

动态电路

3.1 内容提要

3.1.1 动态元件

1. 电容元件

(1) 定义

一个二端元件,在任意时刻,其电荷 q 、电压 u 关系能用 q - u 平面上的曲线确定,则称此二端元件为电容元件。

线性时不变电容元件(简称线性电容):若 q - u 平面上的曲线是通过原点的一条直线,且不随时间变化。电荷 q 与其两端电压 u 的关系为

$$q = Cu$$

式中 C 为线性电容。其电路模型及库-伏特性如图 3-1 所示。

电容的单位:法拉(F),简称法。常用 $\mu\text{F}(10^{-6}\text{F})$ 和 $\text{pF}(10^{-12}\text{F})$ 等。

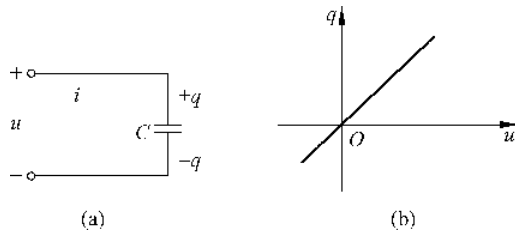


图 3-1

(2) 电容元件的伏安关系

当电容电压 u 发生变化时,聚集在电容极板上的电荷也相应发生变化,形成电容电流,在电压和电流关联参考方向下,线性电容的伏安关系为

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

写成积分形式为

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi$$

重要结论:

a. 任何时刻,线性电容的电流与该时刻电压的变化率成正比。如果电容电压不变,即 du/dt 为零,此时电容上虽有电压,但电容电流为零,这时的电容相当于开路,故电容有隔断直流的作用。

b. 如果在任何时刻,通过电容的电流是有限值,则 du/dt 就必须是有限值,这就意味着电容电压不可能发生跃变而只能是连续变化的。

c. 积分形式表明:在某一时刻 t 电容电压的数值并不取决于该时刻的电流值,而是取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值,即与电流全部过去历史有关。所以,电容具有“记忆”电流的作用,是一种“记忆元件”。

如果只对某一任意选定的初始时刻 t_0 以后电容电压的情况感兴趣,便可将积分形式写为

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \\ &= u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \end{aligned}$$

上式表明,如果知道了由初始时刻 t_0 开始作用的电流 $i(t)$ 以及电容的初始电压 $u(t_0)$,就能确定 $t \geq t_0$ 时的电容电压 $u(t)$ 。

(3) 电容元件的功率与储能

在电压和电流关联参考方向下,线性电容吸收的瞬时功率为

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}$$

电容吸收的能量以电场能量形式储存在电场中。在任何时刻, t 电容储存的电场能量 w_C 等于该电容所吸收的能量,即

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t)$$

上式表明,电容在任何时刻的储能只与该时刻电容电压值有关。在电容电流是有限值时,电容电压不能跃变,实质上也就是电容的储能不能跃变的反映。如果电容储能跃变,则功率将是无限大,当电容电流是有限值时,这种情况是不可能的。

2. 电感元件

(1) 定义

一个二端元件,在任意时刻,其磁链 Ψ_L 、电流 i 关系能用 Ψ_L - i 平面上的曲线确定,则称此二端元件为电感元件。

线性时不变电感元件(简称线性电感):若 Ψ_L - i 平面上的曲线是通过原点的一条直线,且不随时间变化。设电感上磁通 Φ_L 的参考方向与电流 i 的参考方向之间满足右螺旋定则,则任何时刻线性电感的自感磁链 Ψ_L 与其中电流 i 的关系为

$$\Psi_L = Li$$

式中 L 称为线性电感的自感或电感。其电路模型及磁链-电流特性如图 3-2 所示。

电感的单位:亨利(H),简称亨。 L 的常用单位还有 mH(10^{-3} H)和 μ H(10^{-6} H)等。

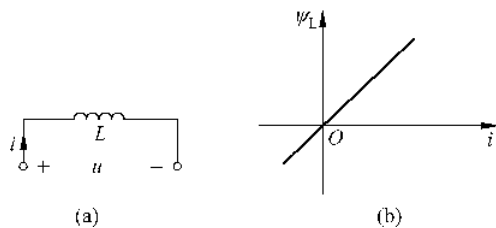


图 3-2

(2) 电感元件的伏安关系

当电感电流发生变化时,自感磁链也相应地发生变化,于是该电感上将出现感应电压 u 。根据电磁感应定律,在电感电流与自感磁链的参考方向符合右螺旋定则、电压和电流参考方向关联时,有

$$u = \frac{d\Psi_L}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

写成积分形式为

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi$$

重要结论:

a. 任何时刻,线性电感的电压与该时刻电流的变化率成正比。如果电感电流不变,即 di/dt 为零,则此时电感中虽有电流但电感电压为零,这时的电感相当于短路。

b. 如果在任何时刻,电感的电压是有限值,则 di/dt 就必须是有限值,这就意味着电感电流不可能发生跃变而只能是连续变化的。

c. 积分形式表明:在某一时刻 t ,电感电流的数值并不取决于该时刻的电压值,而是取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电压值,即与电压全部过去历史有关。所以,电感具有“记忆”电压的作用,也是一种“记忆元件”。

如果只对某一任意选定的初始时刻 t_0 以后电感电流的情况感兴趣,便可将积分形式写为

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \\ &= i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

上式表明,如果知道了由初始时刻 t_0 开始作用的电压 $u(t)$ 以及电感的初始电流 $i(t_0)$,就能确定 $t \geq t_0$ 时的电感电流 $i(t)$ 。

(3) 电感元件的功率与储能

在电压和电流关联参考方向下,线性电感吸收的瞬时功率为

$$p_L = ui = L \frac{di}{dt}$$

电感吸收的能量以磁场能量形式储存在磁场中。在任何时刻 t ,电感所储存的磁场能量 w_L 等于该电感所吸收的能量,即

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

上式表明,电感在任何时刻的储能只与该时刻电感电流值有关。当电感电压是有限值时,电感电流不能跃变,实质上也就是电感的储能不能跃变的反映,如果电感储能跃变,则功率将是无限大,当电感电压是有限值时这种情况是不可能的。

3. 电感、电容的串联和并联

电感及电容的串并联,利用等效概念最终可以证明等效为一个电感或电容。

(1) 电感的串联(见图 3-3)

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

(2) 电感的并联(见图 3-4)

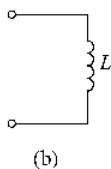
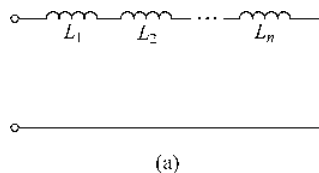


图 3-3

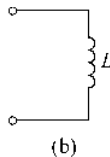
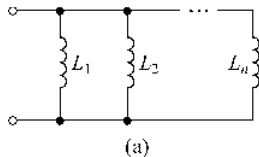


图 3-4

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

(3) 电容的串联(见图 3-5)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

(4) 电容的并联(见图 3-6)

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

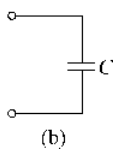
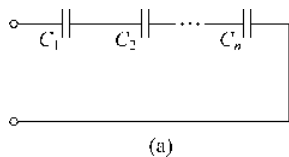


图 3-5

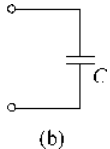
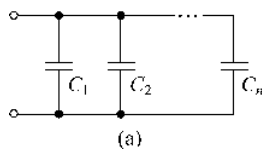


图 3-6

3.1.2 动态电路方程的建立及其解

1. 动态方程的建立

建立电路方程的基本依据是基尔霍夫定律和元件的伏安关系。由于动态元件的伏安关系是微积分关系,因此根据两类约束所建立的动态电路方程是以电流、电压为变量的微分-积分方程,一般可归为微分方程。

(1) 几个名词

一阶电路和 n 阶电路: 如果电路中只有一个独立的动态元件,则描述该电路的是一阶微分方程,相应的电路称为一阶电路。如果电路中有 n 个独立动态元件,那么描述该电路的将是 n 阶微分方程,则相应的电路称为 n 阶电路。

换路：通常把电路中开关的接通、断开或者元件参数的突然变化等统称为换路(以下讨论以 $t=0$ 时为换路时刻为主)。

状态变量：在动态电路的许多电压变量和电流变量中,电容电压和电感电流具有特别重要的地位,它们确定了电路储能的状态。常称电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 为状态变量。通常选择状态变量建立电路方程。

(2) 建立动态方程的一般步骤

① 根据电路建立 KCL 和 KVL 方程,写出各元件的伏安关系。

② 在以上方程中消去中间变量,得到所需变量的微分方程。

(3) 典型动态电路的方程(换路后)

① 一阶 RC 电路方程(见图 3-7)

KVL 方程($t>0$ 时):

$$u_R + u_C = u_S$$

而 $u_R = Ri, i = C \frac{du_C}{dt}$ 代入得:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_S$$

或

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}u_S$$

② 一阶 RL 电路方程(见图 3-8)

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = u_S$$

或

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{1}{L}u_S$$

③ 二阶电路方程(RLC 串联电路,见图 3-9)

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}u_S$$

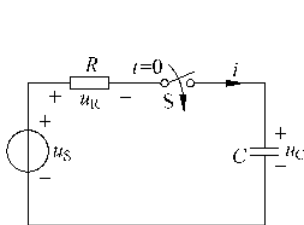


图 3-7

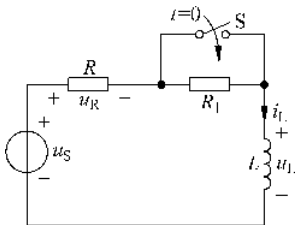


图 3-8

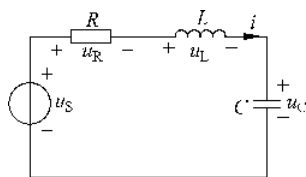


图 3-9

2. 动态电路方程的求解

典型一阶电路的方程,其一般形式可归为

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}y(t) = bf(t)$$

其中, $f(t)$ 表示激励源; $y(t)$ 表示响应。求解微分方程时, 需已知或确定该方程成立之时的初始值。现设 $t=0$ 时换路, 并已知响应的初始值为 $y(0_+)$ 。

线性常系数微分方程的解由两部分组成, 即

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

其中 $y_h(t)$ 是齐次方程 $\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}y(t) = 0$ 的通解(齐次解), 解的形式为 $y_h(t) = Ae^{pt}$ 。 p 由

特征方程 $p + \frac{1}{\tau} = 0$ 确定, 即 $p = -\frac{1}{\tau}$ 。故通解为 $y_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

其中 $y_p(t)$ 一般具有与激励形式相同的函数形式, 则完全响应为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{pt} + y_p(t)$$

其中 A 可由初始值确定。

$$y(0_+) = A + y_p(0_+)$$

$$A = y(0_+) - y_p(0_+)$$

故得一阶电路的方程的解为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-1)$$

3.1.3 电路的初始值

描述动态电路的方程是常系数微分方程, 在求解常系数微分方程时, 需要根据初始值 $y(0_+)$ 确定待定系数。

初始值的计算分独立初始值与非独立初始值。

独立初始值: 状态变量的初始值, 也称初始状态, 它们由电路的初始储能决定。

非独立初始值: 除状态变量以外其余变量的初始值, 它们由电路激励和独立初始值来确定。

1. 换路定律

如果在换路期间, 电容电流 $i_C(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 为有限值, 则电容电压和电感电流不发生跃变, 称为换路定律。设 $t=0$ 时换路, 则有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

2. 独立初始值的计算

由换路定律可见, 独立初始值 $\{u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)\}$ 一般可由 $t=0_-$ 时的 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 来确定。

求初始值的步骤如下:

(1) 画出 $t=0_-$ 时电路。对于直流电路, 若原电路已处稳态, 电容可视为开路, 电感可视为短路, 然后求出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 用换路定律求出独立初始条件, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 、 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

3. 非独立初始值的计算

求非独立初始值, 关键是画出 $t=0_+$ 时电路。其基本步骤可归纳为:

(1) 由 $t=0_-$ 时电路求出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 由换路定律作出 $t=0_+$ 时的等效电路, 此时电容可用大小和方向同 $u_C(0_+)$ 的电压源替代, 电感可用大小和方向同 $i_L(0_+)$ 的电流源替代。

(3) 运用电阻电路分析方法计算初始值。

注意点: 上述换路定律仅在电容电流和电感电压为有限值的情况下才成立。在某些理想情况下, 电容电流和电感电压可以为无限大, 这时电容电压和电感电流将发生跃变, 换路定律不再适用。此时, 可根据电荷守恒和磁链守恒原理确定独立初始值。

3.1.4 动态电路的响应

1. 零输入响应

零输入响应: 换路后仅由电路初始储能作用的响应。

显然, 当外加激励为零时, 由式(3-1)可知: 一阶电路方程的特解 $y_p(t)=0$, $y_p(0_+)=0$, 于是得到零输入响应的一般形式为

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中: $\tau=RC$ (RC 电路)或 $\tau=\frac{L}{R}$ (RL 电路)。

关键: 确定初始值 $y(0_+)$ 及方程中的 τ 值。

重要结论:

(1) 一阶电路中任意变量的响应具有相同的时间常数。其公式中的 R 值为电容或电感以外电路的戴维南等效电阻。

(2) 零输入响应(任意响应)均正比于独立初始值, 即动态元件的初始储能, 称此为零输入线性。

2. 零状态响应

零状态响应: 初始储能为零, 换路后仅由外加激励作用产生的响应。

当外加激励为直流电源时, 由式(3-1)可知: $y_p(t)=0$, $y_p(t)=y_p(0_+)=K$ (常数), 于是得到零状态响应的一般形式为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} = K + [y(0_+) - K]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

显然, $y(\infty)=K$, 即电路达新的稳定状态时对应的稳态值。

当初始储能为零时, 即 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$, $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$, 但非独立初始值 $y(0_+)$ 不一定为零(它取决于外加激励), 故可先考虑计算状态变量的零状态响应(通过状态变量再求其他响应), 并得以下通式

$$u_C(t) = k - ke^{-\frac{t}{\tau}} = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_L(t) = k - ke^{-\frac{t}{\tau}} = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

关键: 确定初始值 $y(\infty)$ 及方程中的 τ 值, 由状态变量可得其他响应。

重要结论: 零状态响应(任意响应)均正比于外加激励值, 称此为零状态线性。

3. 全响应

全响应: 换路后既有初始储能作用, 又有外加激励作用下电路的响应。

在激励为直流电源时, 全响应即为微分方程全解, 即有

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= \underbrace{K}_{\substack{\text{强迫响应} \\ \text{(稳态响应)}}} + \underbrace{[y(0_+) - K]e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{\text{固有响应} \\ \text{(暂态响应)}}}
 \end{aligned}$$

全响应的几种分解方式:

如果除独立电源外,视动态元件的初始储能为电路的另一种激励,则根据线性电路的叠加性质,电路响应是两种激励各自作用所产生的响应的叠加。也就是说,根据响应引起原因的不同,可将全响应分解为零输入响应(由初始储能产生)和零状态响应(由独立电源产生)两种分量:全响应=零输入响应+零状态响应,即

$$y(t) = \underbrace{y_x(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{y_f(t)}_{\text{零状态响应}}$$

基于以上不同观点,电路全响应的几种分解方式可写为

$$\begin{aligned}
 \text{全响应} &= \text{强迫响应} + \text{固有响应} \\
 &= \text{稳态响应} + \text{暂态响应} \\
 &= \text{零输入响应} + \text{零状态响应}
 \end{aligned}$$

3.1.5 直流一阶电路的三要素法

1. 直流一阶电路的三要素法

设 $y(t)$ 为直流一阶有耗电路中的任意变量(电流或电压), $t=0$ 时换路,则 $t>0$ 时 $f(t)$ 的表达式为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

其中: $y(0_+)$ 为换路后 $f(t)$ 相应的初始值; $y(\infty)$ 为换路后电路达稳态时 $f(t)$ 相应的稳态值; τ 为换路后电路的时间常数。对 RC 电路, $\tau=RC$; 对 RL 电路, $\tau=\frac{L}{R}$ 。其中 R 为 L 或 C 元件以外电路的戴维南等效电阻。

2. 三要素法分析一阶动态电路

依据三要素法分析电路的基本步骤为:

(1) 确定电压、电流初始值 $y(0_+)$ 。

关键: 利用 L 、 C 元件的换路定律,作出 $t=0_+$ 时的等效电路。

(2) 确定换路后电路达到稳态时的 $y(\infty)$ 。

关键: 电路达稳态时, L 相当于短路, C 相当于开路。

(3) 确定时间常数 τ 值。

关键: 求 R 值。而 R 的含义是动态元件两端以外令其独立源置零时的等效电阻,具体方法与戴维南定理和诺顿定理中求内部电阻的方法一样。

(4) 代公式: $y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$

3. 注意点

(1) 三要素法只适用于一阶电路,但可以解决一些特殊的二阶电路问题。

(2) 若电路换路时刻为 $t=t_0$, 则三要素法公式为

$$y(t) = y(\infty) + [y(t_{0+}) - y(\infty)]e^{\frac{t-t_0}{\tau}}, \quad t > t_0$$

3.1.6 一阶电路的阶跃响应

1. 阶跃函数

阶跃函数定义

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

它在 $(0_-, 0_+)$ 时域内发生单位阶跃, 称单位阶跃函数。其波形如图 3-10 所示。

2. 阶跃函数的作用

(1) 阶跃函数可以用来描述动态电路中接通或断开直流电压源或电流源的开关动作。

(2) 阶跃函数可用来表示分段常量信号。对图 3-11 所示的幅度为 A 的矩形脉冲波, 其表达式可写为

$$f(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)]$$

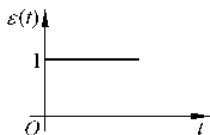


图 3-10

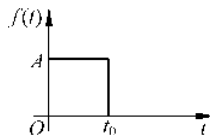


图 3-11

(3) 阶跃函数可用来表示任意函数 $f(t)$ 作用的区间。

$$f(t)\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ f(t) & t > t_0 \end{cases}$$

3. 阶跃响应

(1) 阶跃响应

电路在单位激励函数激励下产生的零状态响应称为单位阶跃响应, 简称为阶跃响应。用 $g(t)$ 表示。

阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 作用于电路相当于单位直流源(1V 或 1A)在 $t=0$ 时接入电路, 因此对于一阶电路, 电路的阶跃响应可用三要素法求解。

(2) 分段常量信号作用于动态电路的响应

在线性时不变动态电路中, 零状态响应与激励之间的关系满足线性和时不变性质。即激励与响应之间有以下基本对应关系:

激励 $\varepsilon(t)$ → 响应 $g(t)$

激励 $A\varepsilon(t)$ → 响应 $Ag(t)$

激励 $\varepsilon(t - t_0)$ → 响应 $g(t - t_0)$

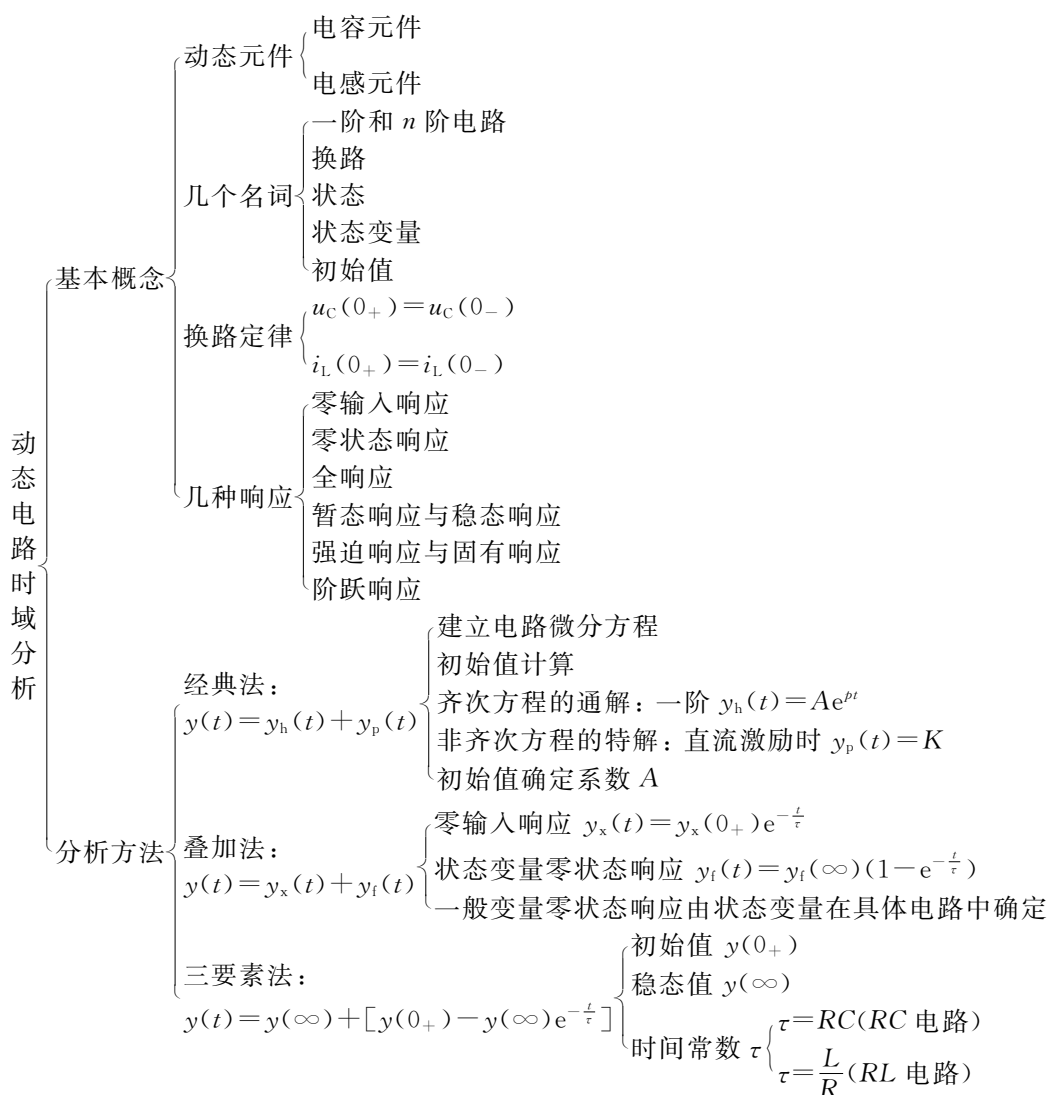
如果分段常量信号作用于动态电路,则可把该信号看成若干个阶跃激励共同作用于电路,则其零状态响应等于各个激励单独作用时产生的零状态响应的叠加。

3.1.7 正弦激励下一阶电路响应

当一阶电路外加电源为正弦量时,其响应也为稳态分量和暂态分量之和。稳态分量是同频率的正弦量,以 $y_p(t) = Y_{pm} \cos(\omega t + \theta)$ 表示,可直接代入方程比较系数求得(后面介绍的相量法更容易求得)。若响应的初始值为 $y(0_+)$,稳态分量初始值为 $y_p(0_+)$,则可得一阶电路在正弦激励下全响应的形式为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} = Y_{pm} \cos(\omega t + \theta) + [y(0_+) - Y_{pm} \cos \theta]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

3.2 知识结构



3.3 基本要求

1. 理解电容、电感元件的定义,掌握线性电容元件和电感元件的端口伏安关系及储能性质。
2. 理解电容元件和电感元件的换路定律,掌握电压、电流初始值的计算方法。
3. 掌握一阶动态电路方程的建立方法,了解其经典解法。
4. 理解零输入响应的概念。掌握一般 RC 电路和 RL 电路的零输入响应求解方法。理解固有频率和时间常数等概念。
5. 理解电路的状态、零状态响应的概念。掌握一般 RC 电路和 RL 电路的零状态响应求解方法。
6. 理解全响应、暂态响应、稳态响应的概念。掌握全响应的求解方法。理解全响应的几种分解方式。
7. 掌握三要素法。
8. 理解阶跃函数的定义、阶跃响应的概念。了解一阶电路阶跃响应的计算方法。
9. 了解换路后正弦函数激励下一阶电路的分析过程。

3.4 解题指导

1. 简单电路问题可直接利用两类约束求解。应熟练掌握两个动态元件的端口伏安关系。
2. 求直流电源作用下的电路稳态值时,关键是把电容元件看作开路,电感元件看作短路,然后利用直流电阻电路的分析方法求解。
3. 求电路变量的初始值时,关键是利用换路定律作出换路后初始时刻的等效电路,电容用电压源替代,电感用电流源替代。然后利用直流电阻电路的分析方法求解。
4. 求解电路的时间常数时,关键是求出动态元件以外的二端网络的戴维南等效电阻。其方法可参见戴维南定理中求等效电阻的几种方法。然后代入时间常数计算式: $\tau = RC$ (RC 电路)或 $\tau = \frac{L}{R}$ (RL 电路)。
5. 求电路的任意响应,可先求状态变量,通过状态变量及其他电路条件再求响应。这种求解过程,有时会很方便。
6. 求零输入响应时,可运用零输入响应通式或三要素法求解。
7. 求零状态响应时,可运用状态变量的零状态响应通式,先求取状态变量,再求出响应。亦可直接运用三要素法。
8. 求解电路的全响应方法共有 3 种:一是经典法(直接列解微分方程);二是叠加法;三是“三要素法”。重点掌握三要素法。
9. 求分段常量信号作用下的一阶电路响应,可运用三要素法或阶跃响应概念进行。
10. 对具体电路问题作具体分析、比较,选用合适的方法。