第 3 章　映　　射

在日常生活中可以见到各种对应关系，例如，学号和学生的对应，身份证号与公民的对应，图书编号与图书的对应，期刊号与期刊的对应，等等。这种对应关系在数学中被称为映射，它是一种特殊的二元关系，以前所讨论的有关集合或关系的运算和性质对于映射完全适用。在 3.1 节和 3.2 节，我们通过直观的图示和较多的例子说明有关映射的基本概念，并介绍一些有关映射的定理及其证明，目的是帮助大家进一步掌握基本概念并学习运用基本概念进行分析和推理。在本章的最后一节讲述变换概念时，介绍“汉森-萨缪尔森经济周期模型”，并介绍作为变换的时间演化问题的一般表示形式。本章也是第 1 章和第 6 章的纽带，有了映射的概念，就可以讨论一般代数系统的问题。

通过本章的学习，应达到下列要求：

(1) 判断对应规则是否是映射，给出定义域和值域；

(2) 判断映射的性质(单射、满射、双射)；

(3) 根据定义判断一个映射是否有逆映射，给出其定义域和值域；

(4) 根据定义求合成映射，给出合成映射的定义域和值域；

(5) 根据定义证明有关映射的命题。

3.1　映射的基本概念

3.1.1　映射的定义

定义 3.1　设 A、B 是集合，若存在对应关系 f 使 A 中每个元素 a 在 B 中有且仅有唯一元素 b 与之对应，则称 f 是从 A 到 B 的**映射**，记作 $f: A \to B$。称元素 b 为元素 a 的**象**，元素 a 为元素 b 的**象源**，记作 $f(a)=b$。称集合 A 为映射 f 的**定义域**，记作 $D(f)$ 或 $\mathrm{dom} f$。称集合 B 为映射 f 的**陪域**，B 中所有象元素组成的集合为映射的**值域**，记作 $f(A)$ 或 $V(A)$ 或 $\mathrm{ran} f$。

例 3.1　设有 6 种关系，如图 3.1 所示，试问哪个关系是映射？哪个关系不是映射？

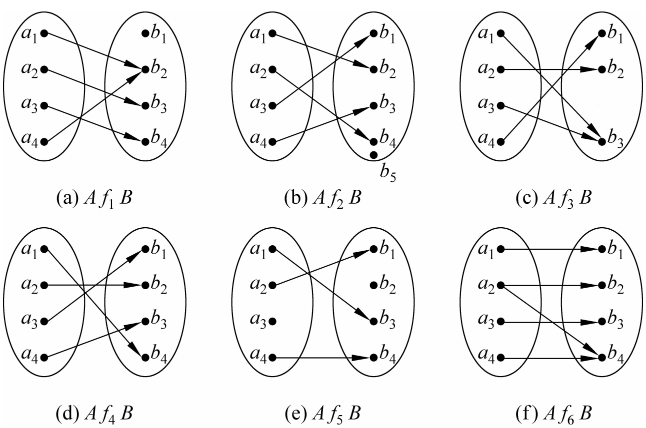

图 3.1　关系

解：根据映射定义：f_1、f_2、f_3、f_4 都是从集合 A 到 B 的映射，且

$$f_1(a_1)=b_2,\quad f_1(a_2)=b_3,\quad f_1(a_3)=b_4,\quad f_1(a_4)=b_2$$
$$f_2(a_1)=b_2,\quad f_2(a_2)=b_4,\quad f_2(a_3)=b_1,\quad f_2(a_4)=b_3$$
$$f_3(a_1)=b_3,\quad f_3(a_2)=b_2,\quad f_3(a_3)=b_3,\quad f_3(a_4)=b_1$$
$$f_4(a_1)=b_4,\quad f_4(a_2)=b_2,\quad f_4(a_3)=b_1,\quad f_4(a_4)=b_3$$

即

$$f_1(A)=\{b_2,b_3,b_4\},\quad f_2(A)=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$$
$$f_3(A)=\{b_1,b_2,b_3\},\quad f_4(A)=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$$

f_5 不是映射，因为存在 $a_3\in A$，在 B 中没有元素与之对应。

f_6 不是映射，因为存在 $a_2\in A$，在 B 中有两个元素 b_2、b_4 与之对应。

可以用二元有序组$<a,b>$表示象源和象的对应关系，映射可以表示成二元有序组的集合，因此可以说**映射是一个集合**。例 3.1 的映射可表示成如下集合：

$$f_1=\{<a_1,b_2>,<a_2,b_3>,<a_3,b_4>,<a_4,b_2>\}$$
$$f_2=\{<a_1,b_2>,<a_2,b_4>,<a_3,b_1>,<a_4,b_3>\}$$
$$f_3=\{<a_1,b_3>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>,<a_4,b_1>\}$$
$$f_4=\{<a_1,b_4>,<a_2,b_2>,<a_3,b_1>,<a_4,b_3>\}$$

推论 1 映射 $f: A\to B$ 是 $A\times B$ 的子集，即 $f\subseteq A\times B$。

推论 2 若$|f|=|A|$，则$|f(A)|\leqslant|A|$；若 $f(A)\subseteq B$，则$|f(A)|\leqslant|B|$。

推论 3 若$|A|=m$，$|B|=n$，则从 A 到 B 共有 n^m 种映射。

例 3.2

(1) 无穷级数的通项表达式 $A_k=(-1)^k/(2k+1)$，$k=1,2,3,\cdots$，是从自然数集合 $\mathbf{N}$ 到有理数集合 Q 的映射。

(2) $m\times n$ 阶矩阵 $T_{m\times n}$是从 n 维向量空间到 m 维向量空间的映射：

$$\boldsymbol{Y}_m=\boldsymbol{T}_{m\times n}\cdot\boldsymbol{X}_n$$

(3) 定积分运算 $\int_a^b \mathrm{d}x$ 是从闭区间$[a,b]$上的可积函数组成的集合到实数集合的映射。

(4) 表 3.1 中第一列和第二列给出从学号集合到姓名集合的映射，第一列和第三列给出从学号集合到性别集合的映射。

表 3.1 二维表

学　号	姓　名	性　别	年　龄	籍　贯
1001	王同	男	22	江苏
1002	李芳	女	21	陕西
1003	张红	女	20	山东
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(5) 图 3.2 中的曲线给出从$[a,b]$到实数集合 $\mathbf{R}$ 的映射：$f([a,b])=[0,1]$。但曲线不代表从$[0,1]$到$[a,b]$的映射，因为对于 $y\in[0,1]$，有不止一个 $x\in[a,b]$与之对应。

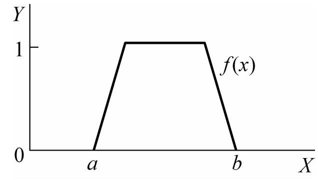

图 3.2 曲线

3.1.2 单射、满射和双射

定义 3.2 设映射 $f: A \to B$,若 B 中每个象 $b \in f(A)$ 仅有唯一象源,称 f 是从 A 到 B 的**单射**。

定义 3.3 设映射 $f: A \to B$,若满足 $f(A)=B$,则称 f 是从 A 到 B 的**满射**。

定义 3.4 设映射 $f: A \to B$,若 f 既是单射又是满射,则称 f 是从 A 到 B 的一一对应或**双射**。

例 3.3 在例 3.1 中:

f_1 既不是单射也不是满射;

f_2 是单射但不是满射;

f_3 是满射但不是单射;

f_4 既是单射又是满射,是双射。

推论 1 映射 $f: A \to B$ 是单射当且仅当 $|f(A)|=|A|$。

推论 2 映射 $f: A \to B$ 是满射当且仅当 $|f(A)|=|B|$。

推论 3 映射 $f: A \to B$ 是双射当且仅当 $|A|=|f(A)|=|B|$。

例 3.4 对于函数 $f(x)=\sin x$,如果选择的定义域和陪域不同,映射的性质就可能不同,如表 3.2 所示。

表 3.2 映射的性质

定　义　域	陪　　域	映　　射	单　　射	满　　射	双　　射
$\mathbf{R}$	$[0,1]$	×	×	×	×
$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	√	×	×	×
$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	√	×	√	×
$[-\pi/2,\pi/2]$	$\mathbf{R}$	√	√	×	×
$[-\pi/2,\pi/2]$	$[-1,1]$	√	√	√	√

3.1.3 有关映射的定理

定理 3.1 若 A、B 是有限集合,则

(1) 存在单射 $f: A \to B$ 当且仅当 $|A| \leqslant |B|$。

(2) 存在满射 $f: A \to B$ 当且仅当 $|A| \geqslant |B|$。

(3) 存在双射 $f: A \to B$ 当且仅当 $|A|=|B|$。

证明：

(1) 若存在 $f: A \to B$ 是单射，则有 $|f(A)| = |A|$。

因为 $|f(A)| \leqslant |B|$，所以 $|A| \leqslant |B|$。

所以，存在单射 $f: A \to B$ 仅当 $|A| \leqslant |B|$。

若存在集合 A、B，满足 $|A| \leqslant |B|$，不妨设：$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，其中 $m \leqslant n$。

令 $f: A \to B$ 满足：$f(a_i) = b_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$，则 f 就是单射。

所以，存在单射 $f: A \to B$ 当 $|A| \leqslant |B|$。

综上，得：存在单射 $f: A \to B$ 当且仅当 $|A| \leqslant |B|$。

证毕。

(2) 若存在 $f: A \to B$ 是满射，则有 $|f(A)| = |B|$。

因为 $|f(A)| \leqslant |A|$，所以 $|A| \geqslant |B|$。

所以，存在满射 $f: A \to B$ 仅当 $|A| \geqslant |B|$。

若存在集合 A、B，满足 $|A| \geqslant |B|$，则不妨设：$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，其中 $m \geqslant n$。

令 $f: A \to B$ 满足：$f(a_i) = \begin{cases} b_i, & i = 1, 2, \cdots, n \\ b_n, & m \geqslant i > n \end{cases}$，则 f 就是满射。

所以，存在满射 $f: A \to B$ 当 $|A| \geqslant |B|$。

综上，得：存在满射 $f: A \to B$ 当且仅当 $|A| \geqslant |B|$。

证毕。

(3) 略。

定理 3.2 若 $f: A \to B$ 是从 A 到 B 的映射，A_1、A_2 都是 A 的子集，则有

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

证明：仅需证明 $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$ 且 $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$。

对于任意象元素 $b \in f(A_1 \cup A_2)$，显然 b 有象源 $a \in A_1 \cup A_2$，满足 $f(a) = b$。

若 $a \in A_1$，则 b 显然属于 $f(A_1)$，有 $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$。

若 $a \in A_2$，则 b 显然属于 $f(A_2)$，也有 $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$。

所以，$f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$。

对于任意象元素 $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$，有 $b \in f(A_1)$ 或 $b \in f(A_2)$。

若 $b \in f(A_1)$，则有 b 有象源 $a \in A_1$，显然 $a \in A_1 \cup A_2$，因此 $b = f(a) \in f(A_1 \cup A_2)$。

若 $b \in f(A_2)$，则有 b 有象源 $a \in A_2$，显然 $a \in A_1 \cup A_2$，因此 $b = f(a) \in f(A_1 \cup A_2)$。

所以，$f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$。

综上，得：$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$。

证毕。

定理 3.3 若 $f: A \to B$ 是单射，A_1、A_2 都是 A 的子集，则有

(1) $A_1 \subseteq A_2$ 当且仅当 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$。

(2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$。

(3) $f(A_1-A_2)=f(A_1)-f(A_2)$。

证明：

(1) 对于任意 $b\in f(A_1)$，有 $a\in f(A_1)$，满足 $f(a)=b$。

若 $A_1\subseteq A_2$ 则显然有 $a\in A_2$。

因此 $b=f(a)$ 应属于 $f(A_2)$，有 $b\in f(A_2)$。

所以，$A_1\subseteq A_2$ 仅当 $f(A_1)\subseteq f(A_2)$。

对于任意 $a\in A_1$，有 $b=f(a)\in A_1$。

若 $f(A_1)\subseteq f(A_2)$，则显然 $b\in f(A_2)$。

根据值域定义，b 应有象源在 A_2 中，不妨记作 a'。

但根据题意 f 是单射，b 仅有唯一象源。

所以 a' 就是 a，因此有 $a\in A_2$。

由此，$A_1\subseteq A_2$ 当 $f(A_1)\subseteq f(A_2)$。

综上，得：对于单射 f：$A\to B$ 有 $A_1\subseteq A_2$ 当且仅当 $f(A_1)\subseteq f(A_2)$。

证毕。

(2) 略。

(3) 略。

注意： 若 f：$A\to B$ 不是单射，当 $f(A_1)\subseteq f(A_2)$ 时，A_1 可能不是 A_2 的子集，例如图 3.3 所示的映射。

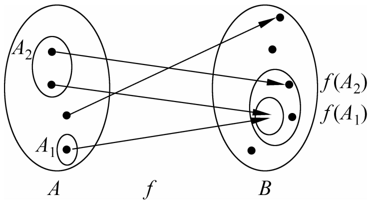

图 3.3 映射

3.2 逆映射与复合映射

3.2.1 逆映射

定义 3.5 设 f：$A\to B$ 是双射，则称集合 $g=\{<b,a>|<a,b>\in f\}$ 是从 B 到 A 的**双射**。

证明： 若 f 是双射，则 f 既是满射又是单射。

对于任意 $b\in B$，有且仅有唯一 $a\in A$ 满足 $<a,b>\in f$。

因此，对于任意 $b\in B$，有且仅有唯一 $<b,a>\in g$，g 是从 B 到 A 的映射。

若 f 是单射，则对于任意 $a\in A$，有且仅有唯一 $<a,b>\in f$。

因此，对于任意 $a\in A$，有且仅有唯一 $<b,a>\in g$，g 既是从 B 到 A 的满射，也是从 B 到 A 的单射，所以，是从 B 到 A 的双射。

证毕。

定义 3.6 设 $f: A \to B$ 是双射，称集合 $g=\{<b,a> \mid <a,b> \in f\}$ 是 f 的**逆映射**，记作 $g=f^{-1}$。

注意：并非所有映射都存在逆映射。例如，在图 3.4 表示的映射中，只有 f_3 存在逆映射。

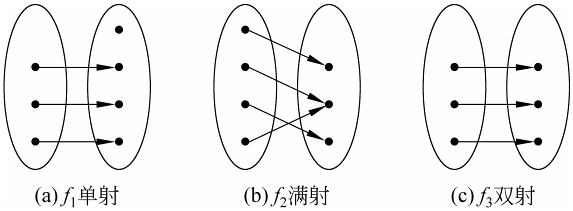

图 3.4 映射

定理 3.4 若 $f: A \to B$ 是从集合 A 到 B 的双射，则 $(f^{-1})^{-1}=f$。

证明：略。

例 3.5

(1) 映射 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 是从 R 到 R^+ 的双射，$g(x)=\ln(x)$ 是从 R^+ 到 R 的双射，它们互为逆映射。

(2) 映射 $n\times n$ 阶满秩矩阵 $\boldsymbol{T}_{n\times n}$ 及其逆矩阵 $(\boldsymbol{T}_{n\times n})^{-1}$ 是在 $n\times n$ 维向量空间的互逆的映射。

3.2.2 映射的合成

定义 3.7 设映射 $f: A \to B$、$g: B \to C$，称从 A 到 C 的映射 $h: h(a)=g(f(a))$ 为映射 g 对于 f 的**左复合映射**，记作 $h=g\circ f$，符号$\circ$代表映射的合成运算。

复合映射的一些概念可以通过图 3.5 来说明。

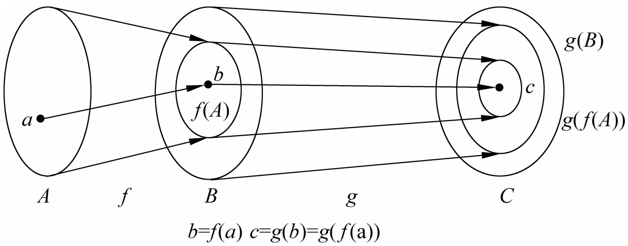

图 3.5 复合映射

因为 $f(A)\subseteq B$，$g(B)\subseteq C$，根据定理 3.3 的(1)式的结论：$A_1\subseteq A_2$ 仅当 $f(A_1)\subseteq f(A_2)$，有 $h(A)=g(f(A))\subseteq g(B)\subseteq C$。

例 3.6

(1) 设 $f(x)=\sin x$ 是从 R 到 R 的映射，$f(R)=[-1,1]$，$g(x)=x^2$ 是从 R 到 R^{+1} 的映射，$g(R)=R^{+1}$。

则它们的复合映射 $h(x)=(\sin x)^2$ 是从 R 到 R^{+1} 的映射。

对于任意 $x\in R$ 有且仅有唯一 $h(x)$ 属于 R^{+1}。

(2) $\boldsymbol{T}_{m\times n}$ 是从 n 维向量空间到 m 维向量空间的映射，$\boldsymbol{T}_{n\times k}$ 是从 k 维向量空间到 n 维向

量空间的映射，矩阵的积 $\boldsymbol{T}_{m\times k}=\boldsymbol{T}_{m\times n}\cdot\boldsymbol{T}_{n\times k}$ 是从 k 维向量空间到 m 维向量空间的映射。对于任意 k 维空间向量 $\boldsymbol{X}_k$ 有且仅有唯一向量 $\boldsymbol{T}_{m\times k}\cdot\boldsymbol{X}_k$ 在 m 维空间中。

(3) 分类归纳是复合映射，如图 3.6 所示。

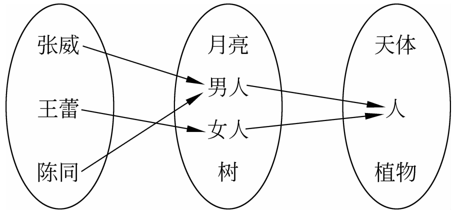

图 3.6　分类归纳

3.2.3　有关映射合成的定理

定理 3.5　对于映射 $f: A\to B, g: B\to C, h: C\to D$，映射的合成满足结合律：

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

证明：令 $s=g\circ f, l=h\circ s=h\circ(g\circ f), t=h\circ g, r=t\circ f=(h\circ g)\circ f$。

根据定义 3.6，对于任意 $a\in A$ 有 $l(a)=h(s(a))=h(g(f(a)))$，并且 $r(a)=t(f(a))=g(h(f(a)))$。

因此，对于任意 $a\in A$ 有 $l(a)=r(a)$，即 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$。

证毕。

定理 3.6　若有映射 $f: A\to B, g: B\to C$，则

(1) f、g 都是满射仅当 $g\circ f$ 是满射；

(2) f、g 都是单射仅当 $g\circ f$ 是单射；

(3) f、g 都是双射仅当 $g\circ f$ 是双射；

(4) $g\circ f$ 是满射仅当 g 是满射；

(5) $g\circ f$ 是单射仅当 f 是单射；

(6) $g\circ f$ 是双射仅当 g 是满射并且 f 是单射。

证明：

(2) 令 $h=g\circ f$，只需证明对于任意 $a_1,a_2\in A$ 且 $a_1\neq a_2$，有 $h(a_1)\neq h(a_2)$。

令 $h(a_1)=g(f(a_1)), h(a_2)=g(f(a_2))$，因为 $a_1\neq a_2$ 且 f 是单射，所以 $f(a_1)\neq f(a_2)$，又因为 g 是单射，所以 $g(f(a_1))\neq g(f(a_2))$，即 $h(a_1)\neq h(a_2)$，由此，f、g 都是单射仅当 $g\circ f$ 是单射。

证毕。

(4) 令 $h=g\circ f$，只需证明 $g(B)=C$。

① 由映射定义知，$g(B)\subseteq C$。

② 因为 h 是满射，所以 $h(A)=C$，又由复合映射定义有 $h(A)=g(f(A))\subseteq g(B)$，因此有 $C\subseteq g(B)$。

③ 根据集合相等的定义，有 $g(B)=C$，g 是满射。所以，$g\circ f$ 是满射仅当 g 是满射。

证毕。

其他证明略。

定理 3.7 若集合 A、B、C 是非空有限集合，则

(1) 存在映射 $f: A \to B, g: B \to C$，使 $g \circ f$ 成为单射当且仅当 $|B| \geqslant |A|$ 且 $|C| \geqslant |A|$。

(2) 存在映射 $f: A \to B, g: B \to C$，使 $g \circ f$ 成为满射当且仅当 $|A| \geqslant |C|$ 且 $|B| \geqslant |C|$。

(3) 存在映射 $f: A \to B, g: B \to C$，使 $g \circ f$ 成为双射当且仅当 $|A| = |C|$ 且 $|B| \geqslant |C|$。

证明：

(1) 若存在映射 $f: A \to B, g: B \to C$，使 $g \circ f$ 成为从 A 到 C 的单射，则有 $|A| \leqslant |C|$。

根据定理 3.6，f 是单射，因此又有 $|A| \leqslant |B|$。

所以，存在映射 $f: A \to B, g: A \to B$，使 $g \circ f$ 成为单射仅当 $|B| \geqslant |A|$ 且 $|C| \geqslant |A|$。

若 $|A| \leqslant |B|$，$|A| \leqslant |C|$，不妨设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_l\}$，其中 $m \leqslant n$ 且 $m \leqslant l$。

令 $f: A \to B$ 满足 $f(a_i) = b_i, i = 1, 2, \cdots, m, g: B \to C$ 满足

$$g(b_i) = \begin{cases} c_i, & i = 1, 2, \cdots, m \\ c_m, & m < i \leqslant n \end{cases}$$

则有 $g(f(a_i)) = c_i, i = 1, 2, 3, \cdots, m$ 是从 A 到 C 的单射。

所以，存在映射 $f: A \to B, g: A \to B$ 使 $f \circ g$ 成为单射当 $|B| \geqslant |A|$ 且 $|C| \geqslant |A|$。

综上，得：存在映射 $f: A \to B, g: A \to B$，使 $g \circ f$ 成为单射当且仅当 $|B| \geqslant |A|$ 且 $|C| \geqslant |A|$。

证毕。

(2)、(3)式证明略。

3.3 变换与置换

3.3.1 变换

定义 3.8 称映射 $f: A \to A$ 为集合 A 上的**变换**。

例 3.7 已知集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$，则 A 上的变换有

$$f_1 = \{<a_1, a_2>, <a_2, a_3>, <a_3, a_1>\}$$
$$f_2 = \{<a_1, a_2>, <a_2, a_2>, <a_3, a_2>\}$$
$$f_3 = \{<a_1, a_1>, <a_2, a_2>, <a_3, a_3>\}$$

如图 3.7 所示。

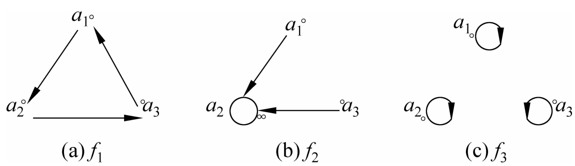

图 3.7 变换

则根据变换的特点，称 f_1 为**循环变换**，f_2 为**常值变换**，f_3 为**恒等变换**。

例 3.8

(1) 若方程 $f(x) = x$ 有解，则函数 $f(x)$ 是解集上的恒等变换；

(2) $n \times n$ 阶幺阵 $I_{n \times n}$ 是 n 维向量空间的恒等变换，零矩阵是常值变换；

（3）线形齐次代数方程组的系数矩阵是解集上的常值变换；

（4）若 $f: A \to B$ 是双射，则 $f^{-1} \circ f$ 是从 A 到 A 的恒等变换，$f \circ f^{-1}$ 是从 B 到 B 的恒等变换；

（5）$e^{\ln(x)}$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的恒等变换，$\ln(e^x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的恒等变换；

（6）$\mathrm{mod}(n+3,5)$ 是集合 $\{0,1,2,3,4\}$ 上的循环变换。

例 3.9 经济周期问题——汉森-萨缪尔森模型。

已知经济学规律：

$$\text{国民收入} = \text{国民消费} + \text{国民投资} + \text{政府支出}$$

分别用 Y_n、C_n、I_n 和 G_n 代表第 n 个年度的国民收入、国民消费、国民投资和政府支出，可以建立一个反映消费、投资和收入三者相互影响的数学模型：

$$Y_{n+1} = C_{n+1} + I_{n+1} + G_{n+1}$$

其中 n 是年份。

$$C_{n+1} = cY_n$$

c 是比例系数，称为边际消费倾向，反映国民收入增加导致的下一年度的消费增加。

$$I_{n+1} = a(C_{n+1} - C_n)$$

a 是比例系数，称为加速数，反映国民消费增加导致的再投资。

整理以上关系，可以将其写成如下的四元方程组：

$$\begin{bmatrix} Y_{n+1} \\ C_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} c(1+a) & -a & 0 \\ c & 0 & 0 \\ ac & -a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_n \\ C_n \\ I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

假设政府年度支出为长期稳定的因素（常数），则收入、消费和投资的内在关系确定了一个三维空间的变换规则。从任一年度出发，可以通过变换预测下一年度的情况。

以上经济模型被称为汉森-萨缪尔森模型，曾用于说明在没有政府支出调整和其他外来投资影响等因素时，社会经济会自发出现周期波动现象。

例 3.10 作为变换的时间演化问题。

假设我们研究的问题限于几个有限的与时间有关的变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 组成的系统。各变量由于相互作用而使系统从某个非平衡状态出发自动地发生演化。如果演化过程与其他时间因素或历史因素无关，那么系统演化的规律通常表现为以下微分方程的形式：

$$\begin{gathered} \mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t = F_1(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \mathrm{d}x_2(t)/\mathrm{d}t = F_2(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n(t)/\mathrm{d}t = F_n(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{gathered}$$

根据某一时刻 t 的各个变量的值及上述方程，可以计算下一个时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的各个变量的值。在时间离散化的模型中，有

$$\begin{gathered} x_1(k+1) = F_1(x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k)) \\ x_2(k+1) = F_2(x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k)) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = F_3(x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k)) \end{gathered}$$

其中 k 代表固定间隔的时间，$x_1(k)$，$x_2(k)$，…，$x_n(k)$代表 n 个变量。方程确定了系统后一个时刻的状态与前一个时刻的状态的对应关系，这是 n 维空间中的变换。

3.3.2 置换

定理 3.8 f 是集合 A 上的单射当且仅当 f 是 A 上的满射。

推论 集合 A 上的单射或满射一定是双射。

定义 3.9 称集合 A 上的双射变换为 A 上的**置换**。

例 3.11 A 上的恒等变换和 A 上的循环变换都是 A 上的置换。

定理 3.9 若 A 为有限集合，$|A|=n$，则 A 上共有 $n!$ 种不同的置换。

定理 3.10 若 f、g 都是集合 A 上的置换，则 $g\circ f$ 是 A 上的置换。

定理 3.11 令 I 为集合 A 上的恒等置换，则对于任意 A 上的置换 f，有

$$I\circ f = f\circ I = f$$

$$f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = I$$

习 题 三

一、选择题

1．设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，令 f：$A\to B$，则不同的函数的个数为(　　)个。

A．$2+3$　　B．2^3　　C．2×3　　D．3^2

2．若 f 和 g 是满射，则复合函数 $f\circ g$ 必是(　　)。

A．映射　　B．单射　　C．满射　　D．双射

3．已知集合 A 的基数为 n，A 上有(　　)种变换。

A．2^n　　B．n^n　　C．n　　D．n^2

4．函数的复合满足(　　)。

A．交换律　　B．结合律　　C．幂等律　　D．分配律

5．若 $f\circ g$ 是满射，则(　　)。

A．f 必是满射　　B．f 必是单射　　C．g 必是满射　　D．g 必是单射

6．设 f：$Z\to Z$，对任意的 $i\in Z$，有 $f(i)=i(\mathrm{mod}\ 8)$，则 f(　　)。

A．不是双射　　B．是单射　　C．是满射　　D．是双射

7．设 $\mathbf{Z}$ 是整数集合，映射 f 定义为：$\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，$f(x)=|x|-2x$，则 f 是(　　)。

A．单射　　B．满射　　C．双射　　D．非单射也非满射

二、填空题

1．设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，R、S、T 是从 A 到 B 的关系，且 $R=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$，$S=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle\}$，$T=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$，则在这 3 个二元关系中________可定义为 A 到 B 的函数。

2．设 $A=\{1,2,3\}$，f、g、h 是 A 到 A 的函数，其中 $f(1)=f(2)=f(3)=1$；$g(1)=1$，$g(2)=3$，$g(3)=2$；$h(1)=3$，$h(2)=h(3)=1$，则________是单射，________是满射，________是双射。

3．设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，那么可以定义________种不同的从 A 到 B 的单射。

4．自然数集 $\mathbf{N}$ 是可数的，则 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是________，有理数 $\mathbf{Q}$ 是可数的，全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$ 是________。

5．设 f 是 A 到 B 的函数，g 是 B 到 C 的函数，复合函数 $f\circ g$ 是 A 到 C 的函数。如果 $f\circ g$ 是满射，那么________必是满射；如果 $f\circ g$ 是单射，那么________必是单射。

6．设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{0,1\}$，那么可定义________种不同的 A 到 B 的函数，可定义________种不同的 A 到 B 的满射。

7．设 $\mathbf{R}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}$ 分别表示实数、整数和自然数集，下面定义函数 f_1、f_2、f_3 和 f_4。试确定它们的性质(满射不单射，单射不满射，双射，不单射也不满射)。

f_1：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=2^x$

f_2：$\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，$f(x)=|x|$

f_3：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=(x)\bmod 3$，即 x 除以 3 的余数

f_4：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$f(n)=\langle n,n+1\rangle$

则 f_1 是________，f_2 是________，f_3 是________，f_4 是________。

三、综合题

1．定义如下函数：

$$f: N\to N\times N, f(n)=\langle n,n+1\rangle, S=\{\langle 2,2\rangle\}$$
$$f: N\to N, f(n)=2n+1, S=\{2,3\}$$
$$f: Z\to N, f(x)=|x|, S=\{0,1\}$$
$$f: [0,1]\to[0,1], f(x)=x/2+1/4, S=\{0,1/2\}$$
$$f: R\to R, f(x)=3, S=N$$
$$f: [0,\infty]\to R, f(x)=1/(1+x), S=\{0,1/2\}$$
$$f: (0,1)\to(0,\infty), f(x)=1/x, S=\{0,1\}$$

请回答以下问题：

(1) 哪些是单射、满射、双射？

(2) 求函数的象与原象。

(3) 给定集合 S 的原象。

2．求下列函数的逆映射：

(1) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x$，$S=\{8\}$

(2) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$(正实数集)，$f(x)=2x$，$S=\{1\}$

3．两个自然数集 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的移位函数：$f(n)=n+1$，$g(n)=\max\{0,n-1\}$。

求证：

(1) f 是单射而不是满射；

(2) g 是满射而不是单射；

(3) $f\circ g=I_n$，但 $g\circ f\neq I_n$。

4．设函数 f：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，$f$ 定义为：$f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$。

(1) 证明 f 是单射；

(2) 证明 f 是满射；

(3) 求反函数 f^{-1}；

(4) 求复合函数 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f$。

5. 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1\}$

(1) 求 $P(A)$和 B^A。

(2) 构造一个从 $P(A)$到 B^A 的双射函数。

6. 设 f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，且 $f(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\ 为奇数\\ \dfrac{x}{2}, & 若\ x\ 为偶数\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(\{0\})$，$f(1)$，$f(\{1\})$，$f(\{0,2,4,6,\cdots\})$，$f(\{4,6,8\})$，$f(\{1,3,5,7,\cdots\})$。

7. 设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3\\ -2, & x<3\end{cases}$，$g$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g(x)=x+2$

求：(1)$f\circ g(x)$，(2)$g\circ f(x)$，(3)$g\circ f$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，(4)f^{-1}，(5)g^{-1}。

第 2 部分

数 理 逻 辑

逻辑是探索、阐述和确立有效推理原则的学科，最早由古希腊学者亚里士多德创建。逻辑包括辩证逻辑和形式逻辑。辩证逻辑研究反映客观世界辩证发展过程的人类思维的形态。形式逻辑研究思维的形式结构和规律，它撇开具体的、个别的思维内容，从形式结构方面研究概念、判断和推理及其正确联系的规律。

用数学的方法研究关于推理(inference)、证明等问题的学科，就叫做数理逻辑(mathematical logic)，又称符号逻辑或理论逻辑。

数理逻辑是数学的一个分支，用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律。所谓数学方法就是指数学采用的一般方法，包括使用一套有严格定义的符号和公式，建立一套形式语言，使用已有的数学成果和方法，特别是使用形式的公理方法。简而言之，数理逻辑就是精确化、数学化的形式逻辑。

用数学的方法研究逻辑的系统思想一般追溯到莱布尼茨，他认为经典的传统逻辑必须改造和发展，使之更为精确和便于演算。后人基本是沿着莱布尼茨的思想进行工作的。英国数学家布尔、德国数学家弗雷格、美国数学家皮尔斯和奥地利数学家哥德尔，都为数理逻辑做出过突出的贡献。

数理逻辑近年来发展特别迅速，主要原因是这门学科对于其他数学分支如集合论、数论、代数、拓扑学以及人工智能和语言学等学科的发展有重大的影响，特别是对计算机科学的发展起了推动作用。反过来，其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展。

正因为它是一门新近兴起而又发展很快的学科，所以它本身也存在许多问题有待深入研究。现在许多数学家正针对数理逻辑本身的问题进行研究。

数理逻辑的内容相当丰富，大体可分为 5 部分，即逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。本书只介绍命题逻辑和一阶逻辑(谓词逻辑)的逻辑演算。对数理逻辑感兴趣的读者可以参阅有关专著。

相关历史背景

一、数理逻辑的产生

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程，这种想法早在17世纪就有人提出过。莱布尼茨就曾经设想过创造一种“通用的科学语言”，可以把推理过程像数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。由于当时的社会条件，他的想法并没有实现。但是这一思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽，从这个意义上讲，莱布尼茨可以说是数理逻辑的先驱。

1847年，英国数学家布尔发表了《逻辑的数学分析》，建立了布尔代数，并创造一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。

19世纪末20世纪初，数理逻辑有了比较大的发展。1884年，德国数学家弗雷格出版了《数论的基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备。对建立这门学科做出贡献的还有美国人皮尔斯，他也在著作中引入了逻辑符号，从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。

二、数理逻辑的内容

数理逻辑包括哪些内容呢？这里先介绍它的两个最基本的也是最重要的组成部分，就是命题逻辑和谓词逻辑。

命题逻辑是研究关于命题如何通过一些逻辑连接词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法。命题是指具有具体意义的又能判断它是真还是假的句子。

如果把命题看作运算的对象，如同代数中的数字、字母或代数式，而把逻辑连接词看作运算符号，就像代数中的加、减、乘、除那样，那么由简单命题组成复合命题的过程就可以当作逻辑运算的过程，也就是命题的演算。

这样的逻辑运算也同代数运算一样具有一定的性质，满足一定的运算规律。例如满足交换律、结合律和分配律，同时也满足逻辑上的同一律、吸收律、双否定律、德·摩根律和三段论定律等。利用这些定律，可以进行逻辑推理，可以简化复合命题，可以推证两个复合命题是不是等价，也就是它们的真值表是不是完全相同等等。

命题逻辑的一个具体模型就是逻辑代数。逻辑代数也叫做开关代数，它的基本运算是逻辑加、逻辑乘和逻辑非，也就是命题逻辑中的“或”、“与”、“非”，运算对象只有两个数0和1，相当于命题逻辑中的“真”和“假”。

逻辑代数的运算特点如同电路分析中的开和关、高电位和低电位、导电和截止等现象完全一样，都只有两种不同的状态，因此，它在电路分析中得到广泛的应用。

利用电子元件可以组成相当于逻辑加、逻辑乘和逻辑非的门电路，就是逻辑元件。还能把简单的逻辑元件组成各种逻辑网络，这样任何复杂的逻辑关系都可以用逻辑元件经过适当的组合来实现，从而使电子元件具有逻辑判断的功能。因此，逻辑代数在自动控制方面有重要的应用。谓词逻辑也叫做命题函项演算。在谓词逻辑里，把命题的内部结构分析成具

有主词和谓词的逻辑形式，由命题函项、逻辑连接词和量词构成命题，然后研究这样的命题之间的逻辑推理关系。函项就是指除了含有常项以外还含有变项的逻辑公式。常项是指一些确定的对象或者确定的属性和关系；变项是指一定范围内的任何一个，这个范围叫做变项的变域。

提到数理逻辑，不得不提著名的哥德尔不完全性定理。这还要从罗素悖论说起。

三、罗素悖论

在寻找数学基础的道路上，数学家们颇费周折。

19 世纪下半叶，康托创立了著名的集合论。在集合论刚产生时，曾遭到许多人的猛烈攻击。但不久这一开创性成果就为广大数学家所接受了，并且获得广泛而高度的赞誉。数学家们发现，从自然数与康托集合论出发可建立起整个数学大厦。因而集合论成为现代数学的基石。“一切数学成果可建立在集合论基础上”这一发现使数学家们为之陶醉。1900 年，在国际数学家大会上，法国著名数学家庞加莱就曾兴高采烈地宣称：“借助集合论概念，我们可以建造整个数学大厦。……今天，我们可以说，绝对的严格性已经达到了。……”

1901 年，英国数学家罗素提出以下悖论：

定义集合 $S=\{A|A$ 是集合，且 $A\notin A\}$。这样，是否 $S\in S$ 呢？

假设 $S\notin S$，那么 S 满足谓词 $A\notin A$，而该谓词定义了集合 S，所以 $S\in S$；

假设 $S\in S$，那么 S 必须满足定义 S 的谓词，所以 $S\notin S$。

罗素悖论的通俗形式是“理发师悖论”：一个理发师，只给那些不给自己理发的人理发，那么这个理发师是否给自己理发？

罗素提出的罗素悖论非常浅显易懂，而且所涉及的只是集合论中最基本的东西，但是一针见血地指出了朴素集合论的不足，说明朴素的集合论思想并不严密。

罗素的这条悖论使集合理论产生了危机，所以，罗素悖论一提出就在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大震动。德国的著名逻辑学家弗里兹在他的关于集合的基础理论完稿付印时，收到了罗素关于这一悖论的信。他立刻发现，自己忙了很久得出的一系列结果却被这条悖论搅得一团糟。他只能在自己著作的末尾写道：“一个科学家所碰到的最倒霉的事，莫过于在他的工作即将完成时却发现所干的工作的基础崩溃了。”数学的基础被动摇了，这就是所谓的第三次“数学危机”。

在罗素悖论提出后，数学家纷纷提出自己的解决方案。人们希望能够通过对康托的集合论进行改造，通过对集合定义加以限制来排除悖论，这就需要建立新的原则。“这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾；另一方面又必须充分广阔，使康托集合论中一切有价值的内容得以保存下来。”1908 年，策梅罗在自己这一原则基础上提出第一个公理化集合论系统，后来这一公理化集合系统很大程度上弥补了康托朴素集合论的缺陷。除 ZF 系统外，集合论的公理系统还有多种，如诺伊曼等人提出的 NBG 系统等。公理化集合系统的建立，成功排除了集合论中出现的悖论，从而比较圆满地解决了第三次数学危机。

四、希尔伯特方案

罗素悖论对数学而言有着更为深刻的影响。它使得数学基础问题第一次以最迫切的需要的姿态摆到数学家面前，导致了数学家对数学基础的研究。而这方面的进一步发展又极其深刻地影响了整个数学。

这个问题又扩展到对数学基础的反思，什么样的数学基础是稳固的？数学真理的本质

是什么？数学命题有什么意义？它们是建基于什么样的证明之上的？

对于此问题的不同看法使数理逻辑界形成了三派：逻辑主义学派（罗素，怀特海）、形式主义或公理学派（希尔伯特）以及直觉主义学派（布劳威尔）。各派的工作都促进了数学的大发展。本书主要涉及形式主义学派。

希尔伯特（Hilbert）大力提倡数学的形式主义（即公理化）。在那个时期，初等几何、算术、群、环、域、拓扑空间等数学系统都得到了公理论。

希尔伯特提出了希尔伯特方案，也就是把古典数学的每一分支都形式化，并且证明这些数学公理系统的一致性和完全性。所谓的一致性，就是不矛盾性，或称协调性，即这个形式系统内部不会出现矛盾，也就是说，不会在一个形式系统里面既有公式 A 为真又有公式 $\neg A$ 为真。所谓的完全性，就是指存在一个公式 A，使得 A 或者 $\neg A$ 在这个形式系统中可以证明。希尔伯特试图通过希尔伯特方案一劳永逸地解决数学基础问题。

五、哥德尔不完全性定理

正当希尔伯特满怀信心要一劳永逸地解决数学基础问题时，哥德尔不完全性定理的证明惊醒了形式主义学派的美梦。

哥德尔（Godel，1906—1978），一般被认为是亚里士多德以来最伟大的逻辑学家（或许还应加上一个弗雷格，他是现代逻辑的创始人）。他有几个主要的贡献：一阶逻辑的完备性定理，哥德尔第一、第二不完全性定理，连续统假设与 ZF 公理集合论的协调，旋转宇宙里时间旅行的可能，把莱布尼兹的上帝存在论证明转化为逻辑形式。他在晚年对哲学产生了深厚的兴趣，尤其是康德、莱布尼兹和胡塞尔的哲学理论。

哥德尔

在第一不完全性定理中，哥德尔证明了，任一包含算术的形式系统，它的一致性和完全性是不可兼得的。

哥德尔第一不完全性定理或者可以这样来说：如果一个包含算术的形式系统是一致的，那么这个系统必然是不完全的。所谓不完全，就是指存在一个公式 A，使得 A 和 $\neg A$ 在这个系统内都不可证。

根据第一不完全性定理可以推导出，一个包含算术形式系统的一致性在这个系统内是不可证的。这就是哥德尔第二不完全性定理。根据这个定理，一致性的证明超出了形式系统的能力。也就是说，形式系统可能是一致的，形式系统也可能是不一致的。

哥德尔为数理逻辑做出了突出的贡献。哥德尔一生发表论著不多。他发表于 1931 年的论文《〈数学原理〉及有关系统中的形式不可判定命题》是 20 世纪在逻辑学和数学基础方面最重要的文献之一。

六、哥德尔不完全性定理的具体应用

哥德尔的不完全性定理是现代思想具有划时代意义的大事件。曾有评价说，不了解哥德尔就不了解人类已达到的智力水平与人类智力奋斗的历程。

哥德尔不完全性定理的一个主要应用领域是计算机和人工智能。现在把停机问题简单介绍一下。计算机到现在有了极大的发展，但是基本原理还是冯·诺依曼提出来的，只是速度和效率大大提高了。从根本上说，计算机的程序就是一种基于二进制数字运算的命题演算系统。其中给出的公理是有限的，规则是可计算，而判定出命题的真伪时，输出结果，停机

并转向下一个命题的处理。这就符合了哥德尔第一不完备定理的条件。正如该定理所说，这样的系统必然是不完备的，也就是说至少有一个命题不能通过这样的“程序”被判明真伪，系统在处理这样的命题时，就无法“停机”，用俗话说就是被“卡”住了，永远不能绕过。无论你怎样扩充公理集，只要是有限的，这个现象就始终存在。而无限的公理集对于计算机来说，就意味着无限大的存储空间，这显然是不可能的。因此，有些数学家(如彭罗斯)就认为，这表明了计算机是有致命缺陷的，而人类的“直觉”不受该定理的限制，所以计算机永远不可能具有人脑的能力，人工智能期望中的真正具有智慧的“电脑”，只不过是如“皇帝的新衣”那样的“皇帝的新脑”。关于这个问题的详细情况，可阅读彭罗斯的《皇帝新脑》。

人脑正是这样的包含了非确定性的自然形成的神经网络系统，它之所以看上去具有电脑不具备的“直觉”，正是这种系统的“模糊”处理能力和效率极高的表现。而传统的图灵机则是确定性的串行处理系统，虽然也可以模拟这样的“模糊”处理，但是效率太低下了。

各方面研究都表明，人脑在“运算”时，的确与电脑的基本原理是一样的，只不过电脑是用电子元件的“开、闭”和电信号的传递体现，人脑则表现为神经原的“冲动、抑制”和化学信号(当然也包括电信号)的传递。这与哥德尔定理的条件没有本质上的差别。而认识过程中的“思维是客观实在的近似反映，语言是思维的近似表达”这一点正是受哥德尔定理限制的结果。就拿语言(指形式上的)来说，完全可以转化为有限公理和一定规则下的符号逻辑系统，也就是一种符合定理条件的形式公理系统。该定理恰恰说明，这样的系统不完备，存在不能用该系统证实的命题，对于这个系统来说，就是语言对思维的表达不完全，也就是我们常说的“只可意会，不可言传”。这也与我们经常感觉到的“词不达意”是相吻合的，任何形式上的语言都不能完全准确地表达我们的思想。还有另一个事实也说明这一点，就是翻译，文对文的形式语言翻译虽然不难，可是如实地表达原来语言中的准确蕴意就非常难了，甚至可以说是不可能的事情。

在形式系统一致性方面，和非单调逻辑有类似性。非单调逻辑承认，人在不同时间里存在理论不协调性的可能。例如，大雁会飞，鸽子会飞，……，于是人们总结出“所有的鸟都是能飞的。”后来发现鸵鸟是不能飞的，于是原来的命题就应该改为“所有的鸟都是能飞的，除了鸵鸟。”如果以后发现还有其他鸟不能飞，这个命题就还要再改。这样来看，系统的定理集并不是单调递增的。

七、数理逻辑与中国

我国是逻辑学发展最早的国家之一，例如《墨子》一书中的《小取》篇，就是一篇内容丰富的逻辑著作，但以后没有人继续研究，因而未能继续发展。

墨子

金岳霖

金岳霖(1895—1984)是把西方现代逻辑介绍到中国的主要人物。金岳霖1936年著《逻辑》一书,第一个系统地把数理逻辑介绍到中国来,产生了深刻的影响。金岳霖推动了中国对现代逻辑的研究,对演绎逻辑的基本问题作了深入探索,并培养了许多逻辑学者,包括王浩、冯契、沈有鼎、殷海光在内的一大批大师级的弟子,可谓桃李满天下。

潘梓年是第一个在辩证唯物主义的基础上肯定了数理逻辑的人,他在1938年著有《逻辑与逻辑学》一书。

1959年,美籍华人王浩教授设计了一个机械化方法,只用了9分钟,证明了罗素等著的《数学原理》中的几百条定理,当时在全世界数学界引起了轰动。

第 4 章　命题逻辑

4.1　基本概念和基本运算

定义 4.1　能判断真假的陈述句称为**命题**。

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句（命题），因此，表达判断的陈述句（命题）构成了推理的基本单位。

命题有真值。称判断为正确的命题其真值为真，这样的命题称为**真命题**；称判断为错误的命题其真值为假，这样的命题称为**假命题**。命题的真值是唯一的，没有二义性。在命题逻辑中，对命题的组成部分不再进一步细分，以命题为基本研究单位，研究的粒度很粗。

命题的真值可以符号化。一般用 1（或 T）表示“真”；用 0（或 F）表示“假”。判断一个句子是否为命题，首先要判断它是否为陈述句，然后再看它的真值是否唯一。

例 4.1　判断下列句子中哪些是命题？若是命题，判断是真命题还是假命题？并求其真值。

（1）经济学研究社会如何管理自己的稀缺资源。

（2）经济学中的稀缺性是指社会提供的东西少于人们想拥有的。

（3）请列出经济学的十大原理。

（4）人们如何做出决策？

（5）微观经济学研究整体经济现象，宏观经济学研究家庭和企业如何做出决策。

（6）《经济学原理》是多么经典啊！

（7）$x+y>7$。

（8）我现在说的不是真话。

解：

（1）因为这是一个可以判断真假的陈述句，所以是命题，是真命题，其真值为 1。

（2）因为这是一个可以判断真假的陈述句，所以是命题，是真命题，其真值为 1。

（3）因为这是一个祈使句，不是陈述句，所以不是命题。

（4）因为这是一个疑问句，不是陈述句，所以不是命题。

（5）因为这是一个可以判断真假的陈述句，所以是命题，是假命题，其真值为 0。

（6）因为这是一个感叹句，不是陈述句，所以不是命题。

（7）因为这个句子没有确定的真值，所以不是命题。

（8）因为这是一个悖论，无法判断真值，所以不是命题。

定义 4.2　如果一个命题不能分解成更简单的句子，那么称这样的命题为**简单命题**或**原子命题**。

例如，例 4.1 中的（1）和（2）都是简单命题。对于简单命题来说，它的真值是确定的，因此又称为**命题常项**或**命题常元**。

真值可以变化的简单陈述句称为**命题变项**或**命题变元**，如例 4.1 中的（7）虽然不是命