

第3章

连续信号的傅里叶变换与频域分析

3.1 非周期信号的傅里叶变换

1. 傅里叶变换的定义

在高等数学以及电路等课程中我们已熟悉了周期信号的傅里叶级数：一个周期为 T （角频率为 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ）的周期信号，可展开成指数形式的傅里叶级数：

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \\ \text{其中, } F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

为了直观地表示出信号中所含各频率分量的大小，以各频率分量 ($n\Omega$) 为横坐标，以各分量的幅度 $|F_n|$ 为纵坐标，可画出信号的幅度谱。周期信号的频谱是一条条的离散谱线，相邻谱线之间的间隔是 Ω ，每条谱线的幅度是 F_n 。现在我们由周期信号的傅里叶级数推导出非周期信号的傅里叶变换。

当周期信号的周期 $T \rightarrow \infty$ 时可作为非周期信号来处理。此时，周期信号的频谱发生如下变化：

- (1) 相邻谱线的间隔 Ω 趋近于无穷小，从而周期信号的离散谱密集成为连续谱；
- (2) 各频率分量的幅度 F_n 也趋于无穷小。因此，非周期信号的频谱不能再用周期信号的频谱 F_n 来表示了。

Ω 和 F_n 都趋于无穷小，但两个无穷小量的比值有望不趋于零，因此 $2\pi \frac{F_n}{\Omega}$ 有望不趋于零。为了描述非周期信号的频谱特性，我们引入频谱密度的概念，令

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{F_n}{\Omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T \quad (3.2)$$

函数 $F(j\omega)$ 可以看作是单位频带的振幅，类似于物质中单位体积的质量是密度，我们称 $F(j\omega)$ 为频谱密度函数。

下面推导 $F(j\omega)$ 的表达式。

由式(3.1)可得

$$\begin{cases} F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T e^{jn\Omega t} \cdot \frac{1}{T} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

当周期 $T \rightarrow \infty$ 时, Ω 趋近于无穷小, 取其为 $d\omega$, $n\Omega$ 是变量, 当 $\Omega \neq 0$ 时, 是离散值, 当 Ω 趋近于无穷小时, 它就成为连续变量, 取为 ω 。因为 $T \rightarrow \infty$, 所以式 (3.3) 中积分限为 $-\infty \rightarrow \infty$, 求和符号也要相应改写为积分, 同时 $\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}$ 将趋近于 $\frac{d\omega}{2\pi}$ 。于是, 式 (3.3) 和式 (3.4) 成为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{def}}{=} F(j\omega) \quad (3.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.6)$$

式 (3.5) 称为函数 $f(t)$ 的傅里叶变换, 有些教材中将 $F(j\omega)$ 记为 $F(\omega)$ 或 $F(e^{j\omega})$, 都是相同的含义。式 (3.6) 称为函数 $F(j\omega)$ 的傅里叶逆变换 (或反变换)。 $F(j\omega)$ 称为 $f(t)$ 的频谱密度函数, 简称为频谱函数, 而 $f(t)$ 称为 $F(j\omega)$ 的原函数。式 (3.5) 和式 (3.6) 也可用符号简记作

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad (3.7)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] \quad (3.8)$$

$f(t)$ 与 $F(j\omega)$ 的对应关系还可简记为:

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad (3.9)$$

频谱密度函数 $F(j\omega)$ 是一个复函数, 它可写为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega) \quad (3.10)$$

式中 $|F(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 分别是模和相位, 谱图 $|F(j\omega)| \sim \omega$ 称为幅度谱, 谱图 $\varphi(\omega) \sim \omega$ 称为相位谱。 $R(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 分别是 $F(j\omega)$ 的实部和虚部。

下面对傅里叶变换的公式做进一步分析, 以说明信号傅里叶变换的意义:

式 (3.6) 可写成三角函数形式:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \\ &\quad + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2 节将证明, $|F(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数, $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数, 因此 $|F(j\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ 是 ω 的奇函数, 而 $|F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ 是 ω 的偶函数。因此, 式 (3.11) 中第二项积分的被积函数是 ω 的奇函数, 其积分值为零, 而第一个积分中的被积函数是 ω 的偶函数, 有

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \quad (3.12)$$

式 (3.12) 表明, 非周期信号 $f(t)$ 和周期信号一样, 也可以分解成许多不同频率的正、余弦分量的和。不同的是, 由于非周期信号的 $T \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$, 于是它包含了从零到无穷大的所有频率分量。

需要说明, 前面在推导傅里叶变换时并未遵循数学上的严格步骤。数学证明指出, 函数 $f(t)$ 的傅里叶变换存在的充分条件是在无限区间内 $f(t)$ 绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

但它并非必要条件。当引入奇异函数(如冲激函数)的概念后,许多不满足绝对可积条件的函数也能进行傅里叶变换,这给信号与系统分析带来很大方便。

2. 典型非周期信号的傅里叶变换

下面利用傅里叶变换的表达式求几种典型非周期信号的频谱。

1) 门函数(或称矩形脉冲)

图 3.1(a)所示为门函数,其脉冲宽度为 τ ,脉冲幅度为 A ,用符号 $g_{\tau}(t)$ 表示。求其频谱函数。

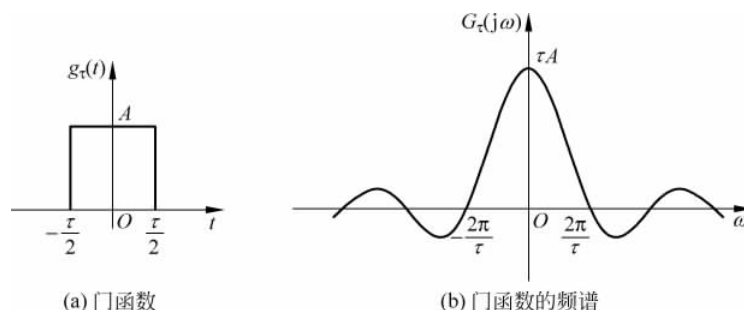


图 3.1 门函数及其频谱

解: 图 3.1(a)的门函数可表示为

$$g_{\tau}(t) = \begin{cases} A, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (3.13)$$

由式(3.5)可求得其频谱函数为

$$\begin{aligned} G_{\tau}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{\tau}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = A \frac{e^{-j\omega \tau/2} - e^{j\omega \tau/2}}{-j\omega} \\ &= \frac{2A \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)}{\omega} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

其频谱图如图 3.1(b)所示。分析该频谱的特点如下:

(1) 非周期的矩形脉冲信号其频谱是连续谱,其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似。

(2) 门函数的频谱以 $\text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$ 的规律变化,分布在无限宽的频率范围上。信号在时域中有限,则在频域将无限延续。

(3) 频谱图中第一个零点对应的角频率为 $\frac{2\pi}{\tau}$ (频率为 $\frac{1}{\tau}$)。因为信号的能量主要集中在第一零点内,常取从零到第一个零点 $\left(\frac{1}{\tau}\right)$ 之间的频段为信号的频带宽度。这样,门函数

的带宽 $\Delta f = \frac{1}{\tau}$, 脉冲宽度 τ 愈窄, 其占有的频带 Δf 愈宽, 高频分量越多。即信号传输速度越快, 传送信号所需要占用的频带越宽。

2) 三角形脉冲信号

三角形脉冲信号的脉冲宽度为 2τ , 幅度为 A , 如图 3.2 所示, 求其频谱。

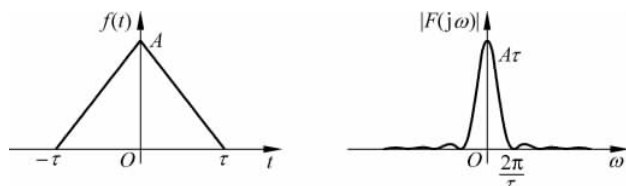


图 3.2 三角形脉冲信号及其频谱

解：与门函数的求解类似, 三角形脉冲信号的傅里叶变换为:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = A\tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3.15)$$

其频谱如图 3.2 所示, 第一零点对应的角频率也为 $\frac{2\pi}{\tau}$ 。

3) 升余弦脉冲信号

升余弦脉冲信号的表达式为: $f(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right]$ ($0 \leq |t| \leq \tau$)。

其波形如图 3.3 所示, 求其频谱。

解：

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt = \frac{A\tau \text{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2} \quad (3.16)$$

其频谱如图 3.3 所示, 第一零点对应的角频率仍为 $\frac{2\pi}{\tau}$ 。

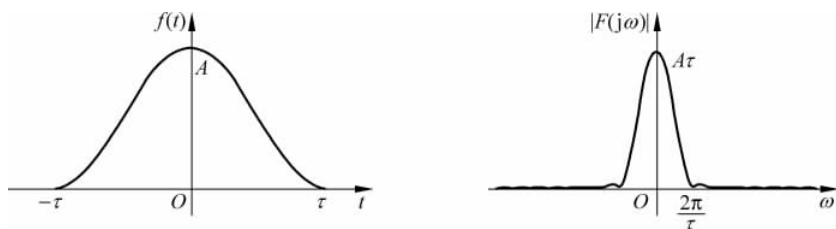


图 3.3 升余弦脉冲信号及其频谱

上述三个非周期信号: 矩形脉冲、三角形脉冲和升余弦脉冲, 在时域中呈现越来越光滑的趋势(以出现不连续点的导数阶次来表示: 矩形脉冲原函数出现不连续点, 三角形脉冲一阶导数出现不连续点, 升余弦脉冲二阶导数出现不连续点), 其频谱的第一零点都位于 $\frac{2\pi}{\tau}$, 但第一零点内频率分量的能量越来越高, 第一零点以外的高次谐波越来越小。因此, 时域函数越来越光滑, 频域能量越来越集中。基于此, 数字通信系统中, 在传输带宽有限的情况下,

信号用升余弦脉冲信号编码传输比矩形脉冲和三角形脉冲受到的损伤将会较小。

4) 求图 3.4 所示单边指数函数 $f(t) = e^{-at}\epsilon(t)$ ($a > 0$) 的频谱函数。

解：将单边指数函数的表达式 $e^{-at}\epsilon(t)$ 代入到式(3.5), 得

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (3.17)$$

其幅度和相位分别为：

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

幅度谱和相位谱分别如图 3.5(a)和图 3.5(b)所示。

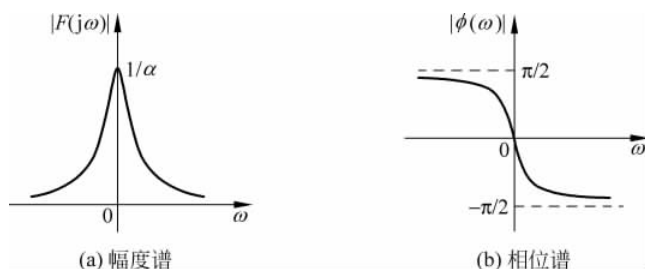


图 3.5 单边指数函数的幅度谱和相位谱($\alpha > 0$)

5) 求图 3.6(a)所示双边指数函数的频谱函数。

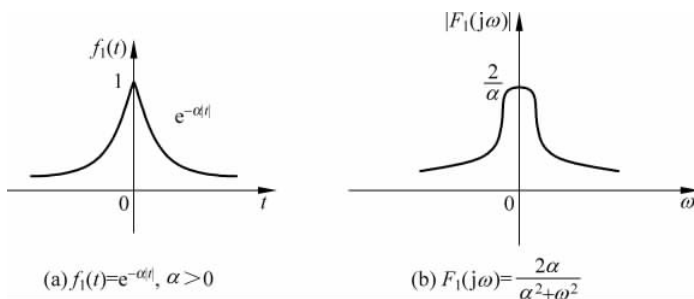


图 3.6 双边指数函数及其频谱

解：图 3.6(a)所示的信号可表示为

$$f_1(t) = e^{-a|t|}, \alpha > 0 \quad (3.18)$$

或者写为

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{at}, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases} \quad (\text{其中 } \alpha > 0) \quad (3.19)$$

将 $f_1(t)$ 代入到式(3.5), 可得其频谱函数为

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (3.20)$$

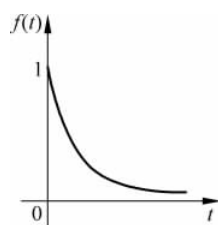


图 3.4 单边指数函数($\alpha > 0$)

$f_1(t)$ 的频谱如图 3.6(b)所示。

6) 求图 3.7(a)所示信号的频谱函数

解: 图 3.7(a)所示的信号可写为

$$f_2(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t}, & t < 0 \\ e^{-\alpha t}, & t > 0 \end{cases} \quad (\text{其中 } \alpha > 0) \quad (3.21)$$

由式(3.5)可得其频谱函数为

$$\begin{aligned} F_2(j\omega) &= -\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} \\ &= -j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$F_2(j\omega)$ 的模与相位分别为

$$\begin{aligned} |F_2(j\omega)| &= \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \varphi_2(\omega) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$|F_2(j\omega)|$ 如图 3.7(b)所示。

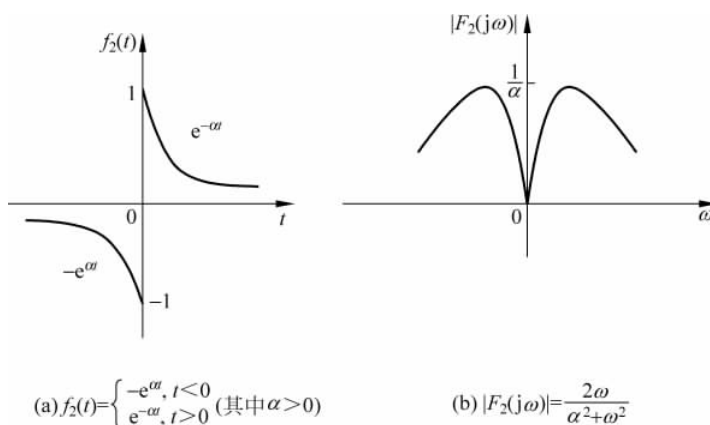


图 3.7 信号 $f_2(t)$ 的波形和频谱

3. 奇异函数的傅里叶变换

1) 冲激函数

冲激函数如图 3.8(a)所示。

根据傅里叶变换的定义式(3.5)有

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3.24)$$

即单位冲激函数的频谱是常数 1, 其频谱密度在 $-\infty < \omega < \infty$ 区间处处相等, 如图 3.8(b)所示。显然, 在时域中变化异常剧烈的冲激函数包含了幅度相等的所有频率分量, 这种频谱常称为“均匀谱”或“白色谱”。



图 3.8 单位冲激函数及其频谱

如果应用广义极限的概念,从门函数 $g_\tau(t)$ 及其频谱讨论也可得到相同的结果。单位冲激函数 $\delta(t)$ 是幅度为 $\frac{1}{\tau}$, 脉宽为 τ 的门函数当 $\tau \rightarrow 0$ 的广义极限。因而可以写为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} g_\tau(t) \quad (3.25)$$

由式(3.14)知,幅度为 1 的门函数的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[g_\tau(t)] = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

因而

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\tau} g_\tau(t)\right] = \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 1$$

这与式(3.24)结果相同。

2) 冲激偶信号(冲激函数的导数)

因为

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

即

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

对上式两边同时对 t 求导有:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.26)$$

式(3.26)说明

$$\frac{d\delta(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega$$

即 $\delta'(t)$ 的频谱函数为 $j\omega$

$$\mathcal{F}[\delta'(t)] = j\omega \quad (3.27)$$

同理可得

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)] = (j\omega)^{(n)} \quad (3.28)$$

3) 常数(直流信号)

冲激函数的频谱等于常数,反过来,什么样的函数其频谱为冲激函数呢? 也就是要求 $\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换。由逆变换的定义容易求得

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad (3.29)$$

式(3.29)说明常数 $\frac{1}{2\pi}$ 的傅里叶变换为 $\delta(\omega)$, 于是幅度为 1 的直流信号的频谱函数为 $2\pi\delta(\omega)$, 即

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \quad (3.30)$$

幅度等于 1 的直流信号可表示为 $f(t)=1, -\infty < t < \infty$, 显然, 该信号不满足绝对可积条件, 但其傅里叶变换却存在。它可以看作是本节 2.5) 的函数 $f_1(t) = e^{-\alpha|t|} (\alpha > 0)$ 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时的极限。直流信号及其频谱如图 3.9 所示。

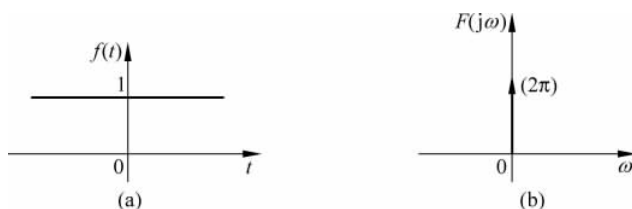


图 3.9 直流信号及其频谱

4) 符号函数

符号函数记作 $\text{sgn}(t)$, 它的定义为

$$\text{sgn}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

其波形如图 3.10(a) 所示。显然, 该函数也不满足绝对可积条件。

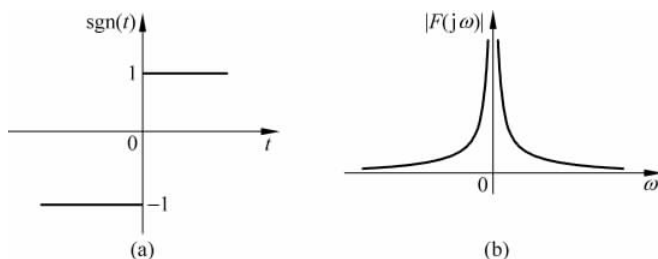


图 3.10 $\text{sgn}(t)$ 及其频谱

$\text{sgn}(t)$ 可看作图 3.7(a) 所示的函数

$$f_2(t) = \begin{cases} -e^{at}, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases} \quad (\text{其中 } \alpha > 0)$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时的极限。因此, $\text{sgn}(t)$ 的频谱也是 $f_2(t)$ 的频谱 $F_2(j\omega)$ 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时的极限。 $f_2(t)$ 的频谱函数为

$$F_2(j\omega) = -j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

当 α 趋近于零时, 有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[-j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right] = \begin{cases} \frac{2}{j\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

于是得

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega} \quad (3.31)$$

其幅频特性图如图 3.10(b)所示。

5) 阶跃函数

单位阶跃函数 $\epsilon(t)$, 如图 3.11(a)所示, 也不满足绝对可积条件。它可看作是幅度为 $\frac{1}{2}$ 的直流信号与幅度为 $\frac{1}{2}$ 的符号函数之和, 即

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (3.32)$$

对上式两边进行傅里叶变换, 得

$$\mathcal{F}[\epsilon(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right]$$

由式(3.30)和式(3.31)可得

$$\mathcal{F}[\epsilon(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3.33)$$

单位阶跃函数频谱如图 3.11(b)所示。

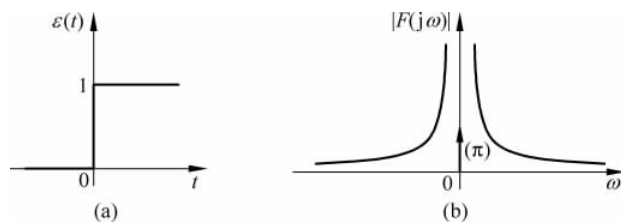


图 3.11 $\epsilon(t)$ 及其频谱

3.2 傅里叶变换的性质

傅里叶变换的正逆变换对建立了时间函数 $f(t)$ 和频谱函数 $F(j\omega)$ 之间的关系。在信号分析的理论研究与实际设计工作中, 经常需要了解当信号在时域进行某种运算后在频域发生何种变化, 或者反过来, 这时, 可以借助傅里叶变换的基本性质给出结果。下面讨论这些基本性质。

为方便起见, 把傅里叶变换正逆变换对重新列于:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.34)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.35)$$

$f(t)$ 与 $F(j\omega)$ 的对应关系还可简记为:

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

1. 线性

若

$$\begin{aligned} f_1(t) &\leftrightarrow F_1(j\omega) \\ f_2(t) &\leftrightarrow F_2(j\omega) \end{aligned}$$

则对任意常数 a_1 和 a_2 , 有

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega) \quad (3.36)$$

以上关系很容易用式(3.34)证明, 这里从略。显然, 傅里叶变换是一种线性变换, 它满足叠加性和齐次性。我们在求单位阶跃函数 $\epsilon(t)$ 的频谱函数时已经利用了这一线性性质。

2. 奇偶虚实性

现在研究实函数 $f(t)$ 与其频谱 $F(j\omega)$ 之间的虚实、奇偶关系。

1) 如果函数 $f(t)$ 是时间 t 的实函数, 则式(3.34)可写为:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

因为 $f(t)$ 是实信号, 所以, 式(3.37)中频谱函数的实部和虚部分别为:

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ X(\omega) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

频谱函数的模和相角分别为:

$$\left. \begin{aligned} |F(j\omega)| &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \arctan \left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

由式(3.38)可知, 对实信号 $f(t)$, 其频谱 $F(j\omega)$ 的实部 $R(\omega)$ 是 ω 的偶函数, 虚部 $X(\omega)$ 是 ω 的奇函数。进而由式(3.39)可知, $|F(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数, 而 $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数。

2) 如果 $f(t)$ 是时间 t 的实函数并且是偶函数, 则 $f(t) \sin(\omega t)$ 是 t 的奇函数, 因此式(3.38)中的 $X(\omega) = 0$; 而 $f(t) \cos(\omega t)$ 是 t 的偶函数, 于是有

$$F(j\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

这时频谱函数 $F(j\omega)$ 等于 $R(\omega)$, 它是 ω 的实、偶函数。因此, 时域中的实、偶函数对应的频谱也是实、偶函数。

如果 $f(t)$ 是时间 t 的实、奇函数, 则式(3.38)中 $R(\omega) = 0$, 于是有

$$F(j\omega) = jX(\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

这时频谱函数 $F(j\omega)$ 等于 $jX(\omega)$, 它是 ω 的虚、奇函数。因此, 时域中的实、奇函数对应的频谱是虚、奇函数。