

第 3 章 离散傅里叶变换

3.1 引言

前面介绍了离散时间域信号(序列)的傅里叶变换(DTFT)和 Z 变换。DTFT 和 Z 变换是与连续时间信号的傅里叶变换(FT)和 Laplace 变换相对应的,是对绝对可和、任意长序列进行谱分析和变换域分析的数学工具。

回顾在时间域具有不同特征的信号的谱分析及其频域表述,习惯上对连续时间域信号 $x(t)$ 的频谱分析计算称为傅里叶变换,如果时间连续信号又是周期的,其频域特征常用傅里叶级数(FS)描述;而对于离散时间信号 $x(n)$ 的频谱分析计算则称为序列的傅里叶变换,又叫离散时间傅里叶变换,当离散时间信号又具有周期性时,其频域特征常用离散傅里叶级数(DFS)描述。

傅里叶变换处理的连续时间域信号及所得到的模拟域频谱函数的特点如图 3.1.1 所示。其中,信号时间参数 t (秒)和角频率参数 Ω (弧度/秒)均属于模拟域,是连续变量,在实数域取值,有对应的物理量纲。

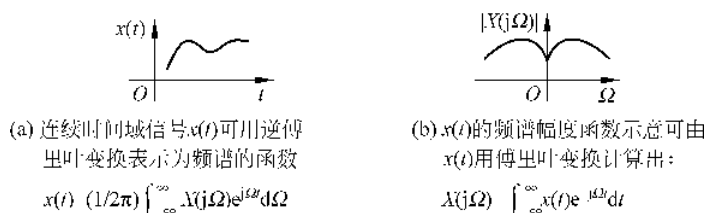


图 3.1.1 模拟域连续时间信号及其傅里叶变换波形示意

连续时间周期信号的时频域波形特点如图 3.1.2 所示。

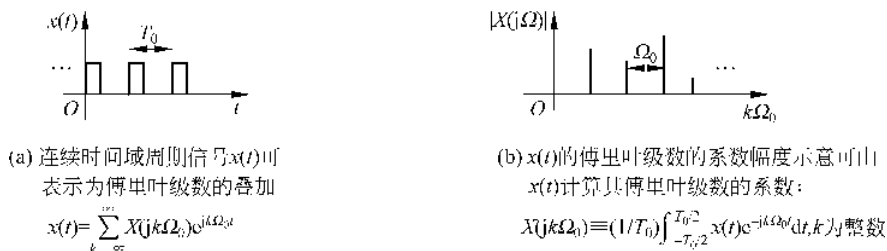


图 3.1.2 连续周期信号的时频域波形特点

设 $x(t)$ 的周期 T_0 秒,则对应的基波角频率 $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ (弧度/秒)是确定的实数。图中时间参数 t (秒)可在实数域上连续取值;频谱函数又称傅里叶级数的系数,是线谱,对应的频点 $k\Omega_0$ (弧度/秒), k 为整数。这里时间和频率参数也应理解为模拟域参数。

序列的傅里叶变换(DTFT)对应的信号序列时域、频域特征如图 3.1.3 示意。有如下特点:

(1) DTFT 分析对欲处理的时域序列 $x(n)$ 长度无限制,一般是非周期序列。参数 T (秒)是时域序列样值点之间的时间间隔。如果 $x(n)$ 是由连续函数采样得到,采样频率为 f_s Hz,有 $T=1/f_s$ 。

(2) 模拟角频率 Ω (rad/s)是连续的,但 DTFT 分析结果常以数字频率 ω (rad) $= \Omega T$ 为变量,也是连续的。

由

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j(\Omega+2\pi/T)Tn} = e^{-j2\pi n} e^{-j\Omega Tn} = e^{-j\omega n}$$

得

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

$$X[j(\Omega + 2\pi/T)] = X(j\Omega)$$

因此, $X(e^{j\omega})$ 是数字频率的周期函数,数字频率周期 2π 弧度;而 $X(j\Omega)$ 是模拟角频率的周期函数。模拟角频率周期 $2\pi/T$ 弧度/秒。

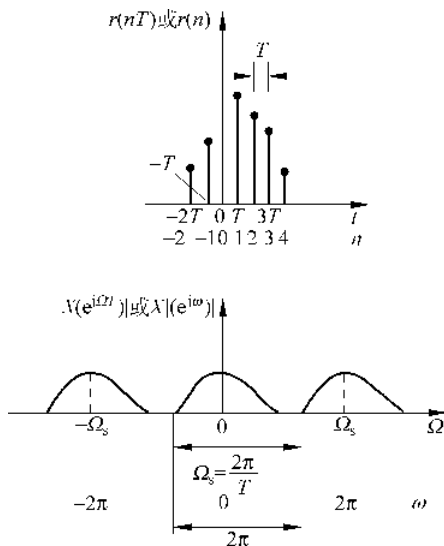


图 3.1.3 非周期序列及其傅里叶变换。DTFT 以数字频率为参数时,其周期为 2π

(3) DTFT 计算定义上要求做无限项的求和,实际数值计算总是取有限长的截断序列,这使计算结果相对理论结果产生误差。

当离散时间序列又具有周期性,其时频域波形特点如图 3.1.4 所示。因为周期序列的周期特性,其时域序列可展开成离散傅里叶级数(Discrete Fourier Series,DFS),从周期序列的 DFS 展开式可见,序列的频谱函数定义在无限多个频点上。频谱结构是周期线谱。各离散频点的幅度为 $|a(k)|$ 。

本章介绍便于在计算机上实现的,对有限长的离散时间信号谱分析定义的新的变换算法:离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform,DFT)。离散傅里叶变换的特点是:

(1) 对时域有限长的信号序列,用有限的频谱序列,估计信号频率成分;

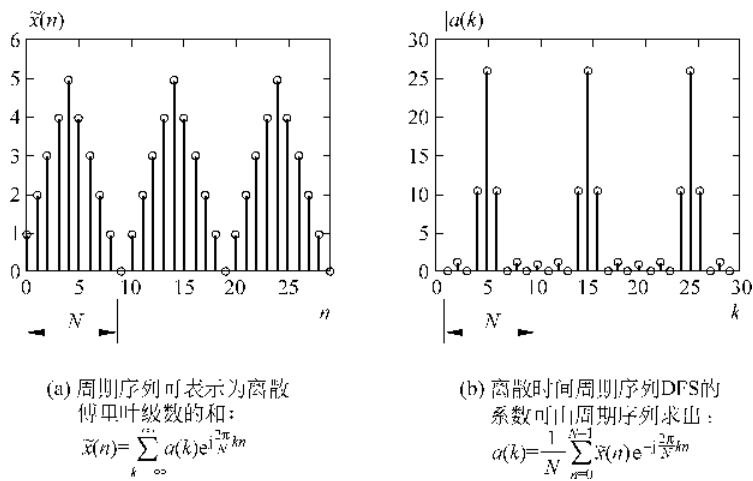


图 3.1.4 离散时间周期序列及其离散傅里叶级数的系数

- (2) DFT 的结果是离散数字频率的函数，隐含有周期性；
- (3) 其快速实现算法统称为快速傅里叶变换(FFT)，是数字信号处理的基础。
- 离散傅里叶变换及其 FFT，主要有三个用处：

- (1) 信号频谱的数值计算；
- 计算机只能对有限的离散数据处理，处理结果也是离散数值。
- (2) 高效卷积的实现(FFT)；
- (3) 波形编码(尤其是其变形——离散余弦变换 DCT)。

总结：在时域和频域中，一个域中的函数是周期的，其相应的变换式在另一个域中是取样形式（离散的）；反过来，一个域中的函数是取样形式（离散的），其相应的变换式在另一个域中一定是周期的（可理解为周期延拓的结果），如表 3.1.1 所示。

表 3.1.1 时域和频域的波形特征的对应关系

类型	函 数 性 质			
时域函数	连续的	非周期	具有周期(T)	取样形式(样值点间隔 T_s 秒,对应的取样率 f_s Hz)
频域函数	非周期	连续的	离散的线谱角频率间隔($\Omega=2\pi/T$)	周期延拓(数字频率域,周期为 2π)

本章还将介绍 DFT 和其他信号类型的傅里叶变换相关联时所应满足的条件，最后对 DFT 处理现实中经常遇到的连续时间信号和离散时间信号的频谱时遇到的主要问题（混叠，频率泄露，栅栏效应）及解决思路进行归纳总结。

3.2 DFT 的定义

3.2.1 DFT 和 IDFT 的定义

设离散时间信号 $x(n)$ 是长度为 L 的有限长序列，其 $N(N\geq L)$ 点 DFT 定义为：

$$X(k) \equiv \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (3.2.1a)$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{kn} \quad (3.2.1b)$$

$$\equiv |X(k)| e^{j\theta(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.1c)$$

其中, W_N 因子的定义: $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$;

N : 称为离散傅里叶变换的区间长度或 DFT 窗长度, 习惯上称为 DFT 的变换点数。

$|X(k)|$ 、 $\theta(k)$: 分别称为幅度谱和相位谱。显然 DFT 把时域有限长序列变换成数字频率域有限长序列。

对 $X(k)$ 进行逆离散傅里叶变换 (简称 IDFT), 可得到对应的时域有限长序列 $x(n)$, IDFT 定义为:

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{IDFT}[X(k)] \\ &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, L-1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

特别注意, $N > L$ 时, IDFT 是唯一的。从理论上讲, IDFT 求出的 $x(n)$ 在 $n = 0, 1, \dots, L-1$ 的区间上等于原有限长时域序列; 在 $L-1 < n \leq N-1$ 的区间上, $x(n)$ 序列值 $= 0$ 。实际因计算机的运算误差, IDFT 算出的时间序列可能和原输入时域序列有误差。另外, 在保证 IDFT 唯一性的前提下, 为了减少计算量, 对长为 L 的序列 $x(n)$ 进行 DFT 分析时, 取变换区间长度 $N = L$ 点的 DFT 就可以。

从 DFT 的数学定义上, 根据 $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ 因子的特性: $W_N^* = e^{j(2\pi/N)} = W_N^{-1}$, 当 $x(n)$ 是实序列时, 计算 IDFT 程序可通过两次调用 DFT 的算法程序实现, 步骤如下:

$$(1) \text{ 计算序列的 } N \text{ 点 DFT, } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$(2) X(k) \text{ 取共轭, 得 } X(k)^* = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn}$$

$$(3) \text{ 对 } X(k)^* \text{ 计算 DFT: } x'(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)^* W_N^{kn}$$

$$(4) \text{ 对 (3) 的结果再取共轭: } x'(n)^* = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

(5) 对 (4) 的结果乘以 $1/N$, 得到序列 $x(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$ 。就是 IDFT 的计算结果。根据这个特点, 只要编一个 DFT 子程序, 就能完成 DFT 和 IDFT 的运算。

从 DFT 的定义可知, 序列 $x(n)$ 的长度 L 和 DFT 变换区间长度 N 可以不同。 $N > L$ 的 DFT 计算, 数学上可理解为原序列 $x(n)$ 后面补 $N-L$ 个零的序列的 N 点 DFT。序列 $x(n)$ 后补零不影响其 N 点 DFT 的结果。证明如下:

证明: 设 $x_1(n)$ 长 L , $n = 0, 1, \dots, L-1$; $x'_1(n)$ 是后面增补 $N-L$ 个零后的序列, 长 N , $n = 0, 1, \dots, L-1, \dots, N-1$, 如图 3.2.1 所示。它们的 N 点 DFT 分别为:

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = \sum_{n=0}^{L-1} x_1(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned}
 X'_1(k) &= \text{DFT}[x'_1(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x'_1(n) W_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{L-1} x_1(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

显然, $X'_1(k) = X_1(k)$ 。

对于序列 $x(n)$ 及其后补零序列, 进行相同变换区间长度的离散傅里叶变换, 结果是一样的。下面介绍序列 $x(n)$ 及其前补零序列进行相同变换区间长度的 DFT 的结果之间的差异。

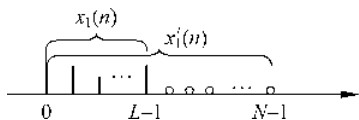


图 3.2.1 L 点序列及其后补零序列

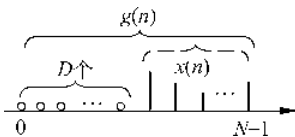


图 3.2.2 L 点序列及其前补零序列

对长为 L 的 $x(n)$ 序列, 前面补 D 个零后, 得到长为 $L+D$ 的序列记为 $g(n)$, 如图 3.2.2 所示。为了比较 $x(n)$ 和 $g(n)$ 的 DFT 之间的关系, 取 DFT 的点数 $N > L+D$ 。根据定义, $x(n)$ 、 $g(n)$ 的 N 点 DFT 分别为

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned}
 G(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W_N^{kn} = \sum_{n=D}^{N-1} g(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)(n+D)k} \\
 &= e^{-j(2\pi/N)Dk} \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \\
 &= W_N^{Dk} X(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

比较式(3.2.3)和(3.2.4)可见: $x(n)$ 前补 D 个零的序列 $g(n)$ 的 N 点 DFT $G(k)$ 的相位相对于原 $x(n)$ 的 N 点 DFT $X(k)$ 的相位, 叠加了一线性相移: $[-j(2\pi/N)Dk]$; 因为 $|W_N^{Dk}| = 1$, $G(k)$ 和 $X(k)$ 的幅度是相同的。

在同一个工程实践中, 当有两个有限长序列 $x_1(n)$, $x_2(n)$ 均要进行 DFT 分析, 如果 $x_1(n)$ 长 L , $x_2(n)$ 长 N , $L < N$, 为了计算程序的统一应用, DFT 计算常按长的序列取变换区间长度, 如进行 N 点 DFT。按式(3.2.1a)的定义分别计算:

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$$

这样做带来的方便之处: 各不同信号片断可以用同一个 DFT 程序实现; 且当要对这些数据片断进行加权组合, 产生新的处理对象时, 对应的数字频率域的序列(即频谱序列)亦遵循同样的加权组合, 结果的长度就等于原离散傅里叶变换的点数, 也是规格化的。

例 3.2.1 给定序列 $x(n)=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, $L=8$ 。

(1) 求其 $N=16$ 点 DFT。

(2) 前补 3 个零。求其 $N=16$ 点 DFT。

解: 例 3.2.1 的 MATLAB 程序参考实现见 3.8.1 节。

图 3.2.3 给出 8 点序列 $x(n)$ 及其前补零序列 $x_D(n)$ 时域波形及其 16 点 DFT 的幅度谱。图 3.2.4 是两个序列相应的 DFT 之相位谱及其线性相移。可见前补零序列和原序列的 DFT 的幅度是相同的, 而前补零序列 DFT 的相位在原相位谱上增加了线性相移。

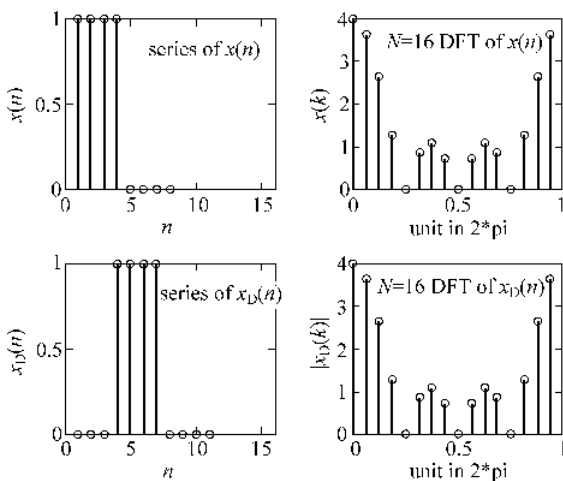


图 3.2.3 例 3.2.1 中 8 点序列及其前补零序列时域及 DFT 幅度谱波形

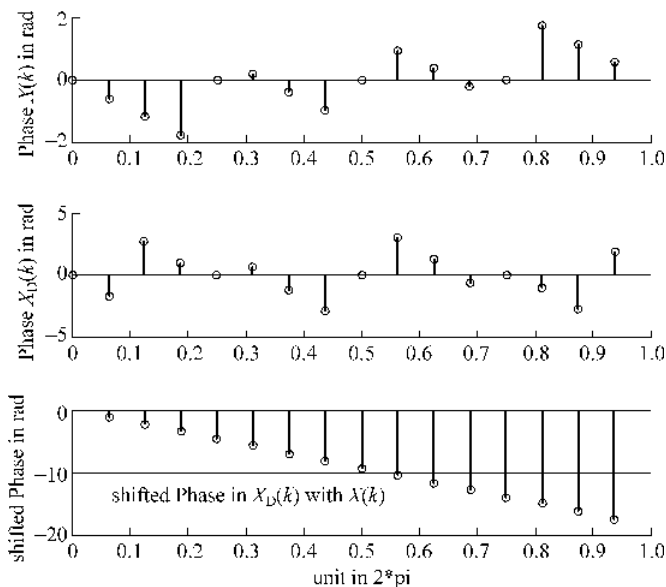


图 3.2.4 8 点序列 $x(n)$ 及其前补零序列的 16 点 DFT 相位谱及线性相移

在工程实践中,经常会遇到的问题是要对已获得的时域离散序列进行频谱分析时,先要确定用多少点数的 DFT 比较合适;或者考虑,用现成的 DSP 芯片对给定的数据进行分析,

是否适当。回答这些问题要考虑多种因素,其中之一是了解不同变换区间长度 DFT 之间存在什么样的联系。

给定时域序列为 $x(n), 0 \leq n \leq N-1$ 。其 N 点 DFT 根据定义:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

式(3.2.5)表明, N 点 DFT 数字频率离散间隔 $\omega_l = 2\pi/N$ 。

(1) 考虑 $x(n)$ 的 $L=rN$ 点 DFT $G(k), r$ 为整数,即 L 是 N 的整倍数。

先对 $x(n)$ 后补零成为 L 点序列,再根据定义求 rN 点 DFT :

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{rN-1} x(n) W_{rN}^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, N, \dots, rN-1 \\ &= \sum_{n=0}^{rN-1} x(n) e^{-j(2\pi/rN)nk}, \quad (\text{因 } x(n) \text{ 只有前 } N \text{ 点,该求和具体为}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)n(k/r)}, \end{aligned}$$

当 k 是 r 的整数倍时,

$$G(k) = X(k/r), \tag{3.2.6}$$

$G(k)$ 的离散数字频率间隔 $\omega'_l = 2\pi/(rN)$ 。比原 N 点 DFT 数字频率离散间隔 $\omega_l = 2\pi/N$ 小。所以 rN 点 DFT $G(k)$ 谱线数目在 2π 范围内是 $X(k)$ 的 r 倍,更加密集,如图 3.2.5 中单位圆上等间隔相邻点之间的角度差表示了相应点数的 DFT 的数字频率间隔。

(2) 考虑 $x(n)$ 的 L 点 DFT $G(k)$,其中 $L \neq rN$,不是原 DFT 变换区间长度的整数倍。

先对 $x(n)$ 后补零成为 L 点序列,再根据 DFT 的定义,当 $L > N$,则 $x(n)$ 的 L 点 DFT $G(k)$,数字频率离散间隔 $\omega'_l = 2\pi/L$ 。 $G(k)$ 谱线数目在 2π 范围内比 $x(n)$ 原来的 N 点 DFT $X(k)$ 多 $L-N$ 根谱线,亦更加密集。如图 3.2.6 给出 10 点 DFT 的数字频谱在 z 平面单位圆上的位置。

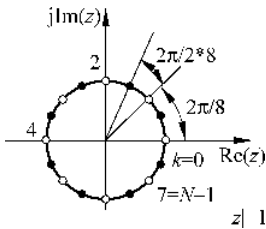


图 3.2.5 8 点及 16 点 DFT 中的数字频率值在 z 平面单位圆上的分布

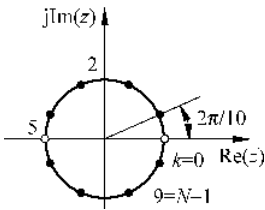


图 3.2.6 10 点 DFT 中的 10 个数字频率值在 z 平面单位圆上的分布

例 3.2.2 设时域序列 $x(n)=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$,长为 8。

- (1) 求其 $N=8$ 点 DFT。
- (2) 后补 8 个零,即 $r=2$ 。求其 $N=16$ 点 DFT。
- (3) 后补 3 个零,即 $L=11$ 。求其 $N=11$ 点 DFT。

解：例 3.2.2 的 MATLAB 程序参考实现见 3.8.1 节。

图 3.2.7 是给定的 $x(n)$ 序列时域波形。根据定义式 (3.2.1a) 计算出 $x(n)$ 的 $N=8, 16, 11$ 点离散傅里叶变换。图 3.2.8 给出 $N=8, 16, 11$ 点离散傅里叶变换的幅度分布。

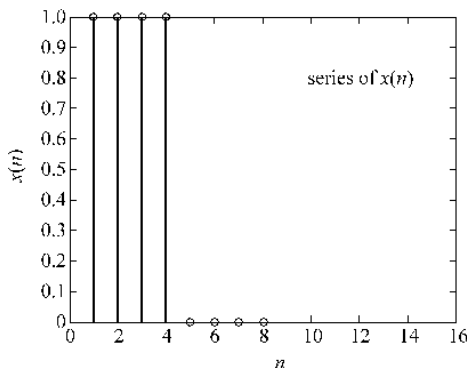


图 3.2.7 例 3.2.2 中 8 点序列 $x(n)$ 的时域波形

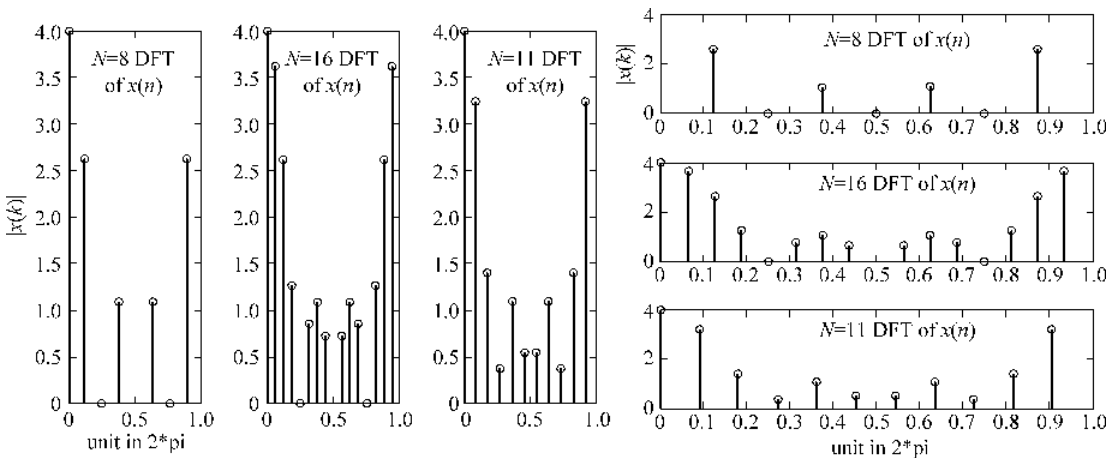


图 3.2.8 例 3.2.2 序列 $x(n)$ 的 8 点、16 点和 11 点 DFT 谱线的幅度波形比较

3.2.2 DFT 和 Z 变换的关系

设序列 $x(n)$ 长 $M=N$ 时, 其 Z 变换和 N 点 DFT 根据定义分别为:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}, \quad \text{且设其 ROC 含单位圆} \quad (3.2.7)$$

$$X(k) \equiv \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.8)$$

显然, 当 $z = z_k = W_N^{-k} = e^{j(2\pi/N)k}$ 则两变换的函数值是相等的; 而 z_k 是 z 平面单位圆上的点, 相邻点的角度间隔 $\omega_N = 2\pi/N$ (弧度)。另外根据 Z 变换和 DTFT 的关系已知: Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上 (即 $z = e^{j\omega}$ 时) 的函数值就是序列 (系统) 的频谱特性 (DTFT)。因此 z_k 处的函数值 $X(e^{j\omega_k})$ 在 $[0, 2\pi]$ 范围的 N 点等间隔采样为 $X(e^{j\omega_k N})$ 。

相邻 z_k 的角度间隔 $\omega_N = 2\pi/N = \omega_l$ 可认为是 DTFT 的两个频率点之间的频率间隔。

综上所述,当给定时域序列 $x(n)$,可按下列步骤从其 Z 变换求出其 N 点 DFT:

$x(n) \rightarrow$ 求 Z 变换, $X(z)$, 且其收敛域包含单位圆,

$\rightarrow$ 令 $z = z_k = W_N^{-k} = e^{j(2\pi/N)k} \equiv e^{j\omega_k N}$,

$\rightarrow$ 代入 $X(z)$, 得到离散频点处的函数值 $X(e^{j\omega_k N})$, 其中: $\omega_N = 2\pi/N$,

$\rightarrow X(k) \equiv X(e^{j\omega_k N})$, 即为 $x(n)$ 的 N 点 DFT 序列。

数字频率间隔 ω_I (弧度) $= 2\pi/N$, 和对应的模拟频率间距 f_I (Hz) 的关系如下:

$$\omega_I (\text{弧度}) = \Omega_I T = 2\pi f_I T \quad (3.2.9a)$$

$$f_I = \omega_I / (2\pi T) = 1/(NT) = f_s/N \quad (3.2.9b)$$

其中, T 为采样序列的时间间隔(秒)。如果给定系统的采样频率 f_s Hz, 则 $f_s = 1/T$ 。

通过上面的分析可以推知 DFT 具有如下的物理意义:

信号 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 是对其 Z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上 N 点等间隔采样, $k=0, 1, \dots, N-1$ 。等效于对 $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi]$ 频率范围内的 N 点等间隔采样 $X(e^{j\omega_k N})$, 序号 k 采样点处的离散数字频率点: $\omega_k = k\omega_I = k2\pi/N$ (弧度); 将数字频率 ω_k 隐去其频率单位, 简记为频率序号 k , 对应的就是 DFT 函数 $X(k)$ 。显然当 DFT 变换区间长度 N 不同, 在 $0 \sim 2\pi$ 范围内对 $X(e^{j\omega})$ 的采样频率间隔 ω_I 和点数不同, 得到的 DFT 结果自然不同。

DFT 的主要特点:

- (1) DFT 是关于有限长序列的离散傅里叶变换。
- (2) DFT 只有 N 个独立复值, 是数字频率域上的有限长序列。
- (3) DFT 隐含有周期性。

这是因为 DFT, IDFT 中, $x(n)$, $X(k)$ 均为有限长序列, 且 $W_N^k = W_N^{(k+mN)}$, 所以 DFT 结果在数字频率域“隐含有”以 N 为周期的特点: $X(k+mN) = X(k)$; $X(k)$ 的 IDFT 结果在离散时间域也“隐含有”以 N 为周期的特点: $x(n+mN) = x(n)$ 。

下面讨论的周期序列与有限长序列的内在联系, 可以从另一个角度, 理解离散傅里叶变换隐含有周期性的特点。

3.2.3 周期序列与有限长序列的内在联系

因周期离散时间序列 $\tilde{x}(n)$ 及其频谱 (DFS) $\tilde{X}(k)$ 都是周期离散序列, 所以只要知道它们一个周期内的内容, 其他的所有情况就完全确定了。因此把前面介绍的离散傅里叶级数 (DFS), 逆离散傅里叶级数 (IDFS) 的无限长序列的序号取值范围都限定在一个周期内, 这时时域周期离散序列 $\tilde{x}(n)$ 可由主值区间上的主值序列表示。

1. 主值区间

设周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$ 。序号取值为 $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 的范围称为主值区间。

2. 主值序列

周期为 N 的序列 $\tilde{x}(n)$ 在主值区间上的函数值称为周期序列的主值序列。常记为

$x(n)$ 。这时, $\tilde{x}(n)$ 又可称为 $x(n)$ 的周期延拓。

周期序列中的主值区间与主值序列如图 3.2.9

所示。

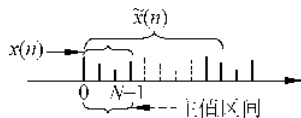


图 3.2.9 周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值区间
和主值序列 $x(n)$

3. 周期序列与主值序列的关系

1) 时域关系

$x(n)$ 是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列; $\tilde{x}(n)$ 是 $x(n)$

的周期延拓。两者可以相互表示:

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1, N \text{ 为周期序列的周期} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mN + n_1) \quad (3.2.11a)$$

其中 $n = mN + n_1$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 的整数区间任意, $0 \leq n_1 \leq N-1$ 。(3.2.11a) 式就是周期延拓的数学表示。习惯上常省略等号右边的下标, 周期延拓简记为

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mN + n), \quad n \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 整数区间上任意} \quad (3.2.11b)$$

2) 频域关系

设 $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 N 点 DFT, $\tilde{X}(k)$ 是周期为 N 的 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS。则在数字频率域 $X(k)$ 是周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列; $\tilde{X}(k)$ 是 $X(k)$ 的周期延拓。

4. 余数运算(求 N 模数)

定义: 余数运算的解为整数域上, 任意数 n 除以 N 所得的余数 n_1 。

由欧几里德除法可得, 任给整数 $n > N$, 总存在整数 m, n_1 , 满足

$$n = mN + n_1. \quad (m \text{ 为整数}), \quad 0 \leq n_1 \leq N-1 \quad (3.2.12)$$

反过来, 如果(3.2.12)式成立, n_1 称为 n 除以 N 的余数。该余数运算可用(3.2.13)式表示:

$$((n))_N = n_1 \quad (3.2.13)$$

这里 $((n))_N$ 应看成余数运算的运算符号。例如,

$\tilde{x}(n)$ 周期为 9, n 为任意整数。主值序列 $x(n_1), 0 \leq n_1 \leq 8$

$$\tilde{x}(25) = x((25))_9 = x(7)$$

$$\tilde{x}(-5) = x((-5))_9 = x(4)$$

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 可通过模 N 的余数运算, 用其主值序列的相应函数值 $x(n_1)$ 求出。

利用列长 N 矩形序列符号 $R_N(n)$ 和余数运算符号, 周期为 N 的周期序列和其主值序列的时域关系可记为紧凑形式:

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3.2.14a)$$

其中, $R_N(n)$ 是矩形序列, $0 \leq n \leq N-1$, 列长 N 。

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N = x(n_1), \quad 0 \leq n_1 \leq N-1, \quad ((n))_N \text{ 是余数运算} \quad (3.2.14b)$$

式(3.2.14b)表明: 周期延拓后任意序号 n 对应的序列值 $\tilde{x}(n)$ 可用主值序列的相应值 $x(n_1)$ 求出。类似地, 主值序列的 DFT $X(k)$ 和周期序列的 DFS $\tilde{X}(k)$ 在数字频率域, 有如下

的相互关系：

$$X(k) = \widetilde{X}(k)R_N(k)$$

(3.2.15a)

其中 $R_N(k)$ 是长为 N 的矩形序列, $k=0,1,\cdots,N-1$ 。

$$\widetilde{X}(k) = X((k))_N, \quad -\infty < k < +\infty, \quad ((k))_N \text{ 是余数运算}$$

(3.2.15b)

式(3.2.15a)表明：有限长序列 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 是其周期延拓序列 $x((n))_N$ 的 DFS $\widetilde{X}(k)$ 的主值序列。

N 点 DFT 从物理上可看成是对离散时间傅里叶变换(DTFT)的(频域)取样,取样间隔为数字频率 ω_I 。类似于对连续信号以间隔 T (秒)的取样,会导致信号频谱的周期延拓,并且延拓周期为 $1/T(\text{Hz})=f_s(\text{Hz})$;在频率域对离散时间傅里叶变换以间隔 ω_I (弧度),即进行频率间隔为 $f_I(\text{Hz})$ 的取样亦会引起时域序列的周期化——周期延拓。原有限长序列 $x(n)$ 经过此周期延拓成为周期序列 $\tilde{x}(n)$,且周期 $=1/f_I=NT$,其中 N 为 $f_s(\text{Hz})$ [即 2π 弧度]范围内的取样点数;隐去具体时间间隔 T (秒),该周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的周期可计为 N 。图 3.2.10 给出相关变换的关系示意。

反过来,抽样后的 DTFT 频谱函数就是周期离散序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 的系数。等于离散频率点 $\omega_k=k\omega_I=(2\pi/N)_k$ 处的 DTFT 函数值：

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(e^{j\omega}) \big|_{\omega=(2\pi/N)k} &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/N)kn} \\ &\equiv \widetilde{X}(k), \quad k \text{ 任意整数。} \end{aligned}$$

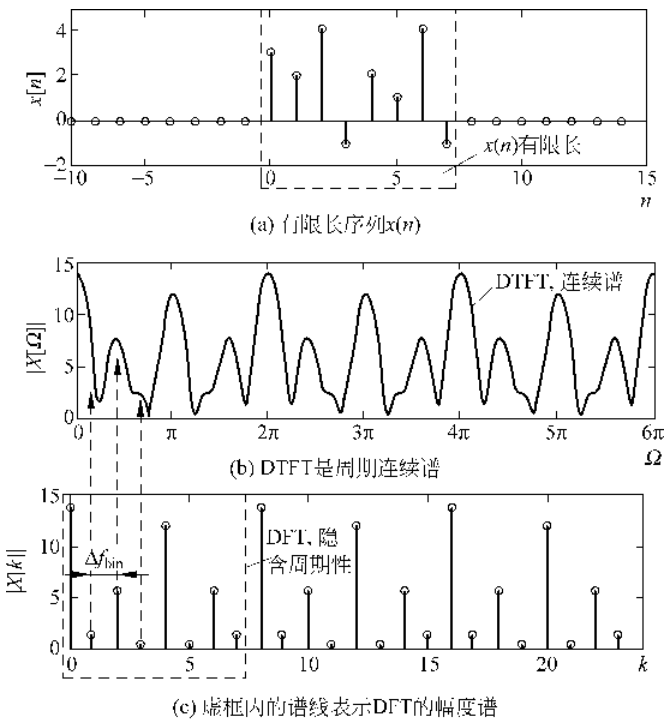


图 3.2.10 序列的 DTFT,DFT,IDFT 的物理特性示意