# 线性方程组

# 第1章



## 1.1 关于线性方程组的一般概念

### 一、内容提要

本节介绍关于线性方程组的一些基本概念，并通过一些例题让读者看到线性方程组的解的三种情形：无解，唯一解，无穷多解.

(1) 通过例题说明线性方程组的解的情况.

(2) 关于线性方程组的一般概念.

包含 $n$ 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一般线性方程组可以表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中系数 $a_{ij}$ 的第一个下标 $i(i=1,2,\cdots,s)$ 表示它是第 $i$ 个方程中的**系数**，第二个下标 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示它是 $x_j$ 的系数；$b_i$ 的下标 $i(i=1,2,\cdots,s)$ 表示它是第 $i$ 个方程的**常数项**. 因为线性方程组(1.1)包含 $n$ 个未知量，所以称为 ***n* 元线性方程组**.

线性方程组(1.1)的一个**解**是指由 $n$ 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 组成的有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后，方程组(1.1)中每个等式都成为恒等式. 线性方程组的解的全体称为它的**解集合**. 如果两个线性方程组有相同的解集合，就称它们是**同解**的.

本章的主要内容就是讨论如何应用消元法来判断一个线

性方程组是否有解？有多少个解？在有解时如何求出全部解？

## 二、习题与解答

### 习题 1.1

1. 解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=6, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2-x_3=-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=2, \\ x_1+3x_2-4x_3=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=2. \end{cases}$

2. (1) 设 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,求解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2; \end{cases}$$

(2) 用(1)中公式,解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=3, \\ 2x_1+3x_2=5. \end{cases}$$

### 解答

1. 用消元法求解.

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=6, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2-x_3=-1. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2+2x_3=6, \\ x_1-x_2-x_3=-1. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ -3x_2=0, \\ -3x_2-2x_3=-4. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_2=0, \\ x_3=2. \end{cases}$

所以原方程组有唯一解,解为(1,0,2).

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=2, \\ x_1+3x_2-4x_3=1. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1, \\ -x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3=0. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1, \\ x_2-x_3=0, \\ 0=0. \end{cases}$

因此，

$$\begin{cases} x_2=x_3, \\ x_1=1+x_3 \end{cases}$$

有无穷多解.解为

$$\begin{cases} x_1=1+k, \\ x_2=k, \\ x_3=k, \end{cases} \qquad \text{其中 } k \text{ 为任意数.}$$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=2. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ -x_2-5x_3=4, \\ -x_2-5x_3=2. \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_2+5x_3=-4, \\ 0=-2. \end{cases}$

从最后一个方程可看出原线性方程组无解.

2.(1) 因为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,所以 $a_{11}$,$a_{21}$不能全等于 0,不妨设 $a_{11}\neq 0$.于是,第 2 个方程加上第 1 个方程的 $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ 倍,原方程组化为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ \left(a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2=b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1. \end{cases}$$

化简第 2 个方程得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

因为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，故可解得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

代入第 1 个方程，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{22}a_{21}}.$$

因此，这个线性方程组有唯一解，解为

$$\left(\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right).$$

(2) 因为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1\neq 0$，故可应用上题. 又因

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=4,$$
$$a_{11}b_2-a_{21}b_1=-1,$$

故由(1)中公式，知道这个线性方程组有唯一解，解为(4，−1).

## 1.2　线性方程组解的情况

### 一、内容提要

这一节介绍用初等变换将线性方程组化为同解的阶梯形方程组，从而判断其解的情况并在有解时求出全部解.

**1. 消元法及其理论根据**

**定义 1.1**　以下三种变换称为线性方程组的**初等变换**.

(1) 互换两个方程的位置；

(2) 用一个非零常数乘一个方程；

(3) 一个方程加上另一个方程的 $k$ 倍.

对线性方程组进行初等变换是为了把方程组化简. 由于未知量逐次减少，所以我们根据最后所得的线性方程组的形状，把它称为**阶梯形方程组**.

因为初等变换把线性方程组变成与它同解的线性方程组，所以我们可以用经过多次初等变换后所得的阶梯形方程组代替原方程组来讨论其解并求解.

**2. 阶梯形方程组的解的情况，以及在有解时求解的方法**

把阶梯形方程组中后面“0＝0”的方程(如果有的话)去掉，剩下的方程可能有以下三种情况：

(1) 最后一个方程是

$$0 = c \quad (\text{非零常数}),$$

此时方程组无解.

(2) 最后一个方程左边不等于 0,那么原方程组有解. 此时又可分成两种情形. 设阶梯形方程组有 $r$ 个系数不等于 0 的方程.

① 如果 $r=n$,则方程组有唯一解.

此时,阶梯形方程组可表示为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$. 由最后一个方程,得到 $x_n=\dfrac{d_n}{c_{nn}}$. 从倒数第二个方程开始,逐次回代,就可算出方程组的解.

② 如果 $r<n$,则方程组有无穷多解.

为了简单起见,设阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$,改写为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n, \end{cases}$$

由最后一个方程看到 $x_r$ 可以由 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表出,把它代入第 $r-1$ 个方程,将 $x_{r-1}$ 由 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表出,这样逐步回代,可将 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 通过 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表示出来:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + k_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + k_{1n}x_n, \\ x_2 = k_2 + k_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + k_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ x_r = k_r + k_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + k_{rn}x_n. \end{cases}$$

这组表达式称为原线性方程组的**一般解**,$x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为**自由未知量**.

从一般解可以得出原方程组的解集合为

$$\{(k_1+k_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+k_{1n}x_n, k_2+k_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+k_{2n}x_n, \cdots, k_r+ k_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+k_{rn}x_n, x_{r+1}, \cdots, x_n) \mid x_{r+1}, \cdots, x_n \text{ 为任意数}\}$$

读者可以通过具体例子(例如主教材中例 1.6)来体会一下这个解集合表示的意思.

## 二、习题与解答

### 习题 1.2

1. 用消元法解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=-2, \\ 3x_1-x_2-x_3=3, \\ 4x_1-x_2+x_3=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=5, \\ 2x_1+x_2-4x_3=6, \\ x_1+2x_2-5x_3=4. \end{cases}$

2. 求 $k$ 使线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3-3x_4=1, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-11x_2+7x_3-13x_4=k \end{cases}$$

有解,并在有解时求解.

**解答**

1. (1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=-2, \\ 3x_1-x_2-x_3=3, \\ 4x_1-x_2+x_3=2 \end{cases}$

$$\to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ -3x_2+x_3=-4, \\ -4x_2-4x_3=0, \\ -5x_2-3x_3=-2 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_2+x_3=0, \\ -3x_2+x_3=-4, \\ -5x_2-3x_3=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_2+x_3=0,\\ 4x_3=-4,\\ 2x_3=-2\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_2+x_3=0,\\ x_3=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=1,\\ x_3=-1.\end{cases}$$

所以,这个线性方程组有唯一解,解为$(1,1,-1)$.

(2) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=2,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-2,\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=10\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=2,\\ -2x_4=-4,\\ 4x_4=8\end{cases}$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_4=2,\\ 0=0.\end{cases}$$

所以,这个方程组有无穷多解.一般解为

$$\begin{cases}x_1=2x_2-x_3,\\ x_4=2,\end{cases}\quad\text{其中 } x_2, x_3 \text{ 为自由未知量.}$$

解集合为

$$\{(2k-l,k,l,2)\mid k,l\text{ 为任意数}\}.$$

(3) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=5,\\ 2x_1+x_2-4x_3=6,\\ x_1+2x_2-5x_3=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=5,\\ -x_2+2x_3=-4,\\ x_2-2x_3=-1\end{cases}$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=5,\\ x_2-2x_3=4,\\ 0=-5.\end{cases}$$

所以原方程组无解.

2. 用消元法把原方程组化简.

$$\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3-3x_4=1,\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2,\\ 2x_1-11x_2+7x_3-13x_4=k\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3-3x_4=1,\\ 5x_2-3x_3+7x_4=-3,\\ -5x_2+3x_3-7x_4=k-2\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3-3x_4=1,\\ 5x_2-3x_3+7x_4=-3,\\ 0=k-5,\end{cases}$$

所以,当且仅当 $k-5=0$,即 $k=5$ 时,此方程组有解,且有无穷多解. 当 $k=5$ 时,再将最后一个方程组化简为

$$\begin{cases}5x_1 \qquad + x_3 + 6x_4 = -4, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -3,\end{cases}$$

因此,得一般解为

$$\begin{cases}x_1 = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{6}{5}x_4, \\ x_2 = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}x_3 - \dfrac{7}{5}x_4,\end{cases} \quad \text{其中 } x_3, x_4 \text{ 为自由未知量.}$$

解集合为

$$\left\{\left(-\frac{4}{5} - \frac{1}{5}k - \frac{6}{5}l, -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}k - \frac{7}{5}l, k, l\right) \middle| k, l \text{ 为任意数}\right\}.$$

# 1.3　线性方程组有解判别定理

## 一、内容提要

这一节应用矩阵来讨论线性方程组. 用矩阵的秩给出线性方程组有解判别定理,并用秩给出解的个数.

**1. 矩阵,矩阵的秩**

**定义 1.2**　由 $sn$ 个数排成的 $s$ 行 $n$ 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

称为一个 $s\times n$ **矩阵**. 在不致混淆的情况下,简称矩阵.

矩阵(1.2)中的数 $a_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵(1.2)的元素. $i$ 称为 $a_{ij}$ 的行标,说明 $a_{ij}$ 位于矩阵(1.2)中第 $i$ 行. $j$ 称为 $a_{ij}$ 的列标,说明 $a_{ij}$ 位于矩阵(1.2)中第 $j$ 列,$a_{ij}$ 也称为矩阵(1.2)的 $(i,j)$ 元.

通常用大写拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 或 $(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$ 来表示矩阵. 有时候为了表示 $\boldsymbol{A}$ 或 $(a_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵,常表示成 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$ 或 $(a_{ij})_{s\times n}$. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行、列数相同,即 $s=n$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $n$ 阶矩阵或 $n$ 阶方阵,简称**方阵**.

两个矩阵只有在它们的行、列数分别相等,并且对应的元素都相等时,才叫做**相等**. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times m}$ 是一个 $l\times m$ 矩阵,那

么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 就是说 $s=l,n=m$，并且 $a_{ij}=b_{ij}$ 对 $i=1,2,\cdots,s$；$j=1,2,\cdots,n$ 都成立，即相等的矩阵是完全一样的.

**定义 1.3** 下列三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 互换矩阵两行的位置；

(2) 用一个非零常数乘矩阵的某一行；

(3) 矩阵中某一行加上另一行的 $k$ 倍.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$ 时，写成 $\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$，并称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**行等价**的.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 的任一非零行，其中第一个非零元称为这一行的**首非零元**. 若 $\boldsymbol{A}$ 的前 $r$ 行都不为零，其余行都等于 0，并且第 1 至第 $r$ 行的首非零元所在的列 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 满足

$$j_1<j_2<\cdots<j_r,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个**阶梯形矩阵**. 简称**梯阵**. 如果在阶梯形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，每个首非零元都等于1，并且每个首非零元所在列的其他元素都等于0，则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个**约化梯阵**.

任一个矩阵都可以经过一系列初等行变换变为阶梯形矩阵. 并可化为约化梯阵. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为梯阵. 所得的梯阵不是**唯一**的；而 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为约化梯阵. 所得的约化梯阵是唯一的.

**定义 1.4** 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为阶梯形矩阵后，阶梯形矩阵中非零行的个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

元素全等于 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\mathbf{0}$. 规定零矩阵的秩为 0，即 $\mathrm{r}(\mathbf{0})=0$.

**2. 线性变换的矩阵**

给出一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \tag{1.3}$$

把系数按原来的位置写成一个 $s\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

称为方程组(1.3)的系数矩阵. 若把常数项也添成一列，则得到一个 $s\times(n+1)$ 矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix},$$

称为方程组(1.3)的增广矩阵.

线性方程组(1.3)可以用它的增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 来表示. 对线性方程组(1.3)施行初等变换,相当于对增广矩阵的行施行相应的变换. 阶梯形矩阵对应的线性方程组是阶梯形方程组.

**3. 线性方程组有解判别定理与解的个数及算法**

**定理 1.1**(线性方程组有解判别定理)　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$$

有解的充分必要条件是它的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

与增广矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

有相同的秩.

**定理 1.2**　线性方程组(1.3)有解时,如果它的系数矩阵的秩 $r$ 等于未知量个数 $n$,则方程组(1.3)有唯一解; 如果 $r<n$,则方程组(1.3)有无穷多个解.

解的计算方法: 通过消元法把给定的线性方程组化为阶梯形方程组,用矩阵的秩判断线性方程组有没有解以及解的个数. 在线性方程组有解时求出唯一解或一般解及解集合,并且对自由未知量赋予合适的值通过一般解得到需要的解.