第3章 离散傅里叶变换

内容提要

本章从离散傅里叶级数(DFS)引出离散傅里叶变换的概念,讨论离散傅里叶变换(DFT)的定义、物理意义、基本性质以及它与其他变换之间的关系。

3.1 傅里叶变换的几种形式及应用

1. 非周期的连续时间、连续频率——傅里叶变换

非周期连续时间信号 $x(t)$和它的频谱密度函数 $X(\mathrm{j}\Omega)$构成的傅里叶变换对为

正变换

$$X(\mathrm{j}\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

2. 周期的连续时间、离散频率——傅里叶级数

周期为 T_0 的连续时间信号 $x(t)$的傅里叶级数展开的系数为 $X(\mathrm{j}k\Omega_0)$,构成的傅里叶变换对为

正变换

$$X(\mathrm{j}k\Omega_0) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

反变换

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}k\Omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}$$

3．非周期的离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换

非周期离散时间信号的傅里叶变换就是前面所说的序列的傅里叶变换，其变换对为

正变换

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

反变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

式中，ω 是数字频率。

如果序列 $x(n)$是模拟信号 $x(t)$经过抽样得到，抽样时间间隔为 T_s，抽样频率为 $f_s=\dfrac{1}{T_s}$，抽样角频率为 $\Omega_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$，由于数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系为 $\omega=\Omega T_s$，因此抽样数字频率 $\omega_s=\Omega_s T_s=2\pi$，则上面的变换对也可写成(代入 $x(n)=x(nT)$，$\omega=\Omega T$)

正变换

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega T}$$

反变换

$$x(nT) = \frac{1}{\Omega_s}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega T}\,\mathrm{d}\Omega$$

4．离散时间、离散频率——离散傅里叶变换

假如序列 $x(n)$是模拟信号 $x(t)$经过抽样得到，抽样时间间隔为 T_s，则频率函数的周期为 $\Omega_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$；如果频率函数也是离散的，其抽样间隔为 Ω_0，则时间函数的周期为 $T_0=\dfrac{2\pi}{\Omega_0}$。当时间函数序列一个周期内的抽样点数为 N 时，有

$$N = \frac{T_0}{T_s} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0}$$

上式表明在频域中频谱函数的一个周期内的抽样点数也为 N，即离散傅里叶变换的时间序列和频率序列的周期都是 N，可以得到表示于一个周期内的常用的离散傅里叶变换对为

正变换

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}$$

反变换

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}$$

表 3.1 对 4 种傅里叶变换形式的离散性和周期性的对应关系做了简单总结。

表 3.1 4 种傅里叶变换形式的归纳

时 域	频 域
连续性和非周期性	非周期性和连续性
连续性和周期性(T_0)	非周期性和离散性($\Omega_0=2\pi/T_0$)
离散性(T_s)和非周期性	周期性($\Omega_s=2\pi/T_s$)和连续性
离散性(T_s)和周期性(T_0)	周期性($\Omega_s=2\pi/T_s$)和离散性($\Omega_0=2\pi/T_0$)

3.2 周期序列的离散傅里叶级数

1. 周期序列

一个周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$,对于所有 n 满足

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+kN),\quad k\text{ 为整数}$$

式中 N 为正整数。

定义 $n=0$ 到 $N-1$ 的周期区间为 $\tilde{x}(n)$ 的主值区间,而主值区间内的 N 个样本值组成的有限长序列称为 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列,即

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

这一过程称为取主值序列,因此对于一个有限长序列

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & n\text{ 为其他值}\end{cases}$$

如将其以 N 为周期进行周期性延拓,则可得

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n)&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)\\&=x(n)_N\\&=x(n[\bmod N])\end{aligned}$$

式中 $(n)_N$ 和 $(n[\bmod N])$ 均表示模 N 运算,即取余数运算。

由于周期序列不是绝对可和的,无论 z 取任何值,其 Z 变换都是不收敛的,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\tilde{x}(n)||z^{-n}|\to\infty$$

因此周期序列不能用 Z 变换法或傅里叶变换来进行讨论。

2. 离散傅里叶级数

连续时间周期信号可以展开为傅里叶级数(DFS),同样,离散时间周期序列也可以

用离散傅里叶级数来表示，如果时间序列的周期为 N，则离散傅里叶级数表示为周期也为 N 的复指数序列(代表正弦型序列)。

$$\widetilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\widetilde{X}(k)$也是一个以 N 为周期的周期序列，称为周期序列$\tilde{x}(n)$的离散傅里叶级数系数。

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

上两式就构成离散傅里叶级数变换对，并分别称为离散傅里叶级数的正变换和反变换。

为方便起见，通常令 $W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$，则 DFS 变换对可写成

正变换

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(k)&=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}\end{aligned}$$

反变换

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n)&=\mathrm{IDFS}[\widetilde{X}(k)]\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)W_N^{-nk}\end{aligned}$$

其中 DFS[·]表示离散傅里叶级数正变换；IDFS[·]表示离散傅里叶级数反变换。

离散傅里叶级数表明$\widetilde{X}(k)$是以 N 为周期的周期序列，其基波成分为 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n}$，$k$ 次谐波成分为 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}$，$\widetilde{X}(k)$为 DFS 的 k 次谐波分量的复系数。由于$\widetilde{X}(k)$的周期性，当已知 $0\to N-1$ 次谐波成分后，根据周期性就可以确定其余的谐波分量，因此，无论时域或频域中都只有 N 个序列值是独立的。

3. 离散傅里叶级数的性质

离散傅里叶级数具有以下一些性质。

1) 线性特性

两个周期均为 N 的离散周期序列$\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$，它们的 DFS 分别为

$$\widetilde{X}_1(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}_1(n)],\quad \widetilde{X}_2(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$$

则有

$$\mathrm{DFS}[a\,\tilde{x}_1(n)+b\,\tilde{x}_2(n)]=a\,\widetilde{X}_1(k)+b\,\widetilde{X}_2(k)$$

式中，a、b为任意常数。由此可见，由两个离散周期序列$\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$线性组合成一个新的周期序列$a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)$的DFS也是周期为$N$的离散周期序列。

2）移位特性

① 时移特性。若周期序列$\tilde{x}(n)$的DFS为$\text{DFS}[\tilde{x}(n)]=\widetilde{X}(k)$，则有

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\,\widetilde{X}(k)$$

② 频移特性（调制特性）。若周期序列$\widetilde{X}(k)$的IDFS为$\tilde{x}(n)$，则有

$$\text{IDFS}[\widetilde{X}(k+l)] = W_N^{nl}\,\tilde{x}(n)$$

3）时域卷积特性

两个周期都为N的周期序列$\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$，它们卷积的结果$\tilde{y}(n)$也是周期为N的周期序列，即

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\,\tilde{x}_2(n-m)$$

这种卷积只限于一个周期内，即m的取值由$[0,N-1]$，因此称为周期卷积，表示所做的是N点圆周卷积和。

周期卷积与DFS的关系如下：

设$\widetilde{X}_1(k)=\text{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$，$\widetilde{X}_2(k)=\text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$，$\widetilde{Y}(k)=\text{DFS}[\tilde{y}(n)]$，若$\tilde{y}(n)=\sum\limits_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\,\tilde{x}_2(n-m)$，则有

$$\widetilde{Y}(k)=\widetilde{X}_1(k)\cdot\widetilde{X}_2(k)$$

这就是时域卷积定理。

从$\tilde{y}(n)=\sum\limits_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$中发现周期卷积形式上像线性卷积，但实际上，周期卷积并不同于线性卷积，它们之间的区别主要有以下几点：

① 周期卷积运算中两个序列都是周期的，卷积的结果也是周期序列；而线性卷积的两序列是有限长的，卷积的结果也是有限长的。

② 周期卷积的求和只在序列的一个周期上进行；而线性卷积的求和在整个序列上进行。

③ 对两个有限长序列线性卷积结果进行周期延拓等于各序列周期延拓后的周期卷积。

4. 频域卷积特性

时域周期序列的乘积，对应于频域的周期卷积。若$\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\cdot\tilde{x}_2(n)$，则有

$$\widetilde{Y}(k) = \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{X}_1(l)\,\widetilde{X}_2(k-l)$$

根据 DFS 和 IDFS 变换的对称性不难证明上式。

重要结论:

(1) 对以 N 为周期的周期序列 $\tilde{x}(n)$,任取一个周期($rN+n_1\leqslant n\leqslant rN+n_1+N-1$)求得的傅里叶级数 $\widetilde{X}_2(k)$,与在 $\tilde{x}(n)$ 主值区($0\leqslant n\leqslant N-1$)求得的傅里叶级数 $\widetilde{X}_1(k)$ 相同。

(2) 对于两个周期为 N 的周期序列,任取一个周期($rN+n_1\leqslant n\leqslant rN+n_1+N-1$)进行周期卷积,卷积结果与主值区($0\leqslant n\leqslant N-1$)内进行的周期卷积结果相同。因此,周期卷积也可以用反褶、平移、相乘、取和的几何法求得。

3.3 离散傅里叶变换

1. 离散傅里叶变换的导出

有限长序列离散傅里叶变换(DFT)对为

正变换 $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

反变换 $$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

2. 离散傅里叶变换的物理意义及隐含的周期性

1) DFT 的物理意义

设 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列,则其傅里叶变换、Z 变换与离散傅里叶变换分别用以下三个关系式表示

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{FT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$X(z)=\mathrm{Z}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

综合以上三式,可以得到如下关系式

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

$$X(k)=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

$$X(k)=X(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

序列的 Z 变换与序列的傅里叶变换之间的关系，即单位圆上的 Z 变换就是序列的傅里叶变换。离散傅里叶变换与序列的傅里叶变换及序列的 Z 变换之间的关系，即离散傅里叶变换是 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0,2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样，也就是对序列频谱的离散化，这就是 DFT 的物理意义。既然离散傅里叶变换是对序列频谱的 N 点等间隔采样，那么当变换区间 N 不同时，所得的结果也是不一样的，当 N 越大表示采样的谱线越密，$|X(k)|$ 的包络线就越逼近 $|X(e^{j\omega})|$ 曲线。

2）DFT 隐含的周期性

DFT 的一个重要特点就是隐含的周期性，从表面上来看，离散傅里叶变换在时域和频域都是非周期的、有限长的序列，但实质上 DFT 是从 DFS 引申出来的，它们的本质是一致的，因此 DFS 的周期性决定 DFT 具有隐含的周期性。这种隐含的周期性在快速傅里叶变换中有着重要的应用，可以从以下三个不同的角度去理解这种隐含的周期性。

（1）从序列 DFT 与序列 FT 之间的关系考虑。

$X(k)$ 是对谱 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0,2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样，当不限定 k 的取值范围在 $[0,N-1]$ 时，那么 k 的取值就在 $[0,2\pi]$ 区间以外，从而形成了对 $X(e^{j\omega})$ 的等间隔采样。由于 $X(e^{j\omega})$ 是周期的，这种采样就必然形成一个周期序列，因此 $X(k)$ 具有隐含的周期性。

（2）从 DFT 与 DFS 之间的关系考虑。

因为

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{x}(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}\end{aligned}$$

当限定 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 时，$\widetilde{X}(k)=X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$，而 $\widetilde{X}(k)$ 是以 N 为周期的，因此不限定 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 时，$X(k)$ 也必然是周期的。

（3）从 W_N^{nk} 的周期性来考虑。

因为 W_N^{nk} 是以 N 为周期的序列，因此当不限定 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 时，有

$$\begin{aligned}X(k+mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k)\end{aligned}$$

所以 $X(k)$ 具有周期性。

3.4 离散傅里叶变换的基本性质

假定 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 N 点的有限长序列，它们的离散傅里叶变换分别为

$$X_1(k) = \mathrm{DFT}[x_1(n)], \quad X_2(k) = \mathrm{DFT}[x_2(n)]$$

1. 线性特性

若两个有限长序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的线性组合为 $x_3(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$，则有

$$\mathrm{DFT}[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(k)+bX_2(k)$$

式中 a、b 为任意常数。

说明：

(1) 若 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的长度均为 N，则 $x_3(n)$的长度为 N。

(2) 若 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的长度不等，$x_1(n)$的长度为 N_1，$x_2(n)$的长度为 N_2，则 $x_3(n)$的长度为 $N=\max[N_1,N_2]$，离散傅里叶变换的长度必须按 N 来计算。例如，如果 $N_1<N_2$，则取 $N=N_2$，将 $x_1(n)$补上 N_2-N_1 个零值后变成长度为 N_2 的序列，然后都作 N_2 点的 DFT，即

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{N_2-1}x_1(n)W_{N_2}^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N_2-1$$

$$X_2(k)=\sum_{n=0}^{N_2-1}x_2(n)W_{N_2}^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N_2-1$$

2. 序列的圆周移位

有限长序列 $x(n)$的圆周移位是以它的长度 N 为周期，将其延拓成周期序列$\tilde{x}(n)$，并将周期序列进行移位，然后取主值区间($n=0\sim N-1$)上的序列值。因而一个有限长序列 $x(n)$的右圆周移位定义为

$$x(n-m)_NR_N(n)=\tilde{x}(n-m)R_N(n)$$

式中 $x(n-m)_N$ 表示 $x(n)$的周期延拓序列$\tilde{x}(n)$的右移位。而 $x(n-m)_NR_N(n)$得到的是周期延拓并移位后的周期序列的主值序列，因而仍是长度为 N 的有限长序列。

1) 时域移位定理

设$\widetilde{X}(k)$表示周期序列$\tilde{x}(n)$的离散傅里叶级数，$X(k)$为有限长序列 $x(n)$的离散傅里叶变换，则序列 $x(n)$圆周移位后所得到的序列 $x(n-m)$的 DFT 为

$$\mathrm{DFT}[x(n-m)]=\mathrm{DFT}[x(n-m)_NR_N(n)]=W_N^{mk}X(k)$$

2) 频域移位定理

对于频域，有限长序列 $X(k)$也可以看成是分布在一个 N 等分的圆周上，若频域的有限长序列 $X(k)$为 $x(n)$的傅里叶变换，即

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$$

则

$$\mathrm{IDFT}[X(k-l)_NR_N(n)]=W_N^{-nl}x(n)$$

上式称为频率移位定理，也称为调制定理，此定理说明时域序列的调制等效于频域的圆周移位。

3. 共轭对称性

设有限长序列 $x(n)$的长度为 N,以 N 为周期的周期延拓序列为

$$\tilde{x}(n) = x(n)_N$$

周期延拓序列$\tilde{x}(n)$的共轭对称分量$\tilde{x}_e(n)$和共轭反对称分量$\tilde{x}_o(n)$分别为

$$\begin{aligned}\tilde{x}_e(n) &= \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]\\ &= \frac{1}{2}[x(n)_N + x^*(N-n)_N]\\ \tilde{x}_o(n) &= \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]\\ &= \frac{1}{2}[x(n)_N - x^*(N-n)_N]\end{aligned}$$

同样,它们满足

$$\tilde{x}_e(n) = \tilde{x}_e^*(-n)$$
$$\tilde{x}_o(n) = \tilde{x}_o^*(-n)$$

则有限长序列 $x(n)$的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$分别定义为

$$\begin{aligned}x_{ep}(n) &= \tilde{x}_e(n)R_N(n)\\ &= \frac{1}{2}[x(n)_N + x^*(N-n)_N]R_N(n)\\ x_{op}(n) &= \tilde{x}_o(n)R_N(n)\\ &= \frac{1}{2}[x(n)_N - x^*(N-n)_N]R_N(n)\end{aligned}$$

由于满足$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$,故

$$\begin{aligned}x(n) &= \tilde{x}(n)R_N(n) = [\tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)]R_N(n)\\ &= x_{ep}(n) + x_{op}(n)\end{aligned}$$

显然长度为 N 的有限长序列 $x(n)$可以分解为圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$之和,$x_{ep}(n)$和 $x_{op}(n)$的长度皆为 N。

DFT 的一系列的对称性质。

(1)
$$\mathrm{DFT}[x^*(n)] = X^*(-k) = X^*(N-k)$$

式中 $x^*(n)$表示 $x(n)$的共轭复序列。

(2)
$$\mathrm{DFT}[x^*(-n)] = X^*(k)$$

(3) 复序列实部的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭对称部分,即

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}\{\mathrm{Re}[x(n)]\} &= X_{ep}(k)\\ &= \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]\end{aligned}$$

(4) 复序列虚部乘 j 的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭反对称部分,即

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}\{\mathrm{j}\mathrm{Im}[x(n)]\} &= X_{\mathrm{op}}(k)\\ &= \frac{1}{2}[X(k)-X^{*}(N-k)]\end{aligned}$$

(5) 若 $x(n)$是实序列,则 $X(k)$只有圆周共轭对称部分,即满足

$$X(k)=X^{*}(N-k)$$

(6) 若 $x(n)$是纯虚数序列,则 $X(k)$只有圆周共轭反对称部分,即满足

$$X(k)=-X^{*}(N-k)$$

(7)
$$\mathrm{DFT}[x_{\mathrm{ep}}(n)]=\mathrm{Re}[X(k)]$$

$$\mathrm{DFT}[x_{\mathrm{op}}(n)]=\mathrm{j}\mathrm{Im}[X(k)]$$

利用这些共轭对称特性,可以用一次 DFT 运算来计算两个实序列的 DFT,从而减少计算量。

4. 圆周卷积

1) 时域圆周卷积

设 $x_1(n)$和 $x_2(n)$都是 N 点的有限长序列,它们的离散傅里叶变换分别为

$$X_1(k)=\mathrm{DFT}[x_1(n)]$$

$$X_2(k)=\mathrm{DFT}[x_2(n)]$$

若

$$Y(k)=X_1(k)\cdot X_2(k)$$

则

$$\begin{aligned}y(n) &= \mathrm{IDFT}[Y(k)]\\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2(n-m)_N\right]R_N(n)\\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1(n-m)_N\right]R_N(n)\end{aligned}$$

此式为序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的圆周卷积,习惯表示为 $y(n)=x_1(n)\circledast x_2(n)$。

利用循环移位特性,可将其写成循环矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}y(0)\\y(1)\\y(2)\\y(3)\\\vdots\\y(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(0) & x_2(N-1) & x_2(N-2) & \cdots & x_2(1)\\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(N-1) & \cdots & x_2(2)\\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & \cdots & x_2(3)\\ x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) & \cdots & x_2(4)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & x_2(N-3) & \cdots & x_2(0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_1(1)\\x_1(2)\\x_1(3)\\\vdots\\x_1(N-1)\end{bmatrix}$$

2) 频域圆周卷积

利用时域和频域的对称性,可以得到频域圆周卷积定理

若

$$y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$$

则

$$\begin{aligned}Y(k)&=\mathrm{DFT}[y(n)]\\&=\frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-1}X_1(l)X_2(k-l)_N\right]R_N(k)\\&=\frac{1}{N}\left[\sum_{l=0}^{N-1}X_2(l)X_1(k-l)_N\right]R_N(k)\end{aligned}$$

3）圆周相关定理

若

$$R_{xy}(k)=X(k)\cdot Y^*(k)$$

则

$$\begin{aligned}r_{xy}(m)&=\mathrm{IDFT}[R_{xy}(k)]\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n-m)_N R_N(m)\\&=\sum_{n=0}^{N-1}y^*(n)x(n+m)R_N(m)\end{aligned}$$

4）用圆周卷积求线性卷积

设 $x_1(n)$是 N_1 点的有限长序列，$x_2(n)$是 N_2 点的有限长序列。

（1）$x_1(n)$和 $x_2(n)$的线性卷积

$$\begin{aligned}y_l(n)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)\\&=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2(n-m)\end{aligned}$$

$x_1(m)$的非零区间为 $0\leqslant m\leqslant N_1-1$，$x_2(n-m)$的非零区间为 $0\leqslant n-m\leqslant N_2-1$，将两个不等式相加，得到

$$0\leqslant n\leqslant N_1+N_2-2$$

在上述的区间外，很明显 $y_l(n)=0$，因为 $y_l(n)$是长度为(N_1+N_2-1)点的有限长序列，等于参与卷积的两个序列的长度之和减 1。

（2）$x_1(n)$和 $x_2(n)$的圆周卷积

先假设 $x_1(n)$和 $x_2(n)$进行 L 圆周卷积，$L>\max(N_1,N_2)$，再讨论 L 等于何值时，圆周卷积才能代表线性卷积。将两个序列都补零为长度为 L 点的序列，即

$$x_1(n)=\begin{cases}x_1(n), & 0\leqslant n\leqslant N_1-1\\0, & N_1\leqslant n\leqslant L-1\end{cases}$$