第3章

正弦稳态电路分析

电路的电源信号随时间按正弦规律变化，称为正弦激励。所谓正弦稳态电路是指在正弦电源激励下电路各部分产生的电流电压均按正弦规律变化的电路。在生产和日常生活中所用的交流电一般都是指正弦稳态交流电。

本章着重讨论正弦稳态电路中理想元件电路的性质以及由 RLC 组成的正弦稳态电路的相量分析方法和正弦稳态电路功率等问题。本章在进行分析时，仍以基尔霍夫定律作为基本定律，但是正弦电路具有用直流电路的概念无法理解和无法分析的物理现象。因此，在学习本章的时候，必须建立相位的概念，否则容易引起错误。

本章所讨论的内容不论是对实际应用还是对理论分析都是十分重要的，读者务必很好地掌握，以求为学习交流电机、电器和电子技术打下理论基础。

3.1 正弦量的概念

所谓正弦交流电，一般指随时间按正弦规律周期性变化的电压、电流和电动势。它们简称为正弦量。用小写字母 u、i、e 表示。

3.1.1 正弦量的三要素

正弦量的特征表现在变化的快慢、最大值及初始位置三个方面，它们分别可以由角频率(周期)、幅值及初相位来描述。所以说角频率、幅值和初相位是确定正弦量的三要素。

正弦量可以用三角函数表示，即

$$\begin{aligned} i &= I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_{\mathrm{i}}) \\ u &= U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_{\mathrm{u}}) \\ E &= E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_{\mathrm{e}}) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

式中：U_{m}、I_{m}、E_{m} 称为正弦交流电的幅值或最大值；ω 称为角频率；Ψ_{i}、Ψ_{u}、Ψ_{e} 称为正弦交流电的初相位或初相角。

正弦量还可以用波形图来表示，如图 3.1.1 所示。除角频率、幅值和初相位三个要素外，还有其他参数与正弦量的快慢、大小及初始位置三个方面有关，下面分别讨论。

1. 周期(频率)与角频率

正弦量变化一次所需要的时间称为周期 T,如图 3.1.2 所示,单位为秒(s),每秒时间内重复变化的次数称为频率 f,单位为赫兹(Hz)。频率为周期的倒数,即

$$f = 1/T \tag{3.1.2}$$

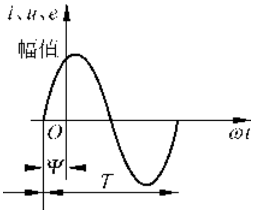


图 3.1.1　正弦量的波形图

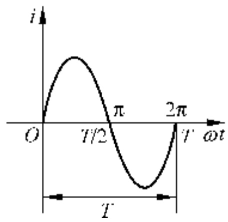


图 3.1.2　正弦量的周期 T 和角频率 ω

我国采用 50Hz 的频率作为交流电源的工业标准频率,称为工频。世界上许多国家的工业标准频率都是 50Hz,但也有些国家(如美国、日本等)是 60Hz。工业上除了广泛应用工频交流电以外,在其他技术领域里还采用各种不同的频率。如航空工业用的交流电是 400Hz,工业高频电炉用的频率可达 500kHz,无线电工程里的频率更高,可达 2.3～23MHz。

角频率 ω 是指正弦量每秒时间内变化的弧度,单位为弧度/秒(rad/s)。

T、f 和 ω 都能反映变化的快慢,三者的关系为

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \tag{3.1.3}$$

三者之间只要知道其中之一,其余均可求出。

例 3.1.1　已知 $f=50\text{Hz}$,试求出 T 和 ω。

解:

$$T = 1/f = 1/50 = 0.02\text{s}$$
$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 50 = 314\text{rad/s}$$

2. 瞬时值、幅值与有效值

正弦量在每一瞬间的数值称为瞬时值,用小写字母 u、i 和 e 表示。最大的瞬时值称为幅值或最大值,用下标 m 的大写字母 U_m、I_m 和 E_m 表示。

瞬时值是随时间变化的,不能用来表示正弦量的大小。最大值只是特定瞬间的数值,不能反映电压和电流做功的效果,所以也不用它表示正弦量的大小。正弦量的大小工程上规定用有效值来表示。

有效值是根据正弦电流和直流电流的热效应相等来规定的。例如,在图 3.1.3 所示的两个等值的电阻上,分别通以交流电流 i 和直流电流 I,如果在相同的时间 T 内所产生的热量(或消耗的电能)是相等的话,那么,把此时直流电流 I 的数值定义为此交流电流 i 的有效值。用大写字母 I 表示。同样 U、E 也分别表示为交流电压和交流电动势的有效值。根据上述定义,可推导出交流电有效值的计算公式如下:

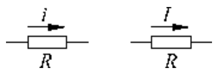


图 3.1.3　有效值的定义

$$\int_0^T Ri^2\mathrm{d}t = RI^2T$$

由此便得到交流电流的有效值的计算式：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t} \tag{3.1.4}$$

这就是说，交流电的有效值等于它的瞬时值的平方在一个周期内的平均值再开方。故有效值又称为均方根值。这一结论不仅适用于正弦交流电，而且也适用于任何周期性变化的交流电。

对于正弦电流，设其函数式为 $i=I_\mathrm{m}\sin\omega t$，代入式(3.1.4)，便得到正弦电流的有效值，即

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_\mathrm{m}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t}=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=0.707I_\mathrm{m} \tag{3.1.5}$$

同理，可得正弦电压和正弦电动势的有效值为

$$U=\frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=0.707U_\mathrm{m} \tag{3.1.6}$$

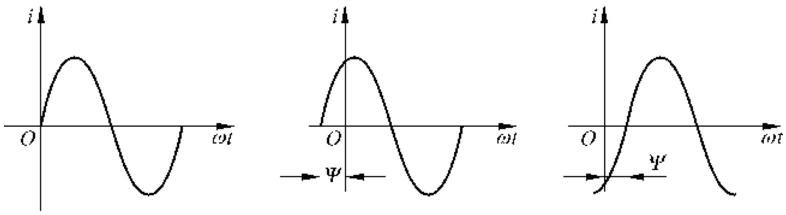
$$E=\frac{E_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=0.707E_\mathrm{m} \tag{3.1.7}$$

式(3.1.5)～式(3.1.7)说明：正弦量的有效值等于它的最大值除以$\sqrt{2}$。

平时所说的交流电的数值如 380V，或 220V，都是指的有效值。用交流电流表和交流电压表测量的电流和电压的数值也是有效值。

3．相位、初相位与相位差

正弦交流电随时间做周期性的变化，在不同的时间内，具有不同的电角度 $\omega t+\Psi$，正弦交流电也就变化到不同的数值，所以电角度 $\omega t+\Psi$ 代表了正弦交流电的变化进程，称为相位或相位角。当 $t=0$ 时的相位称为初相位或初相角，用 Ψ 表示。然而，初相位的大小和符号是与所取的计时起点有关的，如图 3.1.4 所示。当选择正弦交流电初相位 $\Psi=0$ 的瞬间作为计时起点时，波形经过坐标原点，初始值为零，如图 3.1.4(a)所示，通常将初相位为零的正弦量作为参考正弦量；当 $0<\Psi<\pi+2n\pi$ 时，波形前移(一般以向坐标原点左方移动为前移)一个 Ψ 角，初始值为正，如图 3.1.4(b)所示；当 $-(\pi+2n\pi)<\Psi<0$ 时，波形后移(一般以向坐标原点右方移动为后移)一个 Ψ 角，初始值为负，如图 3.1.4(c)所示。可见，所取的计时起点不同，正弦交流电的初相位和初始值也就不同，因此，初相位决定了正弦交流电的初始值。



(a) Ψ 0　　(b) $\Psi>0$　　(c) $\Psi<0$

图 3.1.4　初相位决定了正弦交流电的初始值

在同一个电路中，正弦交流电的电压 u 和电流 i 的频率是相同的，但其相位不一定相同，例如

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_{\mathrm{u}})$$
$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_{\mathrm{i}})$$

它们的初相位分别为 Ψ_{u} 和 Ψ_{i}，则它们之间的相位差为

$$(\omega t + \Psi_{\mathrm{u}}) - (\omega t + \Psi_{\mathrm{i}}) = \Psi_{\mathrm{u}} - \Psi_{\mathrm{i}}$$

即等于它们的初相位之差，且不随时间变化。所以任意两个同频率的正弦量在相位上的差值称为相位差，用字母 φ 表示，数值上等于两个初相位之差。相位差的物理意义在于表示两个同频率正弦量随时间变化步调上的先后，如图 3.1.5 所示。

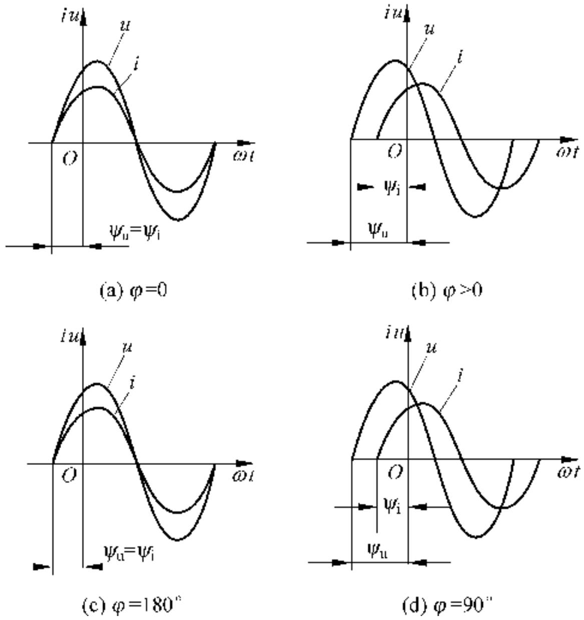


图 3.1.5　相位差

当 $\varphi = \Psi_{\mathrm{u}} - \Psi_{\mathrm{i}} = 0$ 时，波形如图 3.1.5(a)所示。说 u 和 i 相位相同，或者说 u 和 i 同相。

当 $\varphi > 0$ 时，波形如图 3.1.5(b)所示，即 u 总是比 i 先经过零值和正的最大值。也就是说 u 在相位上超前于 i 一个 φ 角，或 i 滞后于 u 一个 φ 角。

当 $\varphi = 180°$时，波形如图 3.1.5(c)所示，也就是说 u 和 i 相位相反，或者说 u 和 i 反相。

当 $\varphi = 90°$时，波形如图 3.1.5(d)所示，也就是说 u 和 i 相位正交，或者说 u 和 i 正交。

应当指出，同频率的正弦量当计时起点改变时，它们的相位和初相位也跟着改变，但两者的相位差是恒定不变的。相位差是表达同频率正弦量相互关系的重要物理量，因此必须学会在波形图上和数学表达式上都能迅速判断出它们之间的相位关系。

例 3.1.2　已知 $i_1 = 310\sin(\omega t + 120°)$ V，$i_2 = 310\sin(\omega t - 60°)$ V，试求两个正弦量的有效值和相位差，并说明它们的相位关系。

解：两个正弦量的有效值为

$$I_1 = I_2 = 0.707 \times 310 = 220\text{V}$$

两个正弦量的初相位分别为：$\Psi_1 = 120°$，$\Psi_2 = -60°$，则相位差为

$$\varphi = \Psi_1 - \Psi_2 = 180^\circ$$

说明 i_1 与 i_2 反相。

3.1.2 正弦量的参考方向

正弦电流和正弦电压的实际方向是随时间周期性变化的。和直流电路一样，分析和计算的时候，在电路图中必须预先规定好正方向作为正弦交流电的参考方向。

如图 3.1.6 所示，正半周时，当电流 i 或电压 u 的实际方向（图中虚线箭头所指的方向）与参考方向（图中实线箭头所指的方向）一致时，电流 i 或电压 u 为正值。负半周时，由于参考方向与实际方向相反，所以电流 i 或电压 u 为负值。

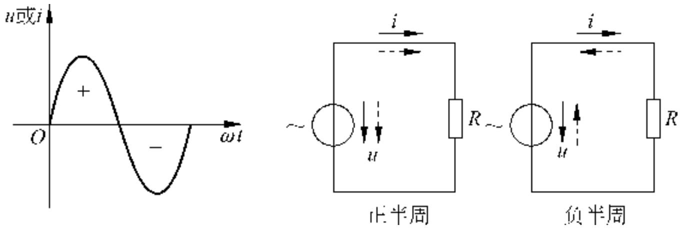


图 3.1.6 正弦量的参考方向与实际方向

3.2 正弦量的相量表示

前面采用了三角函数式和波形图来表示正弦交流电，若用这两种表示方法对交流电路进行分析和计算是很不方便的。为此，在工程中常采用相量图和复数的相量式表示正弦量，这种表示方法称为正弦量的相量表示法。

3.2.1 相量图

相量图就是用一个有向线段来表示正弦量。用来表示正弦量的有向线段称为相量。相量如何能反映出正弦量的三要素呢？

用相量表示正弦量 i 时，相量的长度等于正弦量的幅值 I_m，它和 x 轴正方向之间的夹角等于正弦量的初相位 Ψ，相量以 ω 角速度按逆时针方向旋转，如图 3.2.1 所示。这样，这个旋转相量任何时刻在纵轴 y 上的投影就等于这个正弦量在同一时刻的瞬时值。

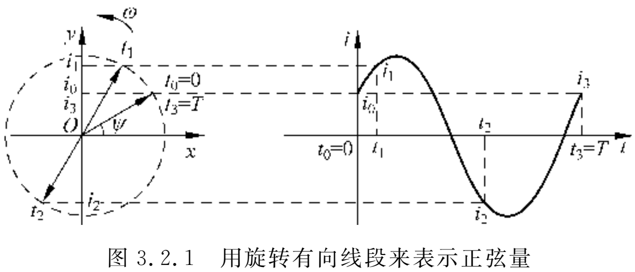


图 3.2.1 用旋转有向线段来表示正弦量

按照如图 3.2.1 所示的方法画旋转矢量来表示正弦电量也很麻烦。由于在正弦稳态电路中，分析计算的正弦量都是同频率的正弦量，因此，在正弦量的三要素中，只有最大值（或有效值）及初相位这两个要素是待求量，而且这两个量均表现在相量图的初始位置。因此，通常只用处于初始位置（即 $t=0$ 的位置）的相量来表示一个正弦量，它反映了正弦量的幅值和初相位，在正弦量最大值符号的顶部加一圆点，表示此相量以 ω 的角频率逆时针方向旋转，这样用相量就可以表示出正弦量的三要素。例如图 3.2.2 中的$\dot{U}_{\mathrm{m}}$ 可以表示正弦电压 $u=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\Psi_{\mathrm{u}})$，$\dot{U}_{\mathrm{m}}$ 称为最大值相量。由于在计算中通常使用正弦量的有效值，因此，为了方便起见，常将相量的长度用有效值表示，称为有效值相量，如图 3.2.2 中的$\dot{U}$。这时，它在纵轴上的投影就不能代表正弦量的瞬时值了。

将若干同频率的正弦量按其大小和相位画在同一个相量的图中，在相量图上能够清晰地表示出各个正弦量的大小和相位相互的关系。在图 3.2.3 中，电压相量$\dot{U}$比电流相量$\dot{I}$超前 φ 角。也就是正弦电压 u 比正弦电流 i 在相位上超前一个 φ 角。决定各个相量之间相位关系的量就是它们之间的相位差。

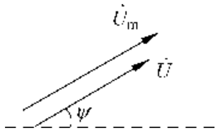


图 3.2.2　用相量图表示正弦相量

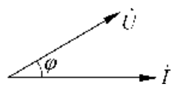


图 3.2.3　同频率正弦量的相量图

为了分析方便，把初相位为零时的相量称为参考相量，以便与其他相量比较相位关系。

引入相量表示正弦量以后，同频率的正弦量相加减，可以转换成相量的加减运算，相量相加可以通过平行四边形法则或多边形法则作图求得。平行四边形法则适用于两个相量之和与之差的求解，即以两相量为边，作平行四边形，其对角线就是两相量之和，如图 3.2.4 所示。多边形法则适用于两个以上相量的加减。具体作法是，先画出某一相量$\dot{A}$，然后将其余相量依次首尾相接，如图 3.2.5 所示。最后将相量$\dot{A}$的首端与最后一个相量的尾端相连，构成相量$\dot{R}$，$\dot{R}$就是所求之和相量。值得指出的是，只有同频率的正弦量才能画在同一个相量图上，否则就无法进行比较和计算。

例 3.2.1　已知 $i_1=\sqrt{6}\sin\omega t\,\mathrm{A}$，$i_2=\sqrt{2}\sin(\omega t+90^\circ)\,\mathrm{A}$，试计算 $i=i_1+i_2$。

解：作相量图 3.2.6

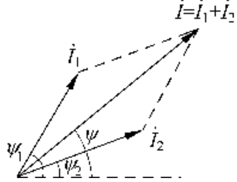


图 3.2.4　平行四边形法则相加

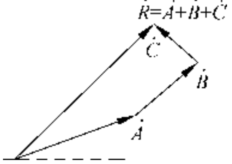


图 3.2.5　多边形法则相加

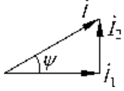


图 3.2.6　例 3.2.1 图

根据相量的几何图形可知

$$I=\sqrt{1+3}=2$$

$$\sin\Psi=\frac{1}{2}=0.5\quad \Psi=30^{\circ}$$

则所求的电流为

$$i=2\sqrt{2}\sin(\omega t+30^{\circ})\mathrm{A}$$

相量图能直观地反映出正弦量之间的相互关系，利用相量图中各正弦量的几何关系分析电路可以大大简化电路的求解过程。但对正弦电量的幅值和相位角要分别计算，不易列出简明而完整的解析式，对含有多个未知量的复杂电路的求解比较困难，利用相量式表示正弦量能很好地解决这类问题，同时还能使描述正弦稳态电路的微分（或积分）方程转化为代数方程，使电路分析更加方便。

3.2.2 相量式

有向线段既可用几何作图表示，也可用复数表示。将有向线段 A 放入复数平面，如图 3.2.7 所示。横轴为实轴，用 +1 表示，以 +1 为单位；纵轴为虚轴，用 +j 表示，以 +j 为单位。线段 A 的长度为 r，与实轴正方向的夹角为 Ψ，r 在实轴上的投影 a 称为复数的实部，r 在虚轴上的投影 b 称为复数的虚部，则线段 A 用复数的代数形式可表示为

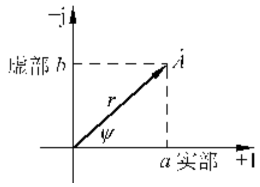


图 3.2.7　复数平面的有向线段

$$\dot{A}=a+\mathrm{j}b \tag{3.2.1}$$

线段 A 的长度 r 在复数平面中称为模，线段 A 与实轴正方向的夹角 Ψ 在复数平面中称为辐角，它们与实部和虚部的关系为

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Psi=\arctan\frac{a}{b}$$

因为

$$a=r\cos\Psi\quad b=r\sin\Psi$$

所以复数 $\dot{A}$ 可以用三角式表示为

$$\dot{A}=r\cos\Psi+\mathrm{j}r\sin\Psi \tag{3.2.2}$$

根据欧拉公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Psi}=\cos\Psi+\mathrm{j}\sin\Psi$，又可将式(3.2.2)改写成

$$\dot{A}=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{3.2.3}$$

和

$$\dot{A}=r\angle\Psi \tag{3.2.4}$$

此两式分别称为复数的指数式和极坐标式。

复数既然可以表示有向线段，因此也可以表示正弦电量。为与一般复数相区别，把表示的正弦电量的复数也称为相量。

设正弦电压为

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi)$$

用相量表示时，只要将复数的模等于正弦量的最大值或有效值，其辐角等于正弦量的初相位，就可得到正弦电压相量式的4种表达式，即

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\mathrm{m}} &= a + \mathrm{j}b = U_{\mathrm{m}}(\cos\Psi + \mathrm{j}\sin\Psi)\\ &= U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = U_{\mathrm{m}}\angle\Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U} &= c + \mathrm{j}d = U\ (\cos\Psi + \mathrm{j}\sin\Psi)\\ &= U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = U\angle\Psi\end{aligned}$$

相量的4种表达式可以互相转换，在相量运算中，加减法用代数式，乘除法用指数式或极坐标式较为方便。如相量$\dot{A}=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$乘以j，等于

$$\dot{B} = \mathrm{j}r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = (\cos 90^\circ + \mathrm{j}\sin 90^\circ)\ r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi+90^\circ)}$$

从复平面看，是将相量$\dot{A}$逆时针旋转90°就得到相量$\dot{B}$，如图3.2.8所示。若将相量$\dot{A}$乘以$\mathrm{j}^2=-1$，则得到

$$\begin{aligned}\dot{C} &= \mathrm{j}^2 r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = -r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = (\cos 180^\circ + \mathrm{j}\sin 180^\circ)\ r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ}\ r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi+180^\circ)}\end{aligned}$$

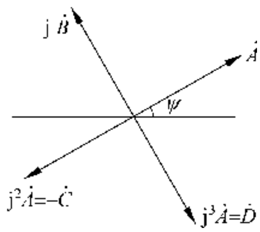


图3.2.8　相量图

从复平面看，是将相量$\dot{A}$逆时针旋转180°，即得到相量$\dot{C}$。当相量$\dot{A}$乘以$\mathrm{j}^3=-\mathrm{j}$时，同理可将相量$\dot{A}$逆时针旋转270°或顺时针90°，即可得到相量$\dot{D}=\mathrm{j}^3\ \dot{A}=-j\ \dot{A}$。由此可见，任何一个相量乘以j就相当于该相量在复平面上逆时针转动了90°；若乘以−j；就相当于该相量顺时针转动了90°。所以j是旋转90°的因子，称为旋转90°的算子(operator)。

显然，如将实轴的单位相量+1乘以算子j时，则该单位相量+1就逆时针旋转90°，变为虚轴的单位相量+j；将虚轴的单位相量+j乘以算子+j时，则虚轴的单位相量+j也要逆时针旋转90°，就变为实轴的单位相量−1，即

$$(+\mathrm{j})(+\mathrm{j}) = \mathrm{j}^2 = -1$$

由上式可知，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，就是复数中的虚数单位。

值得指出的是：引入相量图和相量式仅仅是用相量表示正弦电量的一种方法。正弦量不等于相量。用复数表示正弦电量是一种数学变换，因此相量(相量图和相量式)只是分析正弦稳态电路的一种数学工具，而且，相量只适用于同时率的正弦量，不同频率的正弦量以及非正弦电量都不适用。

例3.2.2　试写出$u_1=220\sqrt{2}\sin(314t-150^\circ)$，$u_2=-220\sqrt{2}\sin(314t-30^\circ)$的相量式。并计算$u=u_1+u_2$，画出$u$、$u_1$、$u_2$的相量图。

解：用相量表示正弦量

$$\dot{U}_1 = 220\angle -150^\circ = 220\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\dot{U}_2 = 220\angle(180^\circ - 30^\circ) = 220\angle 150^\circ = 220\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=220\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)+220\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\right)=-220\sqrt{3}=-380=380\angle 180^\circ$$

将相量还原为基本表达式

$$u=-380\sqrt{2}\sin 314t$$

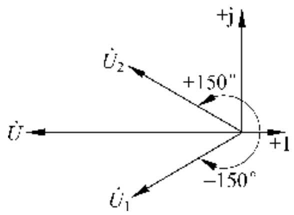


图 3.2.9　例 3.2.2 图

相量图如图 3.2.9 所示。

通过上面的分析可知，一个正弦量实际上可以用三角函数式、正弦波形图、相量图和相量式 4 种方法来表示。前 2 种方法是正弦交流电的基本表示方法，适用于任何频率的正弦量。但是，计算很复杂。相量图法是把同频率正弦量的大小和相位关系清晰地反映在相量图上，并借助相量图的几何关系计算出待求量。相量式是把同频率正弦量的三角函数运算变换成为复数形式的代数运算，使正弦交流电的表示、运算及理论分析更加系统和完善。所以相量分析法（相量图和相量式）是分析正弦稳态电路的重要方法。

3.3　单一参数的正弦稳态电路

电阻元件 R、电感元件 L、电容元件 C 是正弦稳态电路的 3 种基本参数，如果在电路中只有其中某一元件单独作用，则称电路为单一参数的电路。分析各种正弦稳态电路时，必须首先掌握单一参数电路中电压与电流之间的关系以及能量的转换和功率问题。因为这些关系是分析正弦稳态电路的基础。

3.3.1　电阻元件的正弦稳态电路

图 3.3.1 是一个具有线性电阻元件的正弦稳态电路。在正弦电压 u 的激励下，电路中产生的电流为 i，参考方向如图 3.3.1 所示。假设电流为参考正弦量

$$i=I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$$

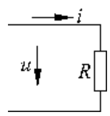


图 3.3.1　电阻元件的正弦稳态电路

1. 电流与电压的关系

由欧姆定律可知

$$u=Ri=RI_{\mathrm{m}}\sin\omega t=U_{\mathrm{m}}\sin\omega t \tag{3.3.1}$$

在式(3.3.1)中

$$U_{\mathrm{m}}=RI_{\mathrm{m}}$$

或

$$\frac{U_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}=\frac{U}{I}=R \tag{3.3.2}$$

由此可见，在电阻元件的正弦稳态电路中，电流为正弦量时，电压是与电流同频率、同相位的正弦量，在数值上，它们的有效值或最大值的关系均符合欧姆定律。

若用相量表示电压与电流的关系，则为

$$\dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^{\circ}}\quad \dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^{\circ}}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U}{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^{\circ}}=R$$

或

$$\dot{U}=R\dot{I} \tag{3.3.3}$$

式(3.3.3)表明电阻元件电流与电压的相量之比为实数,说明在相位上电压与电流同相。由上分析看出,电阻元件上电压与电流的瞬时值、有效值和相量关系皆符合欧姆定律。电流与电压的相量电路图如图 3.3.2(a)所示,相应的相量图和正弦量的波形图如图 3.3.2(b)、(c)所示。

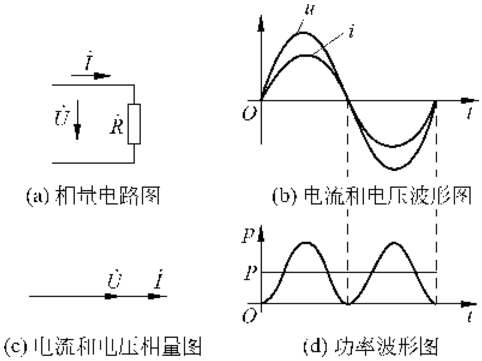


图 3.3.2　电组元件的正弦稳态电路

2. 电压、电流与功率的关系

知道了电压与电流的变化规律和相互关系后,便可求出任意瞬间电路的功率,即瞬时功率

$$p=ui=U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\sin^{2}\omega t=\frac{U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}}{2}(1-\cos 2\omega t)=UI(1-\cos 2\omega t) \tag{3.3.4}$$

其变化曲线如图 3.3.2(d)所示。在电流变化一个周期的时间内,瞬时功率两次出现最大值,在变化过程中,通过电阻元件的电流与其两端电压的方向总是相同的,所以瞬时功率恒为正值,即 $p>0$,这说明电阻元件在任一瞬间都是从电源吸取电功率,并将电能转换成热能,这是一种不可逆的能量转换过程。由于瞬时功率是随时间变化的,因此,工程上都是取它在一个周期内的平均值来表示交流电功率的大小,称为平均功率,用大写字母 P 表示。

$$P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}UI(1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}t=UI=I^{2}R=\frac{U^{2}}{R} \tag{3.3.5}$$

由于平均功率是实际消耗的功率,故又称为有功功率。交流用电设备上标注的功率值都是指有功功率。如 60W 的灯泡等。

式(3.3.5)表明,在线性电阻电路中的平均功率等于电压与电流的有效值的乘积,该式与直流电阻网络中的功率公式一样。从物理意义上讲,由于交流电的有效值就是与它们的热效应相等的直流电的值,因此,正弦稳态电阻电路的平均功率的形式就必须与直流电阻电

路中的功率形式相同。

例 3.3.1 把额定电压为100V、功率为25W的灯泡接到频率为50Hz，电压有效值为100V的正弦电源上，问电流是多少？若保持电压不变，电源频率变为5000Hz，则电流又是多少？

解：由式(3.3.5)可求得电流如下：

$$I=\frac{P}{U}=\frac{25}{100}=0.25\mathrm{A}$$

若保持电压不变，改变电源频率，因灯泡为电阻负载，电阻值与频率无关。所以在电压有效值不变时，电流有效值应保持不变，仍为0.25A。

3.3.2 电感元件的正弦稳态电路

图3.3.3是一个具有线性电感元件的正弦稳态电路。电感元件上电压 u 和电流 i 的参考方向如图3.3.3所示。仍然假设 i 为参考正弦量，即

$$i=I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$$

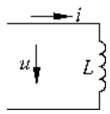


图3.3.3 电感元件的正弦稳态电路

1. 电流与电压的关系

由电感元件特性方程可知

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\omega LI_{\mathrm{m}}\cos\omega t=\omega LI_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+90^\circ)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+90^\circ) \tag{3.3.6}$$

在式(3.3.6)中

$$U_{\mathrm{m}}=\omega LI_{\mathrm{m}}$$

或

$$\frac{U_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}=\frac{U}{I}=\omega L \tag{3.3.7}$$

由此可见，在电感元件电路中，电流为正弦量时，电压是与电流同频率、相位超前电流90°的正弦量，电压最大值或有效值与电流最大值或有效值之比值为 ωL，称为电感元件的感抗，简称感抗，用 X_{L} 表示，即

$$X_{\mathrm{L}}=\omega L=2\pi fL \tag{3.3.8}$$

式中：L 的单位为亨；f 的单位为赫兹，X_{L} 的单位为欧姆。

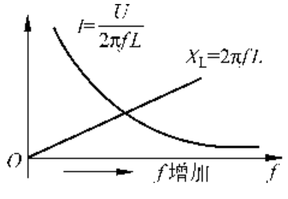


图3.3.4 X_{L} 和 I 与 f 的关系

当电压一定时，X_{L} 愈大，则电流愈小，所以感抗也具有阻碍电流的性质，由于它与电感 L 和频率 f 成正比，所以 L 愈大，f 愈高时，则 X_{L} 愈大，对电流的阻碍作用就愈大。因此，电感元件在高频电路相当于开路，即 $X_{\mathrm{L}}\to\infty$，而对直流电路来说，由于 $f=0$，电感元件相当于短路，所以 $X_{\mathrm{L}}=0$。当电压 U 和电感 L 一定时，感抗 X_{L} 和电流 I 与频率 f 的关系如图3.3.4所示。

电压和电流的上述关系若用相量来表示，即

$$\dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}\quad \dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}$$