第3章

控制系统的时域分析法

本章介绍根据系统的时间响应去分析系统的动态性能、稳定性和稳态误差的有关问题。主要内容如下：

（1）自动控制系统的时域分析法，是根据控制系统在典型输入信号作用下的输出响应的时域数学表达式和响应曲线，直接分析系统的动态性能、稳定性和稳态误差等品质的一种方法。时域分析法具有直观、准确的优点。

（2）稳定性是系统能够正常工作的首要条件。系统的稳定性取决于系统自身的结构和参数，与外作用的大小和形式无关。线性系统稳定的充要条件是系统特征方程的根均位于复数平面虚轴的左半 s 平面（即系统的特征根全部具有负实部）。劳斯稳定判据是从系统闭环特征方程的系数出发，间接判定系统稳定性的一种方法。

（3）对于稳定的控制系统，工程中常用单位阶跃响应的最大超调量 $\sigma\%$，调节时间 t_s 和稳态误差等性能指标，评价系统性能的优劣。典型的一阶系统、二阶系统的性能指标与系统的参数有严格的对应关系，必须牢固掌握。对一阶系统、二阶系统分析的结果，往往是分析高阶系统的基础。当高阶系统具有一对闭环主导极点时（通常是一对共轭复数极点），可以转化为一个近似的二阶系统，并以此二阶系统的性能指标估算高阶系统的动态性能。

（4）系统的稳态误差不是系统自身的固有特性，它与系统的结构参数及输入信号的形式都有关。系统的型别 ν 决定了系统对典型输入信号的跟踪能力。提高系统的型别和增大开环传递系数可以减小或消除系统的稳态误差，但一般系统的型别 $\nu\leqslant 2$，开环传递系数过大会使系统动态性能变坏，和稳定性矛盾。在要求高的场合可采用复合控制，对误差进行补偿。

教材习题同步解析

3.1 系统结构图如图3.1所示。已知传递函数 $G(s)=\dfrac{10}{0.2s+1}$，现采用加负反馈的方法，将调节时间 t_s 减小为原来的1/10，并保证总放大倍数不变。试确定参数 K_h 和 K_0 的数值。

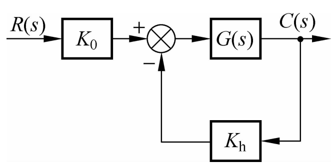

图3.1 系统结构图

解：加负反馈后，系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K_0G(s)}{1+G(s)K_h}=\frac{10K_0/(0.2s+1)}{1+10K_h/(0.2s+1)}=\frac{10K_0/(1+10K_h)}{0.2s/(1+10K_h)+1}$$

化为标准的时间常数表达式

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{10K_0}{1+10K_h}}{\dfrac{0.2s}{1+10K_h}+1}$$

而典型的一阶系统传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

因此,将调节时间 t_s 减小为原来的 1/10,则反馈系统的时间常数 T 应该为原来的1/10。原系统的时间常数为 0.2s,而反馈系统的时间常数为$\frac{0.2}{1+10K_h}$,故有

$$\frac{0.2}{1+10K_h}=\frac{0.2}{10}$$

$$K_h=0.9$$

由于保证总放大倍数不变,则有

$$K=\frac{10K_0}{1+10K_h}=10$$

所以 $K_0=10$。

3.2 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_K(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)}$$

试分别求出 $K=10\mathrm{s}^{-1}$和 $K=20\mathrm{s}^{-1}$时,系统的阻尼比 ξ 和无阻尼自然振荡角频率 ω_n,及单位阶跃响应的超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s。并讨论 K 的大小对过渡过程性能指标的影响。

解:系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K}{0.1s^2+s+K}=\frac{10K}{s^2+10s+10K}$$

二阶系统标准的零极点表达式为

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\text{,闭环传递系数 }K=1$$

比较可得,系统的性能参数为

$$\omega_n=\sqrt{10K},\quad \xi=\frac{5}{\sqrt{10K}}$$

且有 $\zeta\omega_n=5$,说明 K 值的大小对系统的快速性影响较小。

(1) 当 $K=10$ 时,系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{100}{s^2+10s+100}$$

系统的性能参数为

$$\xi=0.5,\quad \omega_n=10$$

系统相关动态性能指标为

$$\sigma\%=\mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times100\%=25.7\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.6\text{s} \quad (\Delta = 5\%)$$

（2）当 $K=20$ 时，系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{200}{s^2 + 10s + 200}$$

系统的性能参数为

$$\omega_n = 10\sqrt{2}, \quad \xi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

系统相关动态性能指标为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 35.4\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.6\text{s} \quad (\Delta = 5\%)$$

由以上分析可见，增大系统开环传递系数 K，将增大系统超调量，使系统振荡加剧，对系统的动态性能不利。

3.3　设图 3.2 为某控制系统的结构图，试确定参数 K_1 和 K_2，使系统的 $\omega_n=6$，$\xi=1$。

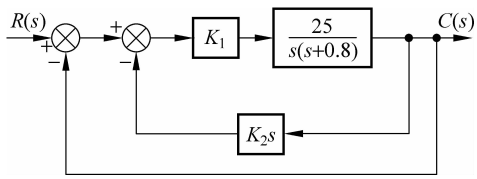

图 3.2　控制系统结构图

解：系统有一条前向通道，两个反馈回路，且回路与回路、回路与前向通道彼此间相互接触，因此，根据梅逊公式，该控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\dfrac{25K_1}{s(s+0.8)}}{1 + \dfrac{25K_1}{s(s+0.8)} + \dfrac{25K_1K_2}{s+0.8}} = \frac{25K_1}{s^2 + (25K_1K_2 + 0.8)s + 25K_1}$$

与标准的二阶系统零极点表达式

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}，闭环传递系数 K = 1$$

比较，并将 $\omega_n=6$，$\xi=1$ 代入，可得

$$\omega_n = \sqrt{25K_1} = 6$$

$$2\omega_n\xi = 25K_1K_2 + 0.8 = 12$$

联立以上方程，得待定参数为

$$K_1 = \frac{36}{25}$$

$$K_2 = \frac{14}{45}$$

3.4　如图 3.3 所示，若某系统加入速度负反馈 τs，为使系统阻尼比 $\xi=0.5$，试确定(1)τ

的取值；(2)系统的动态性能指标 $\sigma\%$ 和 t_s。

解：(1) 该控制系统的闭环传递函数为

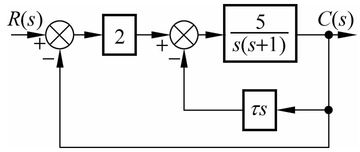

图 3.3 加入速度负反馈的系统

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{1+\dfrac{10}{s(s+1)}+\dfrac{5\tau}{s+1}}=\frac{10}{s^2+(1+5\tau)s+10}$$

与二阶系统标准的零极点表达式比较，可得

$$2\xi\omega_n=1+5\tau$$

并考虑到：$\omega_n=\sqrt{10}$，$\xi=0.5$，所以

$$\tau=\frac{\sqrt{10}-1}{5}=0.432$$

(2) 系统的动态性能指标如下

$$\sigma\%=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times 100\%=25.7\%$$

$$t_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=1.9\text{s}\quad(\Delta=5\%)$$

3.5 实验测得单位负反馈二阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3.4 所示。试确定该系统的开环传递函数 $G_K(s)$。

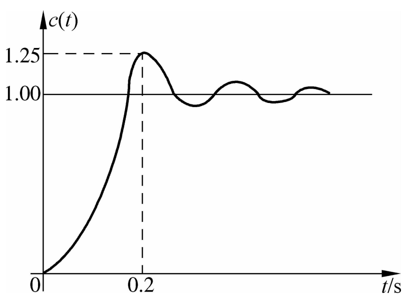

图 3.4 二阶系统的阶跃响应曲线

解：由图 3.4 所示，可知二阶系统的单位阶跃响应峰值时间 t_p 和超调量 $\sigma\%$ 分别为

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{3.14}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.2\text{s}$$

$$\sigma\%=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times 100\%=\frac{1.25-1}{1}\times 100\%=25\%$$

联立以上方程可得

$$\xi=0.515,\quad \omega_n=18.33$$

由于系统的单位阶跃响应稳态值为 1，所以系统的闭环传递系数 $K=1$，故求得系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{335}{s^2+18.88s+335}$$

系统为单位负反馈结构，因此有

$$\Phi(s)=\frac{G_K(s)}{1+G_K(s)}$$

推出系统开环传递函数如下

$$G_K(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s}=\frac{335}{s^2+18.88s}$$

3.6 已知某系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10(s+2.5)}{(s+10)(s+2.6)(s^2+s+1)}$$

试估算该系统的动态性能指标 $\sigma\%$ 和 t_s。

解：将系统化为等效的时间常数表达式

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2.5\left(\frac{1}{2.5}s+1\right)}{2.6\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{2.6}+1\right)(s^2+s+1)}$$

该系统有4个闭环极点，一个闭环零点，分别为 $-s_1=-0.1$，$-s_2=-2.6$，$-s_{3,4}=-0.5\pm0.866\mathrm{j}$，$-z_1=-2.5$。

从闭环系统零极点分布可见：系统的闭环零点 $-z_1$ 与闭环极点 $-s_2$ 作用基本相抵消；而极点 $-s_1$ 相比 $-s_{3,4}$ 离虚轴较远，所决定的动态分量衰减速度较快，对系统的动态响应过程影响较弱。因此，该闭环系统的主导极点为共轭复数极点对 $-s_{3,4}$。在研究系统的动态响应时，忽略其他非主导零极点的影响，该系统可以近似为典型二阶系统

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}\approx\frac{2.5}{2.6(s^2+s+1)}=\frac{0.96}{s^2+s+1}$$

则该系统单位阶跃响应的稳态值为0.96，而动态性能指标可估算为

$$\omega_n=1,\quad \xi=0.5$$

$$\sigma\%=\mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times100\%=25.66\%$$

$$t_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=6\mathrm{s}\quad(\Delta=5\%)$$

根据 MATLAB 仿真，得到此高阶系统准确的动态性能指标为

$$\sigma\%=13\%$$

$$t_s=5.6\mathrm{s}\quad(\Delta=5\%)$$

说明估算结果是比较可信的。

3.7 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

(1) $G_K(s)=\frac{20}{s(s+1)(s+5)}$ (2) $G_K(s)=\frac{10(s+1)}{s(s-1)(s+5)}$

(3) $G_K(s)=\frac{0.1(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.8)(s+3)}$ (4) $G_K(s)=\frac{5s+1}{s^3(s+1)(s+2)}$

试分别用劳斯判据判定系统的稳定性。

解：(1) 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{20}{s^3+6s^2+5s+20}$$

闭环特征方程为：$s^3+6s^2+5s+20=0$，列劳斯表如下：

$$\begin{array}{c|ll} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & 20 \\ s^1 & \frac{6\times5-20\times1}{6}=\frac{5}{3} & \\ s^0 & 20 & \end{array}$$

由于劳斯表的第一列系数均大于零，故该系统稳定。

也可直接利用基于劳斯判据的三阶系统稳定性结论，该结论具体内容如下：

三阶系统特征方程为 $a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$，则系统稳定的充分必要条件为：a_3、a_2、

a_1、a_0 均大于零及 $a_1a_2>a_3a_0$。

对于本系统有：特征方程所有系数均大于零，且 $6\times5>1\times20$，故该系统稳定。

(2) 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{10s+10}{s^3+4s^2+5s+10}$$

系统闭环特征方程为：$s^3+4s^2+5s+10=0$，因此 a_3、a_2、a_1、a_0 均大于零，且 $4\times5>1\times10$，故该系统稳定。

(3) 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{0.1(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.8)(s+3)+0.1(s+2)}$$

系统闭环特征方程为：$s^4+4.3s^3+4.3s^2+1.3s+0.2=0$，列劳斯表如下：

$$\begin{array}{c|lll}
s^4 & 1 & 4.3 & 0.2 \\
s^3 & 4.3 & 1.3 & \\
s^2 & \frac{4.3\times4.3-1.3}{4.3}=4 & \frac{4.3\times0.2}{4.3}=0.2 & \\
s^1 & \frac{4\times1.3-4.3\times0.2}{4}=1.08 & & \\
s^0 & 0.2 & &
\end{array}$$

由于劳斯表的第一列系数全部大于零，故该系统稳定。

(4) 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{5s+1}{s^5+3s^4+2s^3+5s+1}$$

系统闭环特征方程为

$$s^5+3s^4+2s^3+5s+1=0$$

因为特征方程有缺项(缺 s^2 项)，故该系统不稳定。

3.8 试用劳斯判据判定具有下列特征方程式的系统的稳定性。若系统不稳定，指出在 s 平面右半部的特征根的数目。

(1) $s^3+20s^2+9s+100=0$ (2) $s^3+20s^2+9s+200=0$

(3) $s^4+3s^3+s^2+3s+1=0$ (4) $s^5+s^4+4s^3+4s^2+2s+1=0$

(5) $s^6+3s^5+5s^4+4s^3+3s^2+6s+1=0$

解：(1) $s^3+20s^2+9s+100=0$

根据此闭环特征方程，列出劳斯表为

$$\begin{array}{c|ll}
s^3 & 1 & 9 \\
s^2 & 20 & 100 \\
s^1 & \frac{20\times9-100\times1}{20}=4 & \\
s^0 & 100 &
\end{array}$$

由于劳斯表的第一列系数全部大于零，无 s 右半平面的闭环极点，故该系统稳定。

（2）$s^3+20s^2+9s+200=0$

根据此闭环特征方程，列出劳斯表为

$$
\begin{array}{c|ll}
s^3 & 1 & 9 \\
s^2 & 20 & 200 \\
s^1 & \dfrac{20\times 9-200\times 1}{20}=-1 & \\
s^0 & 200 &
\end{array}
$$

劳斯表的第一列元素符号改变的次数为 2，所以该系统不稳定，并有两个在 s 平面右半部的特征根。

（3）$s^4+3s^3+s^2+3s+1=0$

根据此闭环特征方程，列出劳斯表为

$$
\begin{array}{c|lll}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 3 & 3 & \\
s^2 & \dfrac{1\times 3-3}{3}=0(\varepsilon>0) & 1 & \\
s^1 & \dfrac{3\varepsilon-3}{\varepsilon}<0 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

劳斯表第一列系数中出现 0，用一个很小的正数 ε 来代替它，然后继续计算其他元素。由于 ε 是很小的正数，所以 $(3\varepsilon-3)/\varepsilon$ 为负数。

劳斯表的第一列元素符号改变的次数为 2，该系统不稳定，并有两个在 s 平面右半部的特征根。

（4）$s^5+s^4+4s^3+4s^2+2s+1=0$

根据此闭环特征方程，列出劳斯表为

$$
\begin{array}{c|lll}
s^5 & 1 & 4 & 2 \\
s^4 & 1 & 4 & 1 \\
s^3 & \dfrac{1\times 4-4}{3}=0(\varepsilon>0) & 1 & \\
s^2 & \dfrac{4\varepsilon-1}{\varepsilon}<0 & 1 & \\
s^1 & \dfrac{4\varepsilon-1-\varepsilon^2}{4\varepsilon-1}\approx 1 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

劳斯表的第一列元素符号改变的次数为 2，该系统不稳定，并有两个在 s 平面右半部的

特征根。

(5) $s^6+3s^5+5s^4+4s^3+3s^2+6s+1=0$

根据此闭环特征方程,列出劳斯表为

$$\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 5 & 3 & 1 \\
s^5 & 3 & 4 & 6 & \\
s^4 & \dfrac{11}{3} & 1 & 1 & \\
s^3 & \dfrac{35}{11} & \dfrac{57}{11} & & \\
s^2 & \dfrac{35-19\times 11}{35}=-\dfrac{174}{35} & 1 & & \\
s^1 & \dfrac{-\dfrac{174}{35}\times\dfrac{57}{11}-\dfrac{35}{11}}{-\dfrac{174}{35}}>0 & & & \\
s^0 & 1 & & &
\end{array}$$

劳斯表的第一列元素符号改变的次数为2,该系统不稳定,并有两个在 s 平面右半部的特征根。

3.9 设单位负反馈系统的开环传递函数分别为

(1) $G_K(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+4)}$ (2) $G_K(s)=\dfrac{K}{s(s-1)(0.2s+1)}$

(3) $G_K(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s-1)(0.2s+1)}$

试确定使系统稳定的开环增益 K 的取值范围。

解:(1) 该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K}{s^2+6s+8+K}$$

闭环特征方程为

$$s^2+6s+8+K=0$$

对于二阶系统,欲使闭环系统稳定,则保证特征多项式的每个系数都大于零即可:

$$8+K>0$$
$$K>-8$$

(2) 该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K}{0.2s^3+0.8s^2-s+K}$$

闭环特征方程为

$$0.2s^3+0.8s^2-s+K=0$$

s 项的系数为负,所以无论 K 取何值都不能使该系统稳定,该系统为结构不稳定系统。

(3) 该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K(s+1)}{0.2s^3+0.8s^2-s+Ks+K}$$

闭环特征方程为

$$0.2s^3+0.8s^2+s(K-1)+K=0$$

根据基于劳斯判据的三阶系统稳定性结论，欲使该系统稳定，则有：

$$\begin{cases}K>0\\K-1>0\\0.8\times(K-1)>0.2K\end{cases}$$

解得 K 值范围是

$$K>4/3$$

3.10　已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_{\mathrm{K}}(s)=\frac{4}{2s^3+10s^2+13s+1}$$

试用劳斯判据判断系统是否稳定和是否具有 $\sigma=1$ 的稳定裕度。

解：该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{4}{2s^3+10s^2+13s+5}$$

闭环特征方程为

$$2s^3+10s^2+13s+5=0$$

由于闭环特征多项式各系数均大于 0，且 $10\times13>2\times5$，因此该系统稳定。

为了判断系统是否具有 $\sigma=1$ 的稳定裕度，需进行坐标变换。令 $s=z-1$ 带入此闭环特征方程得

$$2z^3+4z^2-z=0$$

由于此闭环特征方程缺常数项，故系统在 z 平面中不稳定，即系统在 s 平面中不具有 $\sigma=1$ 的稳定裕度。

3.11　设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_{\mathrm{K}}(s)=\frac{Ks(s+12)}{(s+5)(s+3)(s+6)}$$

若要求闭环特征方程根的实部分别小于 0、−1、−2，试问 K 值应怎么选取？

解：该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{Ks(s+12)}{s^3+14s^2+63s+90+Ks^2+12Ks}$$

闭环特征方程为

$$s^3+(14+K)s^2+(63+12K)s+90=0$$

欲使该闭环特征方程根的实部小于 0、−1、−2，实际上就是使闭环特征方程根具有相应的稳定裕量（$\sigma=0$、1、2），可利用劳斯判据确定对应的 K 值。

（1）使闭环特征方程根的实部小于 0

即求使系统保持稳定的 K 值。由系统的闭环特征方程，有

$$\begin{cases}14+K>0\\63+12K>0\\(14+K)\times(63+12K)>90\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}K>-14\\K>-5.25\\K<-14.79\quad \text{or}\quad K>-4.46\end{cases}$$

求得满足条件的 K 值为

$$K > -4.46$$

(2) 使闭环特征方程根的实部小于-1

进行坐标变换,令 $s=z-1$,代入闭环特征方程得

$$z^3 + (11+K)z^2 + (38+10K)z + (40-11K) = 0$$

根据劳斯判据,欲使该系统在 z 域稳定的条件是

$$\begin{cases} 11+K > 0 \\ 38+10K > 0 \\ 40-11K > 0 \\ (11+K)\times(38+10K) > 40-11K \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} K > -11 \\ K > -3.8 \\ K < 3.64 \\ K < -13 \quad \text{or} \quad K > -2.9 \end{cases}$$

则在 s 域中满足条件的 K 值为

$$-2.9 < K < 3.64$$

(3) 使闭环特征方程根的实部小于-2

进行坐标变换,令 $s=z-2$,代入闭环特征方程得

$$z^3 + (K+8)z^2 + (8K+19)z + (12-20K) = 0$$

根据劳斯判据,欲使该系统在 z 域稳定的条件是

$$\begin{cases} K+8 > 0 \\ 8K+19 > 0 \\ 12-20K > 0 \\ (K+8)\times(8K+19) > 12-20K \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} K > -8 \\ K > -2.38 \\ K < 0.6 \\ K < -11.33 \quad \text{or} \quad K > -1.54 \end{cases}$$

则在 s 域中满足条件的 K 值为

$$-1.54 < K < 0.6$$

由以上分析可见,对闭环系统的稳定性要求越高,则系统传递系数的取值范围越小。

3.12 已知单位负反馈系统开环传递函数

(1) $G_K(s)=\dfrac{20}{(0.1s+1)(s+2)}$　　(2) $G_K(s)=\dfrac{7(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

(3) $G_K(s)=\dfrac{10(s+0.1)}{s^2(s^2+6s+10)}$

试分别求出各系统的静态位置误差系数 K_p、静态速度误差系数 K_v、静态加速度误差系数 K_a;计算当输入信号 $r(t)=(1+t+t^2)\cdot 1(t)$时的稳态误差 e_{ssr}。

解:

(1) 该系统标准的时间常数表达式为

$$G_K(s) = \frac{10}{(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

系统为 0 型系统,则有

$$K_p = 10,\quad K_v = 0,\quad K_a = 0$$

输入信号 $r(t)=(1+t+t^2)\cdot 1(t)$的拉普拉斯表达式为

$$R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

则系统对应的稳态误差 e_{ssr}为