第1章

随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

自然界和社会上发生的现象是多种多样的.有一类现象,在一定条件下必然发生(或必然不发生),例如,向上抛一石子必然下落;在常温常压条件下,将水冷却到0℃以下,水就会结冰.这类现象称为确定性现象.另一类现象,具有偶然性,在个别试验中呈现出不确定性,在大量的重复试验中,又具有统计规律性,我们称之为随机现象.

例1.1 抛掷一枚均匀硬币,落地后可能正面向上,也可能反面向上.

例1.2 某射手向同一目标连续射击5次,目标被击中的次数可能是0,1,2,3,4,5中的任何一个数.

例1.3 甲、乙二人进行3次定点投篮比赛,比分也会出现多种结果.

例1.4 某急救中心在一个工作日内收到的求助信号,可能是任何一个非负整数.

以上各例描述的都是随机现象,也是自然界中普遍存在的一种现象.它们的共同特点是试验结果的不确定性.人们经过长期观察和深入研究发现,在随机现象表现的这种不确定性背后,却隐藏着内在的规律性.虽然在一次试验之前,人们无法准确预测究竟会出现哪种结果,但在相同条件下进行重复试验时,其结果却呈现出明显的统计规律性.概率论与数理统计正是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

我们将通过随机试验来研究随机现象.

我们把试验作为一个广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面举一些例子来说明:

E_1:掷一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况.

E_2:掷一枚骰子,观察其出现的点数.

E_3:记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.

E_4:袋中装有红、白两色的球各若干,从袋中任取一球,观察其颜色.

E_5:一射手进行射击,直到击中目标为止,观察其射击的情况.

E_6：在一批灯泡中，任意抽取一只，测试其寿命.

以上 6 个试验的例子，其共同的特点是：试验可能结果不止一个，例如，E_1 有两种可能的结果，E_2 有 6 种可能的结果，E_6 可能的结果无穷多；试验前不能确定哪一个结果会出现，并且可以在相同的条件下重复进行试验.

我们将具有以下 3 个特征的试验称为随机试验，简称试验，常用 E 表示.

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现，但试验结束时能确定出现的结果.

1.1.2　随机事件与样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

下面写出了 1.1.1 节中试验 $E_i(i=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 Ω_i.

Ω_1：$\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$.

Ω_2：$\{1,2,3,4,5,6\}$.

Ω_3：$\{0,1,2,\cdots\}$.

Ω_4：{白色，红色}.

Ω_5：$\{+,-+,--+,\cdots\}$，这里“+”表示击中，“−”表示没有击中.

Ω_6：$\{t \mid t\geqslant 0\}$.

随机试验 E 的结果称为随机事件(即样本空间 Ω 的子集)，简称事件. 一般用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件(不能再分解的事件). 由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件.

例如 E_2 中，事件“点数 1”是由一个样本点组成的，它是 E_2 的基本事件；如事件“点数 2”，“点数 3”，…，“点数 6”都是基本事件. 而出现偶数点，出现素数点都不止含有一个样本点，是复合事件而不是基本事件.

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件. 在每次试验中都不发生的事件称为不可能事件，不可能事件也是 Ω 的子集，通常用 $\varnothing$ 表示.

例如 E_2 中，点数不大于 6 的事件是必然事件；点数大于 6 的事件是不可能事件.

1.1.3　事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间为 Ω，$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 E 的事件.

1. 包含与相等

若事件 A 发生必将导致事件 B 发生，则称事件 A 为事件 B 的子事件，记为 $A\subset B$. 或称事件 B 包含事件 A. 可用图 1.1 来直观地说明，图中矩形表示样本空间 Ω，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A.

若事件 B 包含事件 A，且事件 A 也包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

2. 事件的和(或并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的和(或并)，记为 $A\cup B$，如图 1.2 阴影部分所示.

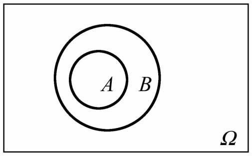

图 1.1

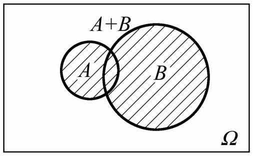

图 1.2

类似地，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

3. 事件之差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 如图 1.3 中阴影部分所示. 不难看出 $A-B=A-AB$.

4. 事件之积(或交)

事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB. 如图 1.4 阴影部分所示.

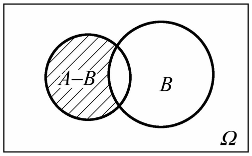

图 1.3

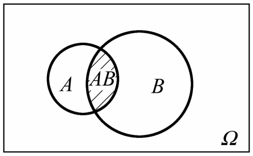

图 1.4

类似地可定义事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件：$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$.

5. 事件互不相容(或互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互斥事件，也称事件 A 与事件 B 互不相容. 基本事件是互不相容的. 图 1.5 直观地表示了事件 A 与事件 B

是互不相容的.

对于互不相容事件的和 $A\cup B$,记作 $A+B$.

一般地,若一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个都互斥,称这组事件两两互斥.

6. 互为对立事件(或逆事件)

若事件 A 与事件 B 互斥,且其和事件为必然事件,即 $AB=\varnothing$,且 $A+B=\Omega$,则称事件 A 与事件 B 是互为对立事件. 记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$. 如图 1.6 所示.

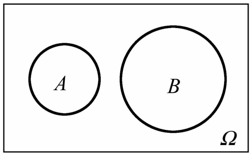

图　1.5

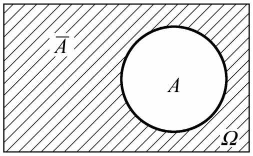

图　1.6

由以上定义可知:对立事件一定互斥,而互斥事件未必对立.

易见:$A-B=A-AB=A\overline{B}$,这在以后的概率计算中十分有用.

7. 互斥事件完备组

设 Ω 为某随机试验 E 的样本空间,如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足下列条件:

①$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$;②$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$;则称事件 A_1,$A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组,或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个剖分.

8. 事件之间的运算规则

与集合的运算类似,事件之间的运算满足下列规则.

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;

(4) 德摩根(De Morgan)律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(5) 包含律:$A\subset A\cup B,B\subset A\cup B;AB\subset A,AB\subset B$;

(6) 吸收律:$A\cup\Omega=\Omega,A\cup\varnothing=A;A\Omega=A,A\varnothing=\varnothing$;

(7) 重叠律:$A\cup A=A,AA=A$;

(8) 对立律:$A\overline{A}=\varnothing;A\cup\overline{A}=\Omega$.

例 1.5　设 A,B,C 为任意三个事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:①三个事件中至少一个发生;②没有一个事件发生;③恰有一个事件发生;④至多有两个事件发生;⑤至少有两个事件发生.

解　① $A\cup B\cup C$;

② $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$;

③ $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

④ $(A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}BC)+(\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C})+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

⑤ $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC=AB\cup BC\cup AC$.

1.2 随机事件的概率

研究随机现象，不仅要知道它可能出现哪些事件，更重要的是要知道各种事件出现的可能性大小，以揭示这些事件的内在统计规律.因此，我们需要一个能够刻画事件出现可能性大小的数量指标，通常地，我们把用来刻画事件 A 出现可能性大小的数量指标称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

1.2.1 古典概率

一般地，若随机试验 E 满足以下两个条件：

(1) 有限性.试验的结果只有有限个，即试验产生有限个基本事件.

(2) 等可能性.每个结果出现的可能性都相同，即每次试验中各个基本事件出现的可能性相同，则称随机试验 E 为古典概型.

定义 1.1 设随机试验 E 是含有 n 个基本事件的古典概型，事件 A 包含 k 个基本事件，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间中所含的基本事件总数}}=\frac{k}{n}.$$

在古典概型下定义的事件的概率为古典概率.

性质 1 对古典概率，有①$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；②$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；③若 A 与 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

例 1.6 盒子里有 10 只球，其中 6 只白球，4 只红球.现从盒子里任取一球，问取到白球的概率是多少？

解 设 A 表示“任取一球为白色”的事件，则有 $P(A)=\frac{3}{5}$.

例 1.7 书架上有 15 本书，其中 5 本精装书，10 本平装书.现随机地抽取 3 本，求至少抽到一本精装书的概率.

解一 设 A 表示“随机抽取的 3 本书中至少有一本精装书”的事件，$A_i(i=1,2,3)$表示“3 本书中恰有 i 本精装书”的事件$(i=1,2,3)$，则有 $A=A_1+A_2+A_3$，所以

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_5^1C_{10}^2}{C_{15}^3}+\frac{C_5^2C_{10}^1}{C_{15}^3}+\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{67}{91}.$$

解二 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{67}{91}$.

例 1.8 袋中有 10 只球，其中 6 只白球，4 只红球.从袋中任取球两次，每次取一只.考

虑两种情况：(1)第一次取一球观察颜色后放回袋中，第二次再取一球，这种情况叫做有放回抽样；(2)第一次取后不放回袋中，第二次再取一球，这种情况叫做不放回抽样. 试分别就上述两种情况，求：取到 2 只球都是白球的概率；取到的 2 只球颜色相同的概率.

解　设 A，B 分别表示“取得的 2 只球都是白球”，“取得的 2 只球都是红球”，于是“取得颜色相同的球”的事件为 $A+B$.

(1) 有放回抽样

试验的基本事件的总数共 $10\times10=100$ 种，事件 A 包含的基本事件数为 $6\times6=36$，事件 B 包含的基本事件数为 $4\times4=16$，于是

$$P(A)=\frac{36}{100}=\frac{9}{25},\quad P(B)=\frac{16}{100}=\frac{4}{25},\quad P(A+B)=\frac{36+16}{100}=\frac{13}{25}.$$

(2) 不放回抽样

试验的基本事件的总数共 $10\times9=90$ 种，事件 A 包含的基本事件数为 $6\times5=30$ 种，事件 B 包含的基本事件数为 $4\times3=12$ 种，故有

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{12}{90}=\frac{2}{15},\quad P(A+B)=\frac{30+12}{90}=\frac{7}{15}.$$

例 1.9　将 3 个不同的球随机地放入 4 个不同的盒子中，试求每个盒子里至多有一个球的概率.

解　3 个球中的每个球都可以放入 4 个盒子中的任何一个，共有 4 种不同的放法. 3 个不同的球放入 4 个盒子共有 $4\times4\times4=4^3$ 种放法，故试验的基本事件总数为 64.

所求事件 A“每个盒子中至多有一个球”包含的基本事件数：第一个球有 4 种放法，第二个球有 3 种放法，第三个球有 2 种放法. 于是，3 个球放入 4 个盒子中去，每个盒子中至多有一个球的放法共有 $4\times3\times2=24$ 种.

故 $P(A)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$.

例 1.9 是典型的“分房”问题. 经常遇到的分房问题有：n 个人的生日问题；n 封信装入 M 个信封(或信筒)的问题；将 n 个人等可能地分配到 $N(n\leqslant N)$ 个房间的问题，等等.

例 1.10　设有 N 件产品，其中有 M 件次品. 从中随机抽取 n 件(不放回抽样)，求其中恰有 $k(k\leqslant M,k\leqslant n)$ 件次品的概率.

解　从 N 件产品中随机抽取 n 件(不放回抽样)，共有 C_N^n 种取法. 恰有 k 件是次品意味着：从 M 件次品中抽取 k 件及从 $N-M$ 件正品中抽取 $n-k$ 件构成，共有 $C_M^k C_{N-M}^{n-k}$ 种取法. 于是所求概率为 $\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

古典概型的局限性很显然：它只能用于试验产生的试验结果(或基本事件数)为有限个且等可能性成立的情况. 但在某些情况下，这个概念可引申到试验结果(或基本事件数)为无限多的情况，这就是所谓的几何概型.

1.2.2 几何概率

一般地，若随机试验 E 满足以下两个条件：

(1) 随机试验 E 的样本空间 Ω 可用一个几何区域 G 表示；

(2) 每个样本点落在 G 中任一区域 D 中的可能性与区域 D 的几何测度(一维空间的长度，二维空间的面积，三维空间的体积)成正比，与其位置及形状无关，则称此随机试验 E 为几何概型.

定义 1.2 设随机试验 E 是几何概型，样本空间 Ω 用几何区域 G 表示，事件 A 对应的区域为 D，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{D\text{ 的几何测度}}{G\text{ 的几何测度}}.$$

在几何概型下定义的事件概率为几何概率.

例 1.11 甲、乙二人约定下午 1 点到 2 点之间在某处碰头，约定先到者等候 10min 即可离去，若二人各自随意地在 1～2 点之间选一个时刻到达该处，求甲、乙两人能碰上的概率.

解 设甲、乙二人到达该处的时间分别是 1 点 x 分和 1 点 y 分，则 $0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60$；若以 (x,y) 作为平面上点的坐标，则所有可能到达的时刻就可用平面上的一个边长为 60 的正方形区域 $(0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60)$ 内的点来表示，则两人能“碰上”的充要条件是：$|x-y|\leqslant 10$ (图 1.7 中阴影部分)，因此，所求概率为

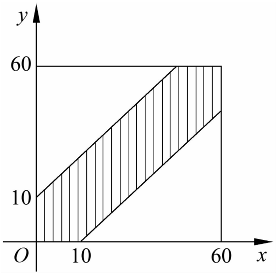

图 1.7

$$P=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}=\frac{60^2-(60-10)^2}{60^2}=\frac{11}{36}.$$

1.2.3 概率的统计定义

概率的古典定义是以等可能为基础的，然而在实际问题中，实现等可能性非常困难，此时人们自然人为地要度量事件出现的可能性大小，最可靠的办法是重复做试验，于是就提出了概率的统计定义.

如果在 n 次重复试验中，事件 A 发生 k 次，则称比值 k/n 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=k/n$. 显然频率 k/n 与试验次数 n 有关，当 n 不同时，k/n 常不同，而即使 n 相同，k/n 也可能不同. 但是，在大量重复试验中，频率就将呈现出稳定性来. 即当试验次数 n 充分大时，事件发生的频率常在一个确定的数值附近摆动，n 越大，这种摆动幅度越小. 这种规律称为频率的稳定性. 例如，历史上曾有许多人做过掷硬币的试验，得到的数据见表 1.1.

表 1.1　掷硬币试验

试验者	投掷次数	“正面向上”的次数	“正面向上”的频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12 000	6019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005
维尼	30 000	14 994	0.4998

容易看出,“正面向上”的频率虽不尽相同,但却都在 0.5 附近摆动,而且当试验次数越大时,“正面向上”的频率也越接近于 0.5. 一般情况下,我们这样引入概率的统计定义.

定义 1.3　在相同条件下重复进行 n 次试验,如果事件 A 发生的频率 k/n 在某个确定数值 p 的附近摆动,并且随着试验次数 n 的增大,摆动幅度越来越小,则称数值 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$,即

$$P(A)=p.$$

显然,掷一枚质地均匀的硬币,根据概率的统计定义,事件“正面向上”的概率为 0.5.

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的,但无法用此定义来计算 $P(A)$ 的值. 但它提供了一种概率估计的方法. 例如在人口的抽样调查中,根据抽样的一小部分去估计全部人口的文盲比例;在工业生产中,依据抽取的一些产品的检验去估计产品的废品率;在医学上,根据积累的资料去估计某种疾病的死亡率,等等.

1.2.4　概率的公理化定义

前面介绍的古典概率与几何概率都是在等可能的前提下给出的,具有很大的局限性,实际中遇到的许多问题都不具有这种等可能性. 概率的统计定义在数学上不够严密. 因为它的主要依据是:当试验次数逐渐增大时,频率所呈现的稳定性. 但是,试验次数究竟大到什么程度,频率又如何摆动等无法确切描述. 概率论作为一门重要的数学分支,也有必要建立一套公理系统,以便使它的所有结论能够形成一个完整的理论体系. 1933 年,苏联大数学家柯尔莫哥洛夫成功地将概率论实现公理化. 下面给出概率的公理化定义.

定义 1.4　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,如果对于 E 的每一事件 A,都有确定的实数 $P(A)$与之对应,并且满足以下条件:

(1) (非负性)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) (规范性)$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

(3) (可加性)对于 Ω 中两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,都有

$$\begin{aligned}P\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\Big)&=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.\end{aligned}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

1.2.5 概率的性质

性质 1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个两两互斥的事件，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 2 设 A 为任一事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证明 因为 $A\overline{A}=\varnothing,A+\overline{A}=\Omega,P(\Omega)=1$，所以 $P(A)+P(\overline{A})=1$，从而 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 3(减法法则) 设 A,B 为两个事件，则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

证明 由于 $A=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}$，故

$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，因此 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

推论 设 A,B 为两个事件，且 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

性质 4(加法法则) 设 A,B 为任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 由于 $A(B-AB)=\varnothing$(图 1.8)，并且 $A\cup B=A+(B-AB)$，故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$. 又由 $AB\subset B$，根据性质 3 的推论可得 $P(B-AB)=P(B)-P(AB)$. 因此

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.1}$$

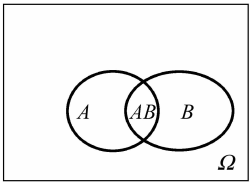

图 1.8

加法法则可以推广到任意有限个事件的和，如对任意三个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

例 1.12 产品有一等品、二等品及废品 3 种，若一、二等品率分别为 0.63,0.35，求产品的合格品率及废品率.

解 令事件 A 表示产品为合格品，A_1,A_2 分别表示一、二等品，显然 A_1 与 A_2 互不相容，且 $A=A_1+A_2$，则合格品率 $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.98$，废品率 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.02$.

例 1.13 设有 100 件产品，其中有 95 件合格品，5 件次品. 从中任取 5 件，试求其中至少有一件次品的概率.

解 方法一：用 $A_i(i=0,1,2,3,4,5)$ 分别表示“5 件产品中有 i 件次品”，用 A 表示“至少有一件次品”，于是 $P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)=\sum_{i=1}^{5}\dfrac{C_5^iC_{95}^{5-i}}{C_{100}^5}\approx 0.2304$.

方法二：由于“至少有一件次品”的对立事件是“无次品”，所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_0)=1-\dfrac{C_{95}^5}{C_{100}^5}=1-0.7696\approx 0.2304$.

第二种解法显示了对立事件概率的性质在计算事件概率时的作用.一般当所要求概率的事件较复杂时,常常考虑先求其对立事件的概率.

1.3　条件概率

1.3.1　条件概率与乘法公式

在实际问题中,除了要考虑某事件的概率,还要考虑在其他事件已出现的条件下该事件的概率.如下例.

例 1.14　一批产品共 100 件,其中合格品 90 件,合格品中的一等品 60 件,现从中任取一件,则(1)取到合格品的概率为 $\frac{90}{100}$;(2)若已知取到的是合格品,则它是一等品的概率为 $\frac{60}{90}$.

为此给出下面的定义以示区别.

定义 1.5　在已知某个事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率,称为事件 B 在事件 A 下的条件概率,记为 $P(B|A)$.相应地,称 $P(B)$为无条件概率.

于是例 1.14 中,若用事件 A 表示取到合格品,用事件 B 表示取到一等品,则 $P(A)=\frac{90}{100}$,$P(B|A)=\frac{60}{90}$.

由此例可以看出,有没有附加条件,对最终结果通常是会有一定影响的.那么,附加条件对最终结果到底会产生什么影响呢?

一般情况下,我们规定:如果 $P(A)>0$,则在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率为

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1.2}$$

类似地,如果 $P(B)>0$,则在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率为

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.3}$$

由条件概率公式(1.2)和(1.3)容易得到

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A); \tag{1.4}$$

$$P(AB)=P(B)P(A \mid B). \tag{1.5}$$

公式(1.4)和(1.5)称为概率的乘法公式.将乘法公式推广到三个事件,可得

$$P(ABC)=P(AB)P(C \mid AB)=P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB). \tag{1.6}$$

一般地,对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,我们有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.7}$$

例 1.15　已知 10 张考签中有 4 张难签,甲、乙两人参加抽签,各抽取一张,甲先抽取,

抽取后不放回.求:(1)甲抽到难签的情况下,乙抽到难签的概率;(2)甲、乙都抽到难签的概率;(3)甲没有抽到难签而乙抽到难签的概率.

解 用事件 A 表示甲抽到难签,用事件 B 表示乙抽到难签.

(1)甲抽到难签的情况下,乙抽到难签的概率为 $P(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;(2)甲、乙都抽到难签的概率为 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$;(3)甲没有抽到难签而乙抽到难签的概率 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$.

例 1.16 100 件产品中含 10 件次品,每次取出一件产品进行检查(不放回抽取),求:(1)前两次连续都取到合格品的概率;(2)前两次取到合格品,而第三次取到次品的概率.

解 事件 $A_i=\{$第 i 次取到合格品$\}$,则:(1)前两次都取到合格品的概率 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}=0.8091$;(2)直到第三次才取到次品的概率为 $P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{10}{98}=0.0826$.

1.3.2 全概率公式

在计算复杂事件的概率时,往往同时利用概率的加法公式和乘法公式,把两者结合起来,就产生了全概率公式.

例 1.17 某工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一产品,其产量分别占全厂产量的 25%,35%,40%,其次品率分别为 5%,4%,2%,现从全厂待出厂的该产品中任取一件,问取到次品的概率.

解 分别用 A_1,A_2,A_3 表示"甲、乙、丙三个车间生产的产品",B 表示"取到次品",于是

$$P(A_1)=25\%,\quad P(A_2)=35\%,\quad P(A_3)=40\%,$$
$$P(B\mid A_1)=5\%,\quad P(B\mid A_2)=4\%,\quad P(B\mid A_3)=2\%,$$

则

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1B+A_2B+A_3B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)\\&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02\\&=0.0345=3.45\%.\end{aligned}$$

将这道题的解法推广到一般情形,就可得到如下的全概率公式.

定理 1.1 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组,则对于任一事件 B,都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i). \tag{1.8}$$

式(1.8)称为全概率公式.

证明　因为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组,即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,并且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,所以

$$B=B\Omega=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB,$$

因此

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1B+A_2B+\cdots+A_nB)=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)\\&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\mid A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).\end{aligned}$$

特别地,当 $n=2$ 时,全概率公式(1.8)变为 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$.

例 1.18　袋中有 10 张卡片,其中 2 张卡片是中奖卡,甲、乙二人依次从该袋中摸出一张,甲先乙后,问甲、乙两人各自中奖的概率.

解　分别用 A_1,A_2 表示"甲、乙两人摸到中奖卡",则

(1) 甲中奖的概率为 $P(A_1)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$;

(2) 乙中奖的概率为 $P(A_2)=P(A_1A_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)$;即 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{5}$.

此例验证了众所熟知的抽签机会均等,中奖与否与抽签顺序无关这一事实. 由以上例题可以看出,全概率公式适用问题的一般特征是:随机试验可分为两个层次,第一个层次的所有可能结果构成一个完备事件组,它们通常是第二个层次事件发生的基础或原因;需要求概率的事件是第二个层次中的事件. 而找到完备事件组是运用全概率公式的关键. 直观地说,只要知道了各种原因发生条件下该事件发生的概率(姑且称其为"原因"概率),则该事件的概率可通过全概率公式求得.

1.3.3　贝叶斯公式

上述问题的"逆问题"可叙述如下:

若已知各种"原因"的概率,且在进行随机试验中该事件已发生,问在此条件下,各原因发生的概率是多少? 如在例 1.17 中考虑这样的问题:若取到的产品是次品,问它是甲车间生产的概率有多大? 即求 $P(A_1|B)$. 利用条件概率公式、乘法公式和全概率公式,得到

$$\begin{aligned}P(A_1\mid B)&=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)}\\&=\frac{0.25\times0.05}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02}\\&=\frac{0.0125}{0.0345}\approx0.3623.\end{aligned}$$

将该问题的解法推广到一般情形,就可得到如下的贝叶斯公式.

定理 1.2 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组,则对于任一事件 $B\subset\Omega$,均有

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B \mid A_i)},\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{1.9}$$

式(1.9)又称为贝叶斯公式.

证明 $P(A_k \mid B)=\dfrac{P(A_kB)}{P(B)}=\dfrac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B \mid A_i)}.$

贝叶斯公式可视为全概率公式的逆概公式,使用公式的关键仍然是找到完备事件组.总之,全概率公式刻画的是"由因推果",而贝叶斯公式刻画的是"知果寻因".

例 1.19 设 8 支枪中有 3 支未经试射校正,5 支枪已经试射校正.一射手用校正过的枪射击时,中靶的概率为 0.8,而用未校正过的枪射击时,中靶的概率为 0.3.今假定从 8 支枪中任取一支进行射击,结果中靶,求所用这支枪是已校正过的概率.

解 分别用事件 A_1,A_2 表示"所取到的枪是校正过的"和"所取到的枪是未校正过的",B 表示"射击中靶",则由题设知

$$P(A_1)=\frac{5}{8},\quad P(A_2)=\frac{3}{8},$$

$$P(B \mid A_1)=0.8,\quad P(B \mid A_2)=0.3,$$

于是由贝叶斯公式得所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1 \mid B)&=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)}\\&=\frac{\frac{5}{8}\times 0.8}{\frac{5}{8}\times 0.8+\frac{3}{8}\times 0.3}\approx 0.8163.\end{aligned}$$

例 1.20 设某种病菌在人群中的带菌率为 0.03,当检查时,由于技术及操作之不完善等原因,使带菌者未必检出阳性反应,而不带菌者也可能呈阳性反应.设

$$P(\text{阳性} \mid \text{带菌})=0.99,\quad P(\text{阳性} \mid \text{不带菌})=0.05,$$

现某人检出阳性,问他"带菌"的概率是多少?

解 用 A_1,A_2 表示"带菌"和"不带菌",B 表示"阳性",则由题设知

$$P(A_1)=0.03,\quad P(A_2)=0.97,\quad P(B \mid A_1)=0.99,\quad P(B \mid A_2)=0.05,$$

则所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1 \mid B)&=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)}\\&=\frac{0.03\times 0.99}{0.03\times 0.99+0.97\times 0.05}=0.3798.\end{aligned}$$

本题可以看出，即使某人检出阳性，也不能过早下结论，因为他带菌的可能性尚不足40%. 理由很简单，因为带菌率极低，绝大部分人均不带菌. 由于检验方法不完善，在众多不带菌的人中会检出许多呈阳性者. 可是一个不懂概率的人可能会这样推理：由于不带菌时检出阳性的机会才0.05，若某人呈阳性，说明有0.95的机会带菌. 实际不然. 大而言之，概率思维是人们正确观察事物而必备的文化修养.

1.4 事件的独立性

1.4.1 事件独立性的概念

条件概率反映了一个事件的发生对另一个事件的概率的影响. 一般来说，无条件概率 $P(B)$ 与条件概率 $P(B|A)$ 是不一样的，例如，若 $P(B|A)>P(B)$，则 A 的发生使 B 发生的可能性增大了，即 A 促进了 B 的发生. 但在某些特殊的情况下，这两者又是相等的，即若 $P(B|A)=P(B)$，则事件 A 发生与否对事件 B 发生的可能性毫无影响，此时，在概率论上也就是说，事件 A 与事件 B 是相互独立的.

当 $P(B)=P(B|A)$ 时，乘法公式变为 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$. 我们可由此给出两个事件相互独立的定义.

定义 1.6 设 A,B 是两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称 A 与 B 独立.

显然，若 A 与 B 独立，且 $P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，则

$$P(B \mid A) = P(B), \quad P(A \mid B) = P(A).$$

对于相互独立的事件，有以下定理.

定理 1.3 若事件 A 与事件 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，以及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

证明 只证明 A 与 $\overline{B}$ 是相互独立的，其余两条同法可证.

由于 A 与 B 独立，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A-B) = P(A-AB) = P(A)-P(AB) \\ &= P(A)-P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}). \end{aligned}$$

即 A 与 $\overline{B}$ 是相互独立的.

事件的相互独立性是一个非常重要的概念，它还可以推广到多个事件的情形.

对于三个事件 A,B,C，如果

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$；

(2) $P(AC)=P(A)P(C)$；

(3) $P(BC)=P(B)P(C)$；

(4) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$；

我们称事件 A,B,C 相互独立.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意的 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(2\leqslant k\leqslant n)$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

显然，如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足，对于任意的 $i\neq j$，都有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j,$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两独立的.

特别值得注意的是，n 个事件两两独立，并不能保证它们相互独立，甚至不能保证它们中的三个相互独立.

在实际问题中，我们不常用 $P(AB)=P(A)P(B)$ 去判断事件 A 与 B 是否独立，而是相反，从事件的实际角度去分析判断其不应有关联，因而是独立的. 再利用事件的独立性去计算较为复杂的事件的概率. 例如，两个工人分别在两台机床上进行生产，彼此各不相干，则各自是否生产出废品或生产多少废品这类事件应是独立的. 一个人的收入与其姓氏笔画这类事件凭常识推断，认定是独立的.

例 1.21 加工某零件共需要经过三道工序，第一，二，三道工序的次品率分别是 2%，3%，5%. 假定各道工序是互不影响的，问加工出来的零件的次品率是多少？

解 用 A_i 表示“第 i 道工序出现次品”$(i=1,2,3)$，以 B 表示“加工出来的零件是次品”. 由于各道工序是互不影响的，故 A_1,A_2,A_3 是相互独立的.

方法一 由 $B=A_1\cup A_2\cup A_3$，可得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})\\&=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\\&=1-0.98\times0.97\times0.95=0.096\,93.\end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&\quad-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)P(A_2)\\&\quad-P(A_2)P(A_3)-P(A_1)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\&=0.02+0.03+0.05-0.02\times0.03-0.03\times0.05\\&\quad-0.02\times0.05+0.02\times0.03\times0.05\\&=0.096\,93.\end{aligned}$$

1.4.2　独立试验概型

在前面我们就提到,随机现象的统计规律性只有在相同条件下进行大量的重复试验或观察才呈现出来.如果 n 次重复试验满足以下两个特点:

(1) 每次试验的条件都相同,且可能的结果为有限个;

(2) 各次试验的结果互不影响,或者称为相互独立的;

则称这样的 n 次重复试验为 n 次独立试验概型.

特别地,在 n 次独立试验概型中,当每次试验的可能结果只有两个,即只有两个事件 A 及 $\overline{A}$,且 $P(A)=p$,$P(\overline{A})=1-p(0<p<1)$ 时,称为 n 重伯努利试验,或 n 重伯努利概型.例如,在抛一枚硬币的试验中,考虑正、反面出现的情况;在有放回地抽查产品的试验中,考虑正品与次品被抽到的情形;射击时击中与未击中等试验都是伯努利概型.

关于 n 重伯努利概型,有如下的定理.

定理 1.4　在 n 重伯努利试验中,若 $P(A)=p(0<p<1)$,则事件 A 在 n 次试验中恰好发生 k 次的概率为

$$P(n,k,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n. \tag{1.10}$$

证明　由于在伯努利试验中,各次试验的结果相互独立,所以事件 A 在指定的 k 次试验中发生,而在其余的 $n-k$ 次试验中不发生,如在前 k 次试验中发生,而在后 $n-k$ 次试验中不发生的概率为

$$\underbrace{p\cdot p\cdot\cdots\cdot p}_{k\text{个}}\cdot\underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{n-k\text{个}}=p^k(1-p)^{n-k}.$$

又因为在 n 次试验中,事件 A 到底在哪 k 次试验中发生的情况共有 C_n^k 种(可理解为从 n 次试验中选出 k 次试验,在这 k 次试验中事件 A 发生,而在其余的 $n-k$ 次试验中事件 A 不发生),且这 C_n^k 个事件是互不相容的,按照概率的加法公式得到:在 n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P(n,k,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

例 1.22　设有 8 门大炮独立地同时向一目标各射击一发炮弹,若有不少于两发炮弹命中目标时,目标被击毁,如果每门炮弹命中目标的概率为 0.6,求击毁目标的概率.

解　设 A 表示“每一门炮弹击中目标”这一事件,则 $P(A)=0.6$.本题是 $n=8$ 的伯努利概型,按定理 1.4 得所求概率为

$$\begin{aligned}p&=\sum_{k=2}^{8}C_8^k\times 0.6^k\times(1-0.6)^{n-k}\\&=1-C_8^0\times 0.6^0\times(1-0.6)^8-C_8^1\times 0.6\times(1-0.6)^7\\&=0.991.\end{aligned}$$

从上面的例子可以看出,利用伯努利概型解决问题的关键是把问题正确地归结为这一概型.一般而言,当所考虑的问题可视为独立观测若干次,每次只考虑非此即彼的两种状态

(如“合格”与“不合格”,“开动”与“不开动”,“击中”与“未击中”等)时,往往可以归结为伯努利概型.伯努利概型是一个应用很广的概型,在以后的章节中,我们还将用随机变量的观点进一步研究它.

习 题 1

一、填空题

1. 写出下面随机事件的样本空间:

(1) 袋中有 5 只球,其中 3 只白球 2 只黑球,若从袋中任意取一球,观察其颜色________;若从袋中不放回地任意取两次球(每次取出一个)观察其颜色________;若从袋中不放回地任意取 3 只球,记录取到的黑球个数________;

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数________.

2. 设 A,B,C 是同一个样本空间的任意的三个随机事件,根据概率的性质,则

(1)$P(\bar{A})=$________;(2)$P(B-A)=P(B\bar{A})=$________;(3)$P(A\cup B\cup C)=$________.

3. 设 A,B,C 是三个随机事件,试以 A,B,C 的运算来表示下列事件:(1)仅有 A 发生________;(2)A,B,C 中至少有一个发生________;(3)A,B,C 中恰有一个发生________;(4)A,B,C 中最多有一个发生________;(5)A,B,C 都不发生________;(6)A 不发生,B,C 中至少有一个发生________.

4. A,B,C 是三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$,$P(AC)=1/8$,$P(AB)=P(BC)=0$,则A,B,C 中至少有一个发生的概率为________;A,B,C 都发生的概率为________;A,B,C都不发生的概率为________.

5. 袋中有 n 只球,记有号码 $1,2,3,\cdots,n(n>5)$,则事件(1)任意取出两球,号码为 1,2 的概率为________;(2)任意取出三球,没有号码为 1 的概率为________;(3)任意取出五球,号码 1,2,3 中至少出现一个的概率为________.

6. 从一批由 5 件正品、5 件次品组成的产品中,任意取出三件产品,则其中恰有一件次品的概率为________.

7. 设事件 A,B,如果 $B\subset A$ 且 $P(A)=0.7$,$P(B)=0.2$,则 $P(B|A)=$________.

8. 每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$,重复进行试验直到第 n 次才取得成功的概率是________.

9. 设 $P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,$P(A\cup B)=0.6$,则 $P(AB)=$________.

10. 设 $P(A)=0.6$,$P(A-B)=0.2$,则 $P(\overline{AB})=$________.

二、选择题

1. 对于任意两事件 A,B,与事件 $A\cup B=B$ 不等价的是________.

A. $A\subset B$　　B. $\bar{B}\subset\bar{A}$　　C. $A\bar{B}=\varnothing$　　D. $\bar{A}B=\varnothing$

2. 已知事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，且 $P(A)=0.4$，则 $P(B)=$________.

A. 0.4　　B. 0.5　　C. 0.6　　D. 0.7

3. 有 r 个球，随机地放在 n 个盒子中（$r\leqslant n$），则某指定的 r 个盒子中各有一球的概率为________.

A. $\dfrac{r!}{n^r}$　　B. $C_n^r\dfrac{r!}{n^r}$　　C. $\dfrac{n!}{r^n}$　　D. $C_r^n\dfrac{n!}{r^n}$

4. 抛掷 3 枚均匀对称的硬币，恰好有两枚正面向上的概率是________.

A. 0.125　　B. 0.25　　C. 0.375　　D. 0.5

5. 设 A,B 为两个随机事件，则 $P(A\cup B)=$ ________.

A. $P(A)+P(B)$　　B. $P(A)+P(B)-P(AB)$

C. $P(A)+P(AB)$　　D. $P(A)+P(B)+P(AB)$

6. 事件 A,B 满足________时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

A. A,B 必须相互独立　　B. A,B 必须互不相容

C. A,B 必须同时发生　　D. 没有条件

7. 每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，重复进行试验直到第 n 次才取得 r 次成功的概率是________.

A. $C_n^{n-1}p(1-p)^{n-1}$　　B. $C_n^1p(1-p)^{n-1}$

C. $C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$　　D. $C_{n-1}^1p(1-p)^{n-1}$

8. 设 $P(A)>0,P(B)>0$，且 A 与 B 互不相容，则________一定成立.

A. A 与 B 对立　　B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

C. A 与 B 独立　　D. A 与 B 不独立

9. 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则 A 与 B ________.

A. 互为对立事件　　B. 互不相容

C. 不相互独立　　D. 相互独立

10. 设 A 与 B 满足 $P(B|A)=1$，则________.

A. A 是必然事件　　B. $P(B|\overline{A})=0$

C. $A\supset B$　　D. $P(A)\leqslant P(B)$

三、计算题

1. 将 3 个球随机放在 4 个杯子中，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

2. 抛两颗骰子，若 $A=\{$朝上的点数之和是 6$\}$，$B=\{$朝上的点数之和是 6 且有一颗的点数超过 3$\}$，$C=\{$已知朝上的点数之和是 6，在此条件下有一颗的点数超过 3$\}$，试求 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$.

3. 袋中有 4 个红球 3 个白球，如果每次取一个球，取后放回，共取两次，试求(1)第二次取出红球的概率；(2)两次都取出红球的概率.

4. 从一副 52 张的扑克牌中任选 4 张，求下列各事件的概率：(1)4 张花色各不相同；

(2)4 张是同一花色；(3)4 张花色不全相同.

5. 将 2 封信向 3 个邮箱中投寄，求第一个邮箱内没有信的概率.

6. 在区间(0,1)中随机地取两个数，求事件“两数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率.

7. 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

8. 甲、乙两人射击，甲击中的概率为 0.6，乙击中的概率为 0.8，二人同时射击，并假定中靶与否是独立的，求：(1)中靶的概率；(2)甲中乙不中的概率；(3)甲乙同时都不中的概率.

9. 盒中有 12 个新乒乓球，每场比赛任取 3 个，用完后放回去，共赛 3 场，假设球均未损坏. 试求：(1)3 场比赛取到的都是新球的概率；(2)第二场比赛取到两新一旧 3 个球，而第三场比赛取到一新两旧 3 个球的概率.

10. 设三箱同类型产品各由三家工厂生产，已知第一家、第二家工厂产品的废品率均为 2%，第三家工厂产品的废品率为 4%，现任取一箱，从该箱中任取一件产品，(1)试求所取产品为废品的概率；(2)若取到的该件产品是废品，求它是由第一个厂家生产的概率.

11. 对某种药物的疗效进行研究，假定这药物对某种疾病的治愈率为 0.8，现在 10 个患此病的病人中同时服用此药，求其中至少有 6 个病人治愈的概率.

12. 电灯泡使用寿命在 1000h 以上的概率为 0.2，试求 3 个灯泡在使用 1000h 后，最多有 1 个损坏的概率.

第2章

一维随机变量及其分布

在第1章研究随机试验时，只是孤立地考虑个别随机事件的概率，研究方法缺乏一般性，并且不便于引入数学工具.解决这些问题的关键是将随机试验的结果与实数对应起来，将随机试验的结果数量化，即引入随机变量及其分布函数的概念.本章主要介绍一维随机变量与分布函数的概念、离散型随机变量和连续型随机变量、几种重要的随机变量及随机变量函数的分布.

2.1 一维随机变量的概念

为了进一步研究随机现象的统计规律性，需要将样本空间和随机事件数量化，这就引入了随机变量的概念.随机变量的引入是概率论发展史上的重大事件，使概率论的研究前进了一大步.正是借助于随机变量这个有力工具，概率论的理论才得以应用到统计推断中去.

例 2.1 投掷一枚硬币，有正面向上和反面向上两种结果：ω_1 表示正面向上，ω_2 表示反面向上，记 $\omega_1=1$，$\omega_2=0$，则样本空间为 $\Omega=\{1,0\}$，且每一次投掷都对应唯一的一个实数.

例 2.2 在全班30人中随机抽取一名学生，观察其身高(cm)，可能有30种结果：以 ω_i 表示"抽中第 i 号学生"，x_i 为其对应的身高，样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{30}\}$.这样，每一次随机抽取的学生都对应唯一的一个实数.

在例2.1和例2.2中，我们引入了样本空间 Ω 上的实值函数，即 Ω 内每一点与实数的对应关系，称之为随机变量，下面给出其定义.

定义 2.1 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，如果对于每一个可能的试验结果 $\omega\in\Omega$，都存在唯一的实数值 $X(\omega)$ 与之对应(图2.1)，则称 $X(\omega)$ 为一个一维随机变量，简记为 X.随机变量通常用大写字母 X,Y,Z 等来表示.

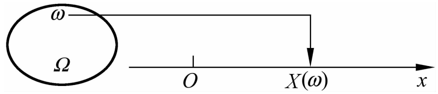

图 2.1

随机变量就是在试验结果中能取不同值的量，它的取值由试验结果而定，由于试验结果具有随机性，所以它也具有随机性.