第3章

稳 定 性

对实际工程中的动态系统来讲，稳定性是最基本的要求。粗略地讲，这里所说的稳定性具有两个含义。一个是指在无外部信号激励的情况下，系统的状态能够从任意的初始点回到自身所固有的平衡状态的特性；而另一个含义是指在有界的外部信号激励下，系统的状态（或输出）响应能够停留在有界的范围内。对于线性系统来讲，这两个性能实际上是等价的，但是对于一般的非线性系统则不然，前者称为Lyapunov稳定，而后者则称为BIBO稳定。本章主要讨论有关的基本概念及稳定性判定理论。

3.1 BIBO稳定性

假设系统 H 由如下状态方程来描述：

$$H:\begin{cases}\dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u)\end{cases} \tag{3.1}$$

如图3.1所示，$x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是该系统的内部状态，u 和 y 分别是外部输入信号和输出信号。

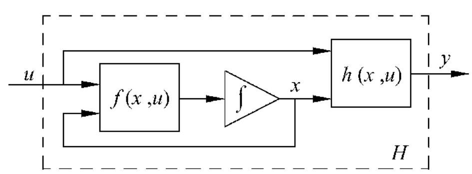

图 3.1　系统示意图

设输入信号u属于某一个可描述的函数空间U。那么,对于任意$u\in U$,系统H都有一个响应信号y与之对应,为了简单起见,记这种对应关系为

$$y=Hu \tag{3.2}$$

显然,系统H对应于$u\in U$的输出响应信号的全体同样地构成一个空间,记为Y。因此,从数学的意义上讲,系统H实际上是输入函数空间U到输出函数空间Y的一个映射或算子。这就表明,可以用算子理论等数学工具,来研究工程系统的品质特性。

定义 3.1 设$u(t)$为关于时间$t\in[0,\infty)$的函数,则$u(t)$的截断(truncation) $u_{\mathrm{T}}(t)$的定义为

$$u_{\mathrm{T}}(t)=\begin{cases}u(t), & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & t>T\end{cases} \tag{3.3}$$

定义 3.2 若算子H满足

$$(Hu)_{\mathrm{T}}=(Hu_{\mathrm{T}})_{\mathrm{T}} \tag{3.4}$$

则称H是因果的。上式称为因果律。

因果算子的工程意义很明确,即T时刻的输入$u(t)(t>T)$并不影响T时刻以前的输出响应$(Hu)_{\mathrm{T}}$。例如,设两个给定的算子H_1和H_2,对于零激励$u(t)=0$,其输出均为零;而对非零激励$u(t)$,响应分别如图3.2所示。

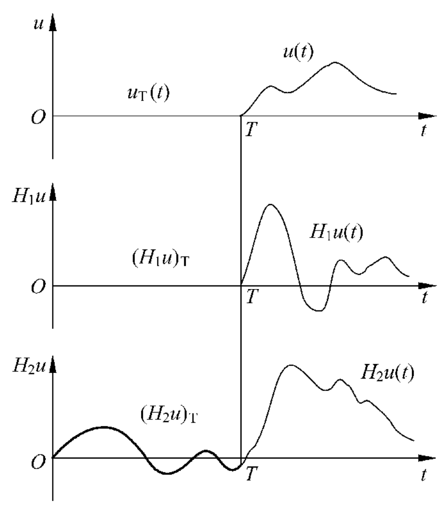

图 3.2 因果算子的物理意义

取T如图3.2所示,则$u_{\mathrm{T}}(t)=0$,且$(H_1u)_{\mathrm{T}}=0$,$(H_2u)_{\mathrm{T}}\neq 0$。

显然,H_2不满足因果律,图中粗实线所表示的$(H_2u)_{\mathrm{T}}$即是T时刻以前的输入所对应的响应。

定义 3.3 设算子 H 满足 $(Hu)_T \in L_p$，$\forall u_T \in L_p$。若存在常数 $\gamma \geqslant 0$ 和 $b > 0$，使得 $\forall T \in [0,\infty)$，不等式

$$\|(Hu)_T\| \leqslant \gamma \|u_T\| + b, \quad \forall u \in L_p \tag{3.5}$$

成立，则称算子 H 是 L- 稳定的。其中 $\|\cdot\|$ 表示函数空间的 L_p 范数。

定理 3.1 若算子 H 满足因果律，且是 L- 稳定的，则对任意 $u \in L_p$，有 $Hu \in L_p$ 且

$$\|Hu\| \leqslant \gamma \|u\| + b \tag{3.6}$$

证明 在式(3.5) 中令 $T \to \infty$，并根据 H 的因果律即可得证。

〈证毕〉

定义 3.4 对于算子 H：$L_\infty \to L_\infty$，若存在两个常数 $\gamma \geqslant 0$ 和 $b > 0$，使得

$$\|Hu\| \leqslant \gamma \|u\| + b, \quad \forall u \in L_\infty \tag{3.7}$$

成立，则称算子 H 是 BIBO 稳定的。

显然，BIBO 稳定意味着任何一个有界输入的激励响应都是有界的。由于范数的等价性，表征 BIBO 稳定的不等式(3.7) 并不局限于 L_∞ 空间或 ∞- 范数。实际上，只要输入信号在某种范数意义下有界时，输出信号也在同一范数意义下是有界的，则可称该系统是 BIBO 稳定。

考察线性系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

其中，$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbf{R}^n$，$C^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，而 $x \in \mathbf{R}^n$，$u \in \mathbf{R}$，$y \in \mathbf{R}$ 分别表示系统的状态、输入和输出，$x_0 = x(0)$ 表示初始状态。

定理 3.2 若 $\mathrm{In}(A) = (0,n,0)$，则系统(3.8) 是 BIBO 稳定的。

证明 系统(3.8) 的输出响应可以表示为

$$y(t) = C\mathrm{e}^{At}x_0 + \int_0^t C\mathrm{e}^{A(t-s)}Bu(s)\,\mathrm{d}s \tag{3.9}$$

由于 $\mathrm{In}(A) = (0,n,0)$，故存在两个正常数 M 和 α，使得

$$\|\mathrm{e}^{A\tau}\| < M\mathrm{e}^{-\alpha\tau}, \quad \forall \tau > 0 \tag{3.10}$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示矩阵的范数。因此，由式(3.9) 可知

$$\begin{aligned} \|y\| &\leqslant \|C\mathrm{e}^{At}x_0\| + \left\|\int_0^t C\mathrm{e}^{A(t-s)}Bu(s)\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \|C\| \cdot \|x_0\| M\mathrm{e}^{-\alpha t} + \int_0^t \|C\| \cdot \|B\| \cdot \|u\| M\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.11}$$

上式中 $\|y\|$ 和 $\|u\|$ 分别表示 y 和 u 的 L_2 范数，其余均表示矩阵或向量的 L_2 诱导范数。

令 $b = M\|C\| \cdot \|x_0\|$，$\gamma = \alpha^{-1}M\|C\| \cdot \|B\|$，则有

$$\|y\| \leqslant \gamma \|u\| + b \tag{3.12}$$

即，线性系统(3.8)是BIBO稳定的。

〈证毕〉

综上所述，如果系统是BIBO稳定的，那么在有界的输入激励下，系统的输出响应能够保持有界。但是，这里并未涉及系统的内部状态变量 x 的有界性。显然，若系统输出有界当且仅当内部状态有界，那么，BIBO稳定性同样能保证内部状态的有界性。但是对于一般的情况，这个结论并不成立。关于内部稳定性与BIBO稳定性，将在后续章节中陆续深入讨论。

3.2 小增益定理

系统的增益是用来描述在由输入到输出的信号传递过程中，系统对信号的强度放大或缩小的一种度量。

如3.1节所述，如果一个系统 H 可以看做是输入信号空间 U 到输出信号空间 Y 的一个算子，且该算子是BIBO稳定的，那么满足式(3.6)的最小 $\gamma > 0$ 就可以作为描述系统增益的一个度量。如果 U 和 Y 是赋范的，且用其范数来表示信号的强度，那么使式(3.6)成立的 γ 的最小值即描述了输入与输出信号的强度比的下确界，即

$$\sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Hu\|}{\|u\|} \leqslant \gamma + b \frac{1}{\|u\|} \tag{3.13}$$

在算子理论中，算子的范数可以用原象空间 U 和象空间 Y 的范数定义如下：

$$\|H\| = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Hu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| = 1} \|Hu\| \tag{3.14}$$

上式左端 $\|H\|$ 表示算子范数。这种由信号空间 U 和 Y 引申出来的范数称为算子 H 的诱导范数。

因此，在控制工程中，普遍采用上述算子的范数来定义系统增益。

下面用系统增益来讨论BIBO稳定性。

考察如图3.3所示的系统。该系统是由两个子系统 H_1 和 H_2 反馈联接构成的。根据关系式

$$y_1 = H_1 e_1, \quad e_1 = u_1 - y_2$$
$$y_2 = H_2 e_2, \quad e_2 = u_2 + y_1$$

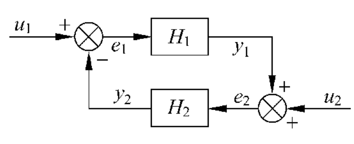

图 3.3　反馈控制系统

不难验证，有

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= u_1 - H_2 e_2 \\ e_2 &= u_2 + H_1 e_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

令 e_1 和 e_2 为该反馈系统的输出，u_1 和 u_2 为输入，则根据定义可知，如果存在正

数 γ 和 b,使得

$$\left\|\begin{bmatrix}e_1\\e_2\end{bmatrix}\right\|\leqslant\gamma\left\|\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right\|+b \tag{3.16}$$

对任意 $u_1\in L_p$,$u_2\in L_p$ 成立,那么该系统就是 BIBO 稳定的。

定理 3.3(小增益定理) 考察如图 3.3 所示系统。H_1,H_2 满足因果律,如果存在正数 γ_1,γ_2,以及 b_1,b_2,使得

$$\left.\begin{aligned}\|H_1e_1\|&\leqslant\gamma_1\|e_1\|+b_1\\\|H_2e_2\|&\leqslant\gamma_2\|e_2\|+b_2\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

对任意 $e_1,e_2\in L_p$ 成立,且 $\gamma_1\gamma_2<1$,则对任意 $T\in[0,\infty)$,$(u_{1T},u_{2T})\in L_p$,有

$$\left.\begin{aligned}\|e_{1T}\|&\leqslant\frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}(\|u_{1T}\|+\gamma_2\|u_{2T}\|+b_2+\gamma_2b_1)\\\|e_{2T}\|&\leqslant\frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}(\|u_{2T}\|+\gamma_1\|u_{1T}\|+b_1+\gamma_1b_2)\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

且当 $u_1,u_2\in L_p$ 时,有 $e_1,e_2\in L_p$。

证明 由式(3.15),有

$$\left.\begin{aligned}e_{1T}&=u_{1T}-(H_2e_2)_T\\e_{2T}&=u_{2T}-(H_1e_1)_T\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

所以

$$\begin{cases}\|e_{1T}\|\leqslant\|u_{1T}\|+\|(H_2e_2)_T\|\\\|e_{2T}\|\leqslant\|u_{2T}\|+\|(H_1e_1)_T\|\end{cases}$$

从而,根据式(3.17)得

$$\begin{aligned}\|e_{1T}\|&\leqslant\|u_{1T}\|+\|(H_2e_2)_T\|\\&\leqslant\|u_{1T}\|+\gamma_2\|e_{2T}\|+b_2\\&\leqslant\|u_{1T}\|+\gamma_2(\|u_{2T}\|+\gamma_1\|e_{1T}\|+b_1)+b_2\\&=\gamma_1\gamma_2\|e_{1T}\|+(\|u_{1T}\|+\gamma_2\|u_{2T}\|+b_2+\gamma_2b_1)\end{aligned} \tag{3.20}$$

由于 $\gamma_1\gamma_2<1$,由上式得式(3.18)中关于 e_{1T} 的不等式。同理可证关于 e_{2T} 的不等式。

〈证毕〉

由式(3.17)不难证明,存在充分大的正数 γ 和 b 使得式(3.16)成立。因此,这个定理表明,只要前向通道和反馈通道的子系统 H_1 和 H_2 均为 L-稳定,且其增益 γ_1 和 γ_2 充分小($\gamma_1\gamma_2<1$),那么闭环系统就是 BIBO 稳定的。

以上只讨论了 e_1 和 e_2 为输出的情况。容易证明,如果以各子系统的输出 y_1 和 y_2 为全系统的输出,也可以得到相同的结论。

3.3 Lyapunov 稳定性

考察由微分方程

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{3.21}$$

描述的非线性系统。式中，$x \in \mathbf{R}^n$为状态变量，$t \in \mathbf{R}$ 为表示时间的参量。

根据微分方程理论可知，如果向量函数 $f(x,t)$ 在$\mathbf{R}^{n+1}$ 上的某一开域 D 内关于 t 连续，且在 D 中的任一有界闭集 B_D 内对 x 满足局部 Lipschitz 条件，即存在常数 $k_{B_D} > 0$，$\forall x_1, x_2 \in B_D \subset D$，使得

$$\| f(x_1,t) - f(x_2,t) \| \leqslant k_{B_D} \| x_1 - x_2 \| \tag{3.22}$$

那么，对于任意初始条件 $x(t_0) = x_0$，$(x_0, t_0) \in D$，系统(3.21) 的解 $x(t) = \phi(t;t_0, x_0)$ 在$[t_0, \infty)$ 上有定义且是连续的。

以下讨论中，除非特别声明，均假设系统满足上述解的存在性条件。

所谓系统(3.21) 的平衡点，是指满足

$$f(x^*, t) = 0 \tag{3.23}$$

的状态 x^*。不失一般性，以下假设系统(3.21) 的平衡点为 $x^* = 0$。并记式(3.21) 对应于初始条件 $x_0 = x(t_0)$ 的解为

$$x(t) = \phi(t;t_0, x_0) \tag{3.24}$$

显然，对于平衡点 $x^* = 0$，有 $\phi(t;t_0, 0) = 0$。

定义 3.5 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 及初始时刻 $t_0 \geqslant 0$，存在一个常数 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得对任意满足 $\| x_0 \| < \delta$ 的初始条件 x_0，方程(3.21) 的解 $\phi(t;t_0, x_0)$ 满足

$$\| \phi(t;t_0, x_0) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.25}$$

则称系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 是 Lyapunov 意义下稳定的，简称稳定。

定义 3.6 如果在上述定义中，$\delta = \delta(\varepsilon)$ 而与 t_0 无关，则称 $x^* = 0$ 是一致稳定的。

定义 3.7 如果系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 是稳定的，且有

$$\lim_{t \to \infty} \| \phi(t;t_0, x_0) \| = 0 \tag{3.26}$$

则称系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 渐近稳定。

稳定性及渐近稳定性的概念可以用标量系统(即 $x \in \mathbf{R}$) 示意如图 3.4 所示。所谓稳定性是指对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总能找到与 t_0 相关的函数 δ，使得初始条件满足

$$-\delta < x_0 < \delta$$

的轨迹 $x(t) = \phi(t;t_0, x_0)$ 停留在由 ε 界定的区域内。而一致稳定性则要求 δ 的值(图3.4(a) 中的细线段的长度) 不依赖于 t_0。渐近稳定性不仅要求 $\phi(t;t_0, x_0)$ 停留在上述区域内，同时还要求 $x(t)$ 最终趋于零，如图 3.4(b) 所示。

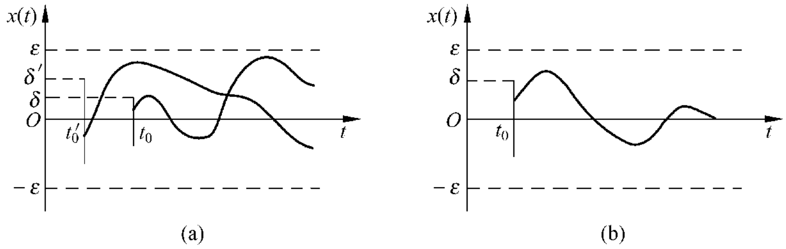

图 3.4 稳定性和渐近稳定性

定义 3.8 若存在一个含原点为内点的区域 S,使得 $\forall x_0 \in S$,均有 $x(t) = x(t,x_0,t_0) \in S$,且

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3.27}$$

则称 S 为系统(3.21) 的平 衡点 $x^* = 0$ 的吸引域。

定义 3.9 如果系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 是稳定的,且其吸引域为$\mathbf{R}^n$,则称系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 是全局稳定的。

定义 3.10 若系统(3.21) 在平衡点 $x^* = 0$ 是渐近稳定的,且存在正数 α 和 β,使得式

$$\| x(t) \| \leqslant \alpha \| x_0 \| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.28}$$

成立,则称系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 是指数稳定的。

如果式(3.28) 对任意 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 成立,则称系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 全局指数稳定。

3.4 Lyapunov 稳定定理

本节将讨论系统(3.21) 的平衡点 $x^* = 0$ 是稳定或渐近稳定的条件。首先介绍几类有助于描述时变系统动态行为的标量函数。

定义 3.11 设 a 是某一正数,若连续函数 $\alpha(r):[0,a) \to [0,\infty)$ 严格单调增加且 $\alpha(0) = 0$,则称 $\alpha(r)$ 是 $\mathcal{K}$ 函数。如果 $a = \infty$,且 $\lim_{r\to\infty}\alpha(r) = \infty$,则称 $\alpha(r)$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 函数。

定义 3.12 若连续函数 $\beta(r,s):[0,a) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 对每一个固定的 s 关于 r 是 $\mathcal{K}$ 函数,而对每一固定的 r 关于 s 是单调下降的,且有 $\lim_{s\to\infty}\beta(r,s) = 0$,则称 $\beta(r,s)$ 是 $\mathcal{KL}$ 函数。

设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是原点 $x^* = 0$ 的一个邻域,$J = [t_0,\infty)$,$t_0 \geqslant 0$ 是初始时刻,则有以下定义。

定义 3.13 如果函数 $W:U\to\mathbf{R}$ 满足

$$W(x)>0,\quad \forall\, x\neq 0 \tag{3.29}$$

且 $W(0)=0$,则称 $W(x)$ 是正定的。

定义 3.14 如果对函数 $V:U\times J\to\mathbf{R}$,存在一个正定函数 $W(x)$ 使得式

$$V(x,t)\geqslant W(x),\quad \forall\,(x,t)\in U\times J \tag{3.30}$$

成立,且 $V(0,T)\equiv 0$,则称 $V(x,t)$ 是正定的。如果有

$$V(x,t)\geqslant 0,\quad \forall\,(x,t)\in U\times J \tag{3.31}$$

且 $V(0,t)\equiv 0$,则称 $V(x,t)$ 是半正定的。

类似地,可定义负定、半负定函数。

定义 3.15 如果对函数 $V:U\times J\to\mathbf{R}$,存在一个正定函数 $W(x)$ 使得式

$$|V(x,t)|\leqslant W(x),\quad \forall\,(x,t)\in U\times J \tag{3.32}$$

成立,则称 $V(x,t)$ 具有定常正定界。

定义 3.16(Lyapunov 函数) 设 $V(x,t)$(V: $U\times J\to\mathbf{R}$)是连续可微的正定函数,若 V 沿微分方程(3.21)解的轨迹对 t 求导,其导数

$$\dot{V}(x,t)\,|_{(3.21)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(x,t) \tag{3.33}$$

半负定且连续,则称 $V(x,t)$ 是方程(3.21)关于平衡点 $x^*=0$ 的 Lyapunov 函数,其中

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

以下不加证明地引入两个引理,有兴趣的读者可参见文献[58]。

引理 3.1 函数 $V:U\times J\to\mathbf{R}$ 是正定的充分必要条件是存在 $\mathscr{K}$ 函数 $\alpha(\cdot)$ 使得式

$$V(x,t)\geqslant\alpha(\|x\|),\quad \forall\,(x,t)\in U\times J \tag{3.34}$$

成立。

引理 3.2 函数 V: $U\times J\to\mathbf{R}$ 具有定常正定界的充分必要条件是存在 $\mathscr{K}$ 函数 $\beta(\cdot)$ 使得式

$$|V(x,t)|\leqslant\beta(\|x\|),\quad \forall\,(x,t)\in U\times J \tag{3.35}$$

成立。

定理 3.4(Lyapunov 稳定定理) 对于系统(3.21),若存在 Lyapunov 函数 $V(x,t):U\times J\to\mathbf{R}$,则 $x^*=0$ 是该系统稳定的平衡点。

证明 设 $V(x,t)$ 是系统(3.21)所对应的 Lyapunov 函数,则由 $V(x,t)$ 的正定性及引理3.1可知,存在满足条件(3.34)的 $\mathscr{K}$ 函数 $\alpha(\cdot)$。又根据 $V(x,t)$ 的连续性,对于任意 $\varepsilon>0$,存在一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$,使得当 x_0 满足 $\|x_0\|<\delta$ 时,有

$$V(x_0,t_0)\leqslant\alpha(\varepsilon) \tag{3.36}$$

进一步，根据$\dot{V}(x,t)|_{(3.21)}$的半负定性，对任意$t>t_0$和满足$\|x_0\|<\delta$的x_0，有

$$V(\phi(t;t_0,x_0),t)\leqslant V(x_0,t_0)\leqslant\alpha(\varepsilon),\quad\forall t\geqslant t_0\tag{3.37}$$

其中，$x(t)=\phi(t;t_0,x_0)$是对应于初始条件$x(t_0)$的解。

综合式(3.34)和式(3.37)，得

$$\alpha(\|\phi(t;t_0,x_0)\|)\leqslant V(\phi(t;t_0,x_0),t)\leqslant\alpha(\varepsilon),\quad\forall t\geqslant t_0\tag{3.38}$$

由于$\alpha(\cdot)$是严格单调增加的函数，故得

$$\|x(t)\|=\|\phi(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon,\quad\forall t\geqslant t_0\tag{3.39}$$

即$x^*=0$是方程(3.21)的稳定平衡点。

〈证毕〉

为了讨论渐近稳定性的条件，首先来考察一阶的常微分方程

$$\dot{y}=-\mu(y),\quad y(t_0)=y_0\tag{3.40}$$

其中，$y\in\mathbf{R}$，$\mu(\cdot)$是在区间$[0,r)$上满足局部Lipschitz条件的$\mathscr{K}$函数。根据微分方程理论可知，对于任意初始状态$y_0=y(t_0)\in[0,r)$，方程(3.40)有惟一解，且可以表示为如下形式(详细证明参见文献[28])：

$$y(t)=\sigma(y_0,t-t_0)\tag{3.41}$$

式中，$\sigma(\cdot)$是定义在$[0,r)\times[0,\infty)$上的$\mathscr{KL}$函数。

定理3.5(Lyapunov渐近稳定定理) 对于给定的正数r，令

$$U=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,\|x\|\leqslant r\}\tag{3.42}$$

并记$J=[0,\infty)$。对于系统(3.21)，若存在Lyapunov函数$V:U\times J\to\mathbf{R}$和负定函数$W:U\to\mathbf{R}$，使得沿系统(3.21)的任意解轨迹，有

$$\dot{V}(x,t)\Big|_{(3.21)}\leqslant W(x)<0,\quad\forall t\geqslant t_0,\quad x\in U-\{0\}\tag{3.43}$$

且$V(\cdot)$具有定常正定解，则$x^*=0$是该系统的渐近稳定的平衡点。

证明 首先由定理3.4可知，$x^*=0$是稳定的平衡点，故只需证明$x^*=0$的吸引性。由题设条件及引理3.1和引理3.2可知，存在区间$[0,r)$上的$\mathscr{K}$函数$\alpha(\cdot)$，$\beta(\cdot)$及$\gamma(\cdot)$，使得式

$$\alpha(\|x\|)\leqslant V(x,t)\leqslant\beta(\|x\|),\quad\forall(x,t)\in U\times J\tag{3.44}$$

$$\dot{V}(x,t)\Big|_{(3.21)}\leqslant-\gamma(\|x\|),\quad\forall(x,t)\in U\times J\tag{3.45}$$

成立。

令$\mu(\cdot)=\gamma(\beta^{-1}(\cdot))$，其中$\beta^{-1}(\cdot)$表示$\beta(\cdot)$的逆函数。取正数$\rho(\rho<r)$，则$\mu(\cdot)$是定义在$[0,\alpha(\rho))$上的$\mathscr{K}$函数。因此，如前所述，对于任意$x_0=x(t_0)(\|x_0\|<\mu(\rho))$，定常一阶微分方程

$$\dot{y}=-\mu(y),\quad y(t_0)=V(x_0,t_0)\tag{3.46}$$

有惟一解，且可以表示为

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0) \tag{3.47}$$

其中,$\sigma(\cdot)$ 为 $\mathcal{KL}$ 函数。注意到 $\mu(y) = \gamma(\beta^{-1}(y))$,$\forall t \geqslant t_0$,且式(3.45)成立,故有

$$V(x,t) \leqslant y(t), \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.48}$$

即
$$V(x,t) \leqslant \sigma(V(x_0,t_0), t - t_0), \quad \forall V(x_0,t_0) \in [0, \alpha(\rho)] \tag{3.49}$$

综上所述,对任意初始状态 $x_0 \in \Omega_{t_0,\rho} = \{x \mid x \in U, V(x,t) \leqslant \alpha(\rho)\}$,系统(3.21)的解轨迹满足不等式

$$\begin{aligned} \| x(t) \| &\leqslant \alpha^{-1}(V(x,t)) \leqslant \alpha^{-1}(\sigma(V(x_0,t_0), t - t_0)) \\ &\leqslant \alpha^{-1}(\sigma(\beta(\| x_0 \|), t - t_0)) \end{aligned} \tag{3.50}$$

其中,$\alpha^{-1}(\sigma(\beta(\cdot), \cdot))$ 表示 $\alpha(\cdot)$ 的逆函数。令

$$\tilde{\sigma}(\| x_0 \|, t - t_0) = \alpha^{-1}(\sigma(\beta(\| x_0 \|), t - t_0)) \tag{3.51}$$

则容易验证 $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathcal{KL}$ 函数。从而根据定义 3.7,$x^* = 0$ 是渐近稳定的平衡点。

〈证毕〉

以上介绍的系统稳定与渐近稳定的结果实际上仅涉及系统平衡点附近的状态,即在微分方程的零平衡解的某一邻域内的稳定性状况。用于判断系统渐近稳定与否的定理3.5 并没有给出系统状态趋于平衡点时收敛速度的估计。下面讨论微分方程(3.21)的零解是指数稳定的充分条件。

定理 3.6 对系统(3.21),若 $V(x,t): U \times J \to \mathbf{R}$ 是系统的 Lyapunov 函数,且满足

(1) $r_1 \| x \|^2 \leqslant V(x,t) \leqslant r_2 \| x \|^2, \quad \forall (x,t) \in U \times J$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x,t) \leqslant -\mu \| x \|^2, \quad \forall (x,t) \in U \times J$;

其中,$r_1 > 0$,$r_2 > 0$,$\mu > 0$ 为给定常数,则零解 $x^* = 0$ 是指数稳定的。

证明 由题设条件

$$\frac{\mathrm{d}V(x,t)}{\mathrm{d}t} \leqslant -\frac{\mu}{r_2} V(x,t), \quad \forall (x,t) \in U \times J \tag{3.52}$$

即有
$$\frac{\dot{V}(x,t)}{V(x,t)} \leqslant -\frac{\mu}{r_2} \tag{3.53}$$

对任意初始条件 $(x_0, t_0) \in U \times J$,求上式两端从 t_0 到 t 的积分,得

$$\ln V[x(t), t] - \ln V[x(t_0), t_0] \leqslant -\frac{\mu}{r_2}(t - t_0) \tag{3.54}$$

因此,式

$$V(x,t) \leqslant V(x_0,t_0) \exp\left[-\frac{\mu}{r_2}(t - t_0)\right] \tag{3.55}$$

成立。再由题设条件,有

$$\| x(t) \|^2 \leqslant r_1^{-1} V(x_0,t_0) \exp\left[-\frac{\mu}{r_2}(t - t_0)\right]$$