2(r) = \sum_{i=1}^{N} (r_i - E(r))^2 p_i$$

称之为收益率的方差，有时也记为 $\sigma_r^2$。

$$\sigma(r) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (r_i - E(r))^2 p_i}$$

称之为收益率的均方差或标准差，也记为 $\sigma_r$。

均值和方差是随机变量的两个重要的数字特征。特别对某些具有确定概率分布形式只含有均值和方差两个未知参数的随机变量，只要能估计出参数的取值，随机变量的统计规律就能完全确定。

在现实世界中从事证券投资，很难得到收益率的概率分布，这时可以通过抽样得到收益率容量为 $N$ 的样本 $(r_1, r_2, \cdots, r_N)$，通过这个样本对随机变量的两个参数——均值

与方差进行估计。均值和方差的两个具有良好统计性质的估计量就是它们的样本均值 $\bar{r}$ 和样本方差 $\hat{\sigma}_r^2$，它们由下述公式给出。

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i , \hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_i - \bar{r})^2$$

预期收益率和方差为我们提供了关于单个证券收益率的概率分布性质方面的情况，然而它没有告诉我们有关证券收益率概率分布关联性质方面的情况。例如，当知道了一种证券的收益率，其他证券收益率会出现什么样的倾向？统计中的两种证券收益率之间的协方差可以用来描述两种证券收益率之间的相互关系。

设 $r_A$，$r_B$ 分别为 $A$，$B$ 两种证券的收益率，则称

$$\sigma_{r_A, r_B} = \mathrm{cov}(r_A, r_B) = E[(r_A - E(r_A))(r_B - E(r_B))]$$

为 $r_A$ 和 $r_B$ 的协方差。

协方差在理论上取值可以从负无穷到正无穷，我们可以把它除以相应的两种证券收益率的标准差，将它变为有界量，从而引进 $r_A$ 和 $r_B$ 的相关系数，记为 $\rho_{r_A, r_B}$，即

$$\rho_{r_A, r_B} = \frac{\mathrm{cov}(r_A, r_B)}{\sigma(r_A)\sigma(r_B)}$$

相关系数的值在 $-1 \sim 1$ 的范围内。显然

$$\mathrm{cov}(r_A, r_B) = \rho_{r_A, r_B}\sigma(r_A)\sigma(r_B)$$

并且 $|\rho_{r_A, r_B}| = 1$ 的充分必要条件是 $r_A$ 与 $r_B$ 存在线性关系 $r_A = a r_B + c$。

当 $\rho_{r_A, r_B} = 1$ 时，$a > 0$，称为 $r_A$ 与 $r_B$ 完全正相关，表示当受到相同因素变化的影响时，证券 $A$ 与证券 $B$ 的收益率发生相同方向、相应幅度的变化。

当 $\rho_{r_A, r_B} = -1$ 时，$a < 0$，称为 $r_A$ 与 $r_B$ 完全负相关，表示当受到相同因素变化的影响时，证券 $A$ 与证券 $B$ 的收益率发生方向相反、相应幅度的变化。

当 $\rho_{r_A, r_B} = 0$ 时，$a = 0$，称为 $r_A$ 与 $r_B$ 完全无关，或零相关，表示当受到相同因素变化的影响时，证券 $A$ 与证券 $B$ 的收益率的变化方向和变化幅度没有任何确定的关系。

同样，$\mathrm{cov}(r_A, r_B)$、$\rho_{r_A, r_B}$ 是理论值，在未知 $r_A$ 和 $r_B$ 的联合概率分布时，它们也是未知的。这时仍然可以通过抽取样本，用样本的协方差和样本之间的相关系数来估计 $r_A$ 和 $r_B$ 的关系。

设 $(r_{A_1}, r_{A_2}, \cdots, r_{A_N})$、$(r_{B_1}, r_{B_2}, \cdots, r_{B_N})$ 分别为 $r_A$ 和 $r_B$ 的样本，则 $r_A$ 和 $r_B$ 协方差 $\sigma_{r_A, r_B}$ 和相关系数 $\rho_{r_A, r_B}$ 具有良好统计性质的估计量分别为

$$\hat{\sigma}_{r_A, r_B} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_{Ai} - \bar{r}_A)(r_{Bi} - \bar{r}_B)$$

$$\hat{\rho}_{r_A,r_B}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_{Ai}-\bar{r}_A)(r_{Bi}-\bar{r}_B)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(r_{Ai}-\bar{r}_A)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(r_{Bi}-\bar{r}_B)^2}}$$

这里的相关系数告诉我们一种证券收益率的变化与另一种证券收益率的变化相关的比率。例如当 $\rho_{r_A,r_B}=0.91$ 时,则我们可以说证券 $A$ 的收益率变化的 $91\%$ 与证券 $B$ 的收益率变化有关。

## 2.2　市场投资组合、特征线

我们考虑经济体系中的所有风险资产。所谓市场投资组合,是指包含了这个体系中的每一个单个风险资产,以及它们的投资所占份额等于这种资产市场价值对所有风险资产总市场价值的比例。因此,市场投资组合与最终市场指数构成比例相同。

现在我们探讨存在于证券与市场投资组合之间的一种关系。设证券 $J$ 的收益率为 $r_J$,市场投资组合的收益率为 $r_M$,设 $(r_{Jt},r_{Mt})$ 是 $(r_J,r_M)$ 的样本观测值,$t=1,2,\cdots,N$,样本观测值的散点如图 2-1 所示。

图 2-1　样本观测值的散点图

$(r_{Jt},r_{Mt})$ 分布在最佳拟合线 $\hat{\alpha}_J+\hat{\beta}_J r_M$ 附近,我们将这个最佳拟合线称为特征线。

特征线指出了证券 $J$ 的收益率与市场投资组合收益率之间的关系。记

$$\hat{r}_{Jt}=\hat{\alpha}_J+\hat{\beta}_J r_{Mt}$$

$\hat{r}_{Jt}$ 估计 $r_{Jt}$ 的误差(又称残差)为

$$\varepsilon_{Jt}=r_{Jt}-\hat{r}_{Jt}=r_{Jt}-(\hat{\alpha}_J+\hat{\beta}_J r_{Mt})$$

可用残差平方和 $\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_{Jt}^{2}$ 的大小去评价特征线的优劣。

显然,不同的 $\hat{\alpha}_J,\hat{\beta}_J$ 将给出不同的直线,而使

$$L(\alpha_J,\beta_J)=\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_{Jt}^{2}=\sum_{t=1}^{N}(r_{Jt}-\alpha_J-\beta_J r_{Mt})^2$$

达到最小的 $\hat{\alpha}_J,\hat{\beta}_J$ 给出的直线,则为样本的最佳拟合线,即特征线。于是利用最小二乘法,可以得到 $\alpha_J,\beta_J$ 的最小二乘估计

$$\hat{\alpha}_J=\bar{r}_J-\hat{\beta}_J\bar{r}_M$$

$$\hat{\beta}_J=\frac{\sum_{t=1}^{N}(r_{Jt}-\bar{r}_J)(r_{Mt}-\bar{r}_M)}{\sum_{t=1}^{N}(r_{Mt}-\bar{r}_M)^2}=\frac{\sum_{t=1}^{N}r_{Jt}r_{Mt}-N\bar{r}_J\bar{r}_M}{\sum_{t=1}^{N}r_{Mt}^2-N\bar{r}_M^2}$$

其中,$\bar{r}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}r_{Jt}$;

$\bar{r}_M=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}r_{Mt}$。

特征线的斜率 $\hat{\beta}_J$,又称为证券 $J$ 的 $\beta$ 因子估计值,它是证券对市场所产生的收益率变化反应程度的一种指示器,表明如果知道下个时期市场投资组合收益率将提高 1%,那么可以预期证券 $J$ 的收益率将增加 $\hat{\beta}_J$%。特征线的截距 $\hat{\alpha}_J$ 对特征线起控制作用,表明在任一给定的时期,当市场投资组合的收益恰好为零时,预期证券 $J$ 的收益率,见图 2-1 所示。

显然,特征线斜率 $\hat{\beta}_J$ 恰好是

$$\hat{\beta}_J=\frac{\operatorname{cov}(r_J,r_M)}{\sigma^2(r_M)}$$

的样本估计。所以,称 $\hat{\beta}_J$ 为证券 $J$ 的 $\beta$ 因子。

证券 $J$ 与市场投资组合之间关系的另一方面是证券 $J$ 的收益率偏离特征线的倾向。统计上用残差的方差($\sigma_\varepsilon^2$)描述这个倾向。在最小二乘估计 $\hat{\alpha}_J,\hat{\beta}_J$ 之下,$\sigma_\varepsilon^2$ 在统计上具有良好性质的估计量 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$,即

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{1}{N-2}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_{Jt}^{2}=\frac{1}{N-2}\sum_{t=1}^{N}(r_{Jt}-\hat{\alpha}_J-\hat{\beta}_J r_{Mt})^2$$

综上所述,证券的方差描述证券收益率偏离预期收益率值的倾向,而残差方差则描述证券收益率偏离特征线的倾向。

显然，证券的收益率与市场收益率完全相关时，残差方差等于零。

## 2.3　$\beta$ 因子

2.2 节定义了证券 $J$ 关于市场投资组合的 $\beta$ 因子

$$\beta_J = \frac{\operatorname{cov}(r_J, r_M)}{\sigma^2(r_M)}$$

其中，$\sigma^2(r_M)$ 表示市场组合投资收益率的方差；

$\operatorname{cov}(r_J, r_M)$ 表示证券 $J$ 的收益率 $r_J$ 与市场投资组合收益率 $r_M$ 的协方差。

方差反映了收益率对其预期收益率的离散程度，因此可以用方差来度量风险。于是，$\sigma^2(r_M)$ 代表了市场投资组合的总风险水平，而 $\operatorname{cov}(r_J, r_M) = \rho_{r_J, r_M}\sigma(r_J)\sigma(r_M)$ 代表了证券 $J$ 与市场投资组合关联的风险。因而 $\beta_J$ 可以理解为证券 $J$ 的市场风险占整个市场总风险的份额。因此如果 $\beta_J > 1$，说明证券 $J$ 的风险程度要大于市场一般风险水平；而 $\beta_J < 1$，说明证券 $J$ 的风险程度要小于市场一般风险。所以 $\beta$ 因子是市场灵敏度指标之一，度量了给定证券 $J$ 相对于市场投资组合的相对变异性。

显然

$$\beta_J = \frac{\operatorname{cov}(r_J, r_M)}{\sigma^2(r_M)} = \frac{\rho_{r_J, r_M}\sigma_{r_J}\sigma_{r_M}}{\sigma^2_{r_M}} = \rho_{r_J, r_M}\left(\frac{\sigma_{r_J}}{\sigma_{r_M}}\right)$$

即证券 $J$ 的 $\beta$ 因子取决于它的收益率与市场投资组合收益率的相关程度以及它自己收益率的标准差和市场投资组合收益率的标准差。

# 第 3 章　投资组合理论

投资者总是希望在证券持有期间获得尽可能高的收益而承担尽可能小的风险。然而随着收益的增加，证券的风险也随之增加。如何在控制一定风险下，使证券投资获取尽可能高的收益，或者在一定收益的条件下，使证券投资的风险尽可能小？明智的方法是把资金分散投资在若干种证券上，构成一个投资组合。如何选择一个证券投资组合，使得在一定风险下获得尽可能高的收益，或在一定收益下承担尽可能小的风险，这正是始于 1952 年马柯维茨组合投资理论要研究的内容。

## 3.1　投资组合的收益与风险

所谓证券投资组合（证券组合或投资组合）是指将全部投入资金按某种比例分散投资于两种或两种以上证券而构成的一个组合。假设证券组合 $X$ 是由 $n$ 种不同证券构成，其中第 $i$ 种证券上投资的资金比例为 $x_i$，$i=1,\cdots,n$，简称第 $i$ 种证券的投资权重。则证券组合可记为如下的形式

$$X = \left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$

在证券组合 $X$ 中，权重 $x_i>0$ 时表示买入证券 $i$；$x_i<0$ 时表示卖出证券 $i$，将其所得资金投资于组合内其他证券；当 $x_i>1$ 时，表示投资在证券 $i$ 上的资金有卖空其他证券收入的资金。

设证券 $i$ 的收益率为 $r_i$，其概率分布为

$$p_j = P\{r_i = r_{ij}\} \quad (j = 1,2,\cdots,N,\quad i = 1,2,\cdots,n)$$

则证券 $i$ 的预期收益率（期望收益率）为

$$E(r_i) = \sum_{j=1}^{N} r_{ij} p_j,\quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

证券 $i$ 的收益率的方差为

$$\sigma_i^2 = D(r_i) = E[r_i - E(r_i)]^2 = \sum_{j=1}^{N} [r_{ij} - E(r_i)]^2 p_j$$