

3.1 基于名义模型的滑模控制

3.1.1 系统描述

考虑如下对象：

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = u - d \quad (3.1)$$

其中, J 为转动惯量, B 为阻尼系数, u 为控制输入, d 为干扰, θ 为角度, $J > 0, B > 0$ 。

实际工程中, 真实的物理参数和干扰往往无法精确获得, 通常需要建模, 得到真实对象的名义模型

$$J_n\ddot{\theta}_n + B_n\dot{\theta}_n = \mu \quad (3.2)$$

其中, J_n 和 B_n 分别为 J 和 B 的名义值, μ 为名义模型控制律, $J_n > 0, B_n > 0$ 。

3.1.2 控制系统结构

由图 3.1 可见, 控制系统由两个控制器构成^[1], 一个是针对实际系统的滑模控制器, 实现 $\theta \rightarrow \theta_n$, 另一个是针对名义模型的控制器, 实现 $\theta_n \rightarrow \theta_d$ 。整个控制系统实现 $\theta \rightarrow \theta_d$ 。

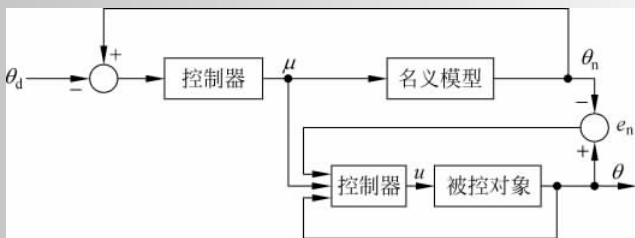


图 3.1 控制系统结构

3.1.3 针对名义模型的控制

取理想的位置为 θ_d , 名义模型的跟踪误差为 $e = \theta_n - \theta_d$, 则可得到 $\dot{\theta}_n = \dot{e} + \dot{\theta}_d$, $\ddot{\theta}_n = \ddot{e} + \ddot{\theta}_d$, 且

$$J_n(\ddot{e} + \ddot{\theta}_d) + B_n(\dot{e} + \dot{\theta}_d) = \mu$$

即

$$\ddot{e} + \ddot{\theta}_d = -\frac{B_n}{J_n}(\dot{e} + \dot{\theta}_d) + \frac{1}{J_n}\mu \quad (3.3)$$

针对名义模型的控制律设计如下:

$$\mu = J_n \left(-h_1 e - h_2 \dot{e} + \frac{B_n}{J_n} \dot{\theta}_d + \ddot{\theta}_d \right) \quad (3.4)$$

将式(3.4)代入式(3.3), 得

$$\ddot{e} + \ddot{\theta}_d = -\frac{B_n}{J_n}(\dot{e} + \dot{\theta}_d) + \left(-h_1 e - h_2 \dot{e} + \frac{B_n}{J_n} \dot{\theta}_d + \ddot{\theta}_d \right)$$

则

$$\ddot{e} + \left(h_2 + \frac{B_n}{J_n} \right) \dot{e} + h_1 e = 0$$

为了保证系统稳定, 需要保证 $s^2 + \left(h_2 + \frac{B_n}{J_n} \right) s + h_1$ 为 Hurwitz。

不妨取 $(s+k)^2=0, k>0$, 则可满足多项式 $s^2+2ks+k^2=0$ 的特征值实数部分为负, 对应可得到 $h_2 + \frac{B_n}{J_n} = 2k, h_1 = k^2$, 即 $h_2 = 2k - \frac{B_n}{J_n}, h_1 = k^2$ 。通过取 k 值可实现 h_1 和 h_2 。

3.1.4 滑模控制器的设计

假设

$$J_m \leq J \leq J_M, B_m \leq B \leq B_M, \quad |d| \leq d_M \quad (3.5)$$

取 $e_n = \theta - \theta_n$, 定义滑模函数为

$$s = \dot{e}_n + \lambda e_n \quad (3.6)$$

其中, $\lambda > 0$, λ 定义为 $\lambda = \frac{B_n}{J_n}$ 。

定义

$$J_a = \frac{1}{2}(J_m + J_M) \quad (3.7)$$

$$B_a = \frac{1}{2}(B_m + B_M) \quad (3.8)$$

设计控制律为

$$u = -Ks - h \cdot \text{sgn}(s) + J_a \left(\frac{1}{J_n} \mu - \lambda \dot{\theta} \right) + B_a \dot{\theta} \quad (3.9)$$

其中, $K > 0$ 。

定义

$$h = d_M + \frac{1}{2}(J_M - J_m) \left| \frac{1}{J_n} \mu - \lambda \dot{\theta} \right| + \frac{1}{2}(B_M - B_m) \left| \dot{\theta} \right|$$

取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} J s^2$$

由于

$$\begin{aligned} J\dot{s} &= J[(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_n) + \lambda(\dot{\theta} - \dot{\theta}_n)] \\ &= (J\ddot{\theta} + B\dot{\theta}) - B\dot{\theta} - \frac{J}{J_n} J_n \ddot{\theta}_n - \frac{J}{J_n} B_n \dot{\theta}_n + \frac{J}{J_n} B_n \dot{\theta}_n + J\lambda(\dot{\theta} - \dot{\theta}_n) \\ &= (J\ddot{\theta} + B\dot{\theta}) - \frac{J}{J_n} (J_n \ddot{\theta}_n + B_n \dot{\theta}_n) - B\dot{\theta} + \lambda J \dot{\theta} \\ &= u - d - \frac{J}{J_n} \mu - B\dot{\theta} + \lambda J \dot{\theta} \end{aligned}$$

将式(3.9)代入上式,得

$$\begin{aligned} J\dot{s} &= -Ks - h \operatorname{sgn}(s) + J_a \left(\frac{1}{J_n} \mu - \lambda \dot{\theta} \right) + B_a \dot{\theta} - d - \frac{J}{J_n} \mu - B\dot{\theta} + \lambda J \dot{\theta} \\ &= -Ks - h \operatorname{sgn}(s) - d + (J_a - J) \left(\frac{1}{J_n} \mu - \lambda \dot{\theta} \right) + (B_a - B) \dot{\theta} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} = J s \dot{s} &= -Ks^2 - h |s| + s \left[-d + (J_a - J) \left(\frac{1}{J_n} \mu - \lambda \dot{\theta} \right) + (B_a - B) \dot{\theta} \right] \\ &\leq -Ks^2 - h |s| + |s| \left[|d| + |J_a - J| \left| \frac{1}{J_n} \mu - \lambda \dot{\theta} \right| + |B_a - B| |\dot{\theta}| \right] \end{aligned}$$

由式(3.7)和式(3.8)可知

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(J_M - J_m) &\geq |J_a - J| \\ \frac{1}{2}(B_M - B_m) &\geq |B_a - B| \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} h &\geq |d| + |J_a - J| \left| \frac{1}{J_n} \mu - \lambda \dot{\theta} \right| + |B_a - B| |\dot{\theta}| \\ \dot{V} &\leq -Ks^2 \end{aligned}$$

由于 $V = \frac{1}{2} J s^2$, 则 $J s \dot{s} \leq -K s^2$, 即 $s \dot{s} \leq -\frac{K}{J} s^2$, 解得

$$s(t) \leq |s(0)| \exp\left(-\frac{K}{J} t\right)$$

可见, $s(t)$ 为指数收敛。

3.1.5 仿真实例

考虑如下对象:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = u - d$$

其中, $B=10+3\sin(2\pi t)$, $J=3+0.5\sin(2\pi t)$, $d(t)=10\sin t$ 。

取 $B_n=10$, $J_n=3$, 并假设 $B_m=7$, $B_M=13$, $J_m=2.5$, $J_M=3.5$, $d_M=10$ 。

取 $k=1.0$, 则 $h_2=2k-\frac{B_n}{J_n}$, $h_1=k^2$ 。采用控制律式(3.9), 取 $\lambda=\frac{B_n}{J_n}=\frac{10}{3}$, $K=10$, 理想位置指令为 $\theta_d(t)=\sin t$, 对象初始状态为 $[0.5 \ 0]$ 。仿真结果如图 3.2、图 3.3 及图 3.4 所示。

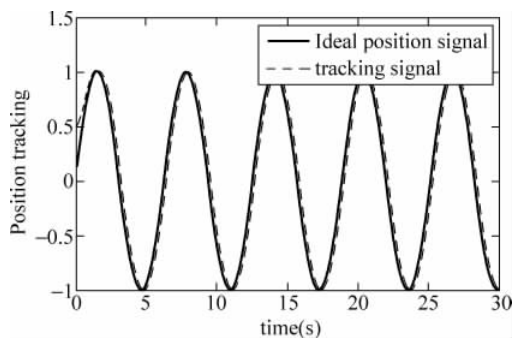


图 3.2 位置跟踪

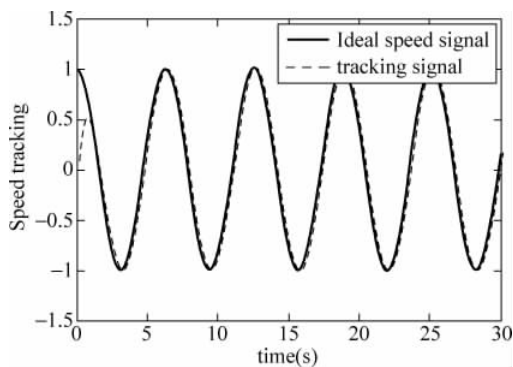


图 3.3 速度跟踪

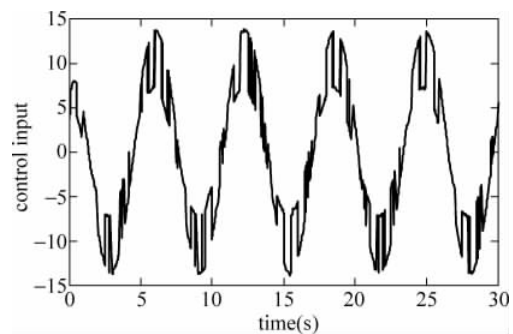
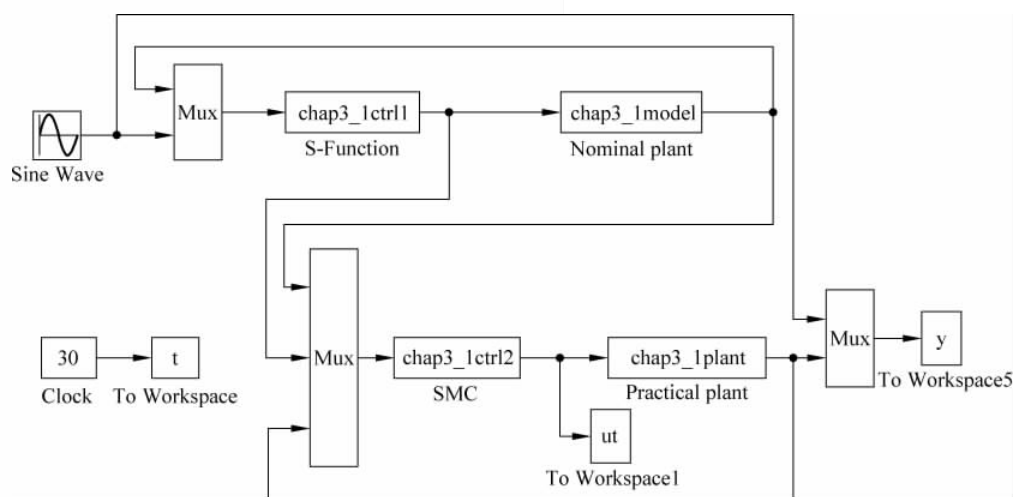


图 3.4 控制输入

仿真程序:

1) Simulink 主程序: chap3_1sim.mdl



2) 针对名义模型的控制器 S 函数: chap3_1ctrl1.m

```
function [sys,x0,str,ts] = s_function(t,x,u,flag)
switch flag,
case 0,
    [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
case 3,
    sys = mdlOutputs(t,x,u);
case {2, 4, 9}
    sys = [];
otherwise
    error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 0;
sizes.NumDiscStates = 0;
sizes.NumOutputs = 1;
sizes.NumInputs = 3;
sizes.DirFeedthrough = 1;
sizes.NumSampleTimes = 0;
sys = simsizes(sizes);
x0 = [];
str = [];
ts = [];
function sys = mdlOutputs(t,x,u)
thn = u(1);
dthn = u(2);
thd = u(3); dthd = cos(t); ddthd = -sin(t);

e = thn - thd;
de = dthn - dthd;
```

```

k = 3;
Bn = 10; Jn = 3;
h1 = k ^ 2;
h2 = 2 * k - Bn/Jn;

ut = Jn * ( - h1 * e - h2 * de + Bn/Jn * dthd + ddthd );

sys(1) = ut;

```

3) 名义模型 S 函数: chap3_1model.m

```

function [sys,x0,str,ts] = s_function(t,x,u,flag)
switch flag,
case 0,
    [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
case 1,
    sys = mdlDerivatives(t,x,u);
case 3,
    sys = mdlOutputs(t,x,u);
case {2, 4, 9}
    sys = [];
otherwise
    error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 2;
sizes.NumDiscStates = 0;
sizes.NumOutputs = 2;
sizes.NumInputs = 1;
sizes.DirFeedthrough = 0;
sizes.NumSampleTimes = 0;
sys = simsizes(sizes);
x0 = [0.5,0];
str = [];
ts = [];
function sys = mdlDerivatives(t,x,u)
Bn = 10;
Jn = 3;
sys(1) = x(2);
sys(2) = 1/Jn * (u - Bn * x(2));
function sys = mdlOutputs(t,x,u)
sys(1) = x(1);
sys(2) = x(2);

```

4) 针对实际对象的滑模控制器 S 函数: chap3_1ctrl2.m

```

function [sys,x0,str,ts] = s_function(t,x,u,flag)
switch flag,
case 0,
    [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;

```

```

case 3,
    sys = mdlOutputs(t,x,u);
case {2, 4, 9}
    sys = [];
otherwise
    error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 0;
sizes.NumDiscStates = 0;
sizes.NumOutputs = 1;
sizes.NumInputs = 5;
sizes.DirFeedthrough = 1;
sizes.NumSampleTimes = 0;
sys = simsizes(sizes);
x0 = [];
str = [];
ts = [];
function sys = mdlOutputs(t,x,u)
Bn = 10;Jn = 3;
lamt = Bn/Jn;

Jm = 2.5;JM = 3.5;
Bm = 7;BM = 13;

dM = 0.10;
K = 10;

thn = u(1);dthn = u(2);
nu = u(3);
th = u(4);dth = u(5);

en = th - thn;
den = dth - dthn;

s = den + lamt * en;

temp0 = (1/Jn) * nu - lamt * dth;

Ja = 1/2 * (JM + Jm);
Ba = 1/2 * (BM + Bm);

h = dM + 1/2 * (JM - Jm) * abs(temp0) + 1/2 * (BM - Bm) * abs(dth);

ut = -K * s - h * sign(s) + Ja * ((1/Jn) * nu - lamt * dth) + Ba * dth;

sys(1) = ut;

5) 被控对象 S 函数: chap3_1plant.m

function [sys,x0,str,ts] = s_function(t,x,u,flag)

```

```

switch flag,
case 0,
    [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
case 1,
    sys = mdlDerivatives(t,x,u);
case 3,
    sys = mdlOutputs(t,x,u);
case {2, 4, 9}
    sys = [];
otherwise
    error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 2;
sizes.NumDiscStates = 0;
sizes.NumOutputs = 2;
sizes.NumInputs = 1;
sizes.DirFeedthrough = 0;
sizes.NumSampleTimes = 0;
sys = simsizes(sizes);
x0 = [0.5,0];
str = [];
ts = [];
function sys = mdlDerivatives(t,x,u)
d = 0.10 * sin(t);
B = 10 + 3 * sin(2 * pi * t);
J = 3 + 0.5 * sin(2 * pi * t);

sys(1) = x(2);
sys(2) = 1/J * (u - B * x(2) - d);
function sys = mdlOutputs(t,x,u)
sys(1) = x(1);
sys(2) = x(2);

```

6) 作图程序: chap3_1plot.m

```

close all;

figure(1);
plot(t,sin(t),'k',t,y(:,2),'r:','linewidth',2);
xlabel('time(s)');ylabel('Position tracking');
legend('Ideal position signal','tracking signal');

figure(2);
plot(t,cos(t),'k',t,y(:,3),'r:','linewidth',2);
xlabel('time(s)');ylabel('Speed tracking');
legend('Ideal speed signal','tracking signal');

figure(3);

```

```
plot(t,ut,'r','linewidth',2);
xlabel('time(s)');ylabel('control input');
```

3.2 全局滑模控制

传统的滑模变结构控制系统的响应包括趋近模态和滑动模态两部分,该类系统对系统参数不确定性和外部扰动的鲁棒性仅存在于滑动模态阶段,系统的动力学特性在响应的全过程并不具有鲁棒性。

全局滑模控制是通过设计一种动态非线性滑模面方程来实现的。全局滑模控制消除滑模控制的到达运动阶段,使系统在响应的全过程都具有鲁棒性,克服了传统滑模变结构控制中到达模态不具有鲁棒性的特点。

3.2.1 系统描述

考虑二阶线性系统

$$J\ddot{\theta} = u(t) - d(t) \quad (3.10)$$

则

$$\ddot{\theta}(t) = b(u(t) - d(t))$$

其中, J 为转动惯量, $b = \frac{1}{J} > 0$, $d(t)$ 为干扰。

假设

$$J_{\min} \leq J \leq J_{\max} \quad (3.11)$$

$$|d(t)| < D \quad (3.12)$$

3.2.2 全局滑模函数的设计

假设理想轨迹为 θ_d , 定义跟踪误差为 $e = \theta - \theta_d$, 设计全局滑模函数为^[2]

$$s = \dot{e} + ce - f(t) \quad (3.13)$$

其中, $c > 0$, $f(t)$ 是为了达到全局滑模而设计的函数, $f(t)$ 满足以下 3 个条件^[2]:

- (1) $f(0) = \dot{e}_0 + ce_0$;
- (2) $t \rightarrow \infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0$;
- (3) $f(t)$ 具有一阶导数。

根据上述 3 个条件, 可将 $f(t)$ 设计为

$$f(t) = f(0)e^{-kt} \quad (3.14)$$

则当系统满足滑模到达条件时, 可保证 $s \rightarrow 0$ 始终成立, 即实现了全局滑模。

3.2.3 滑模控制器的设计

设计全局滑模控制律为

$$u = -\hat{J}(c\dot{\theta} - \dot{f}) + \hat{J}(\ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d) - \{\Delta J | c\dot{\theta} - \dot{f} | + D + \Delta J | \ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d | \} \text{sgn}(s) \quad (3.15)$$

其中

$$\hat{J} = \frac{J_{\max} + J_{\min}}{2}, \quad \Delta J = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \quad (3.16)$$

定义 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}s^2$$

由于

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + c\dot{e} - \dot{f} = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d + c(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - \dot{f} \\ &= bu - bd + (c\dot{\theta} - \dot{f}) - (\ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d) \\ &= b(b^{-1}(c\dot{\theta} - \dot{f}) - b^{-1}(\ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d) + u - d) \end{aligned}$$

由式(3.15)可得

$$\begin{aligned} b^{-1}\dot{s} &= b^{-1}(c\dot{\theta} - \dot{f}) - b^{-1}(\ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d) - \hat{J}(c\dot{\theta} - \dot{f}) + \hat{J}(\ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d) \\ &\quad - \{\Delta J | c\dot{\theta} - \dot{f} | + D + \Delta J | \ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d | \} \text{sgn}(s) - d \\ &= (b^{-1} - \hat{J})(c\dot{\theta} - \dot{f}) - \Delta J | c\dot{\theta} - \dot{f} | \text{sgn}(s) - (b^{-1} - \hat{J})(\ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d) \\ &\quad - \Delta J | \ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d | \text{sgn}(s) - d - D\text{sgn}(s) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} b^{-1}\dot{V} &= b^{-1}s\dot{s} = (b^{-1} - \hat{J})(c\dot{\theta} - \dot{f})s - \Delta J | c\dot{\theta} - \dot{f} | |s| \\ &\quad - (b^{-1} - \hat{J})(\ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d)s - \Delta J | \ddot{\theta}_d + c\dot{\theta}_d | |s| - ds - D |s| \end{aligned}$$

由式(3.16)得

$$b^{-1} - \hat{J} = J - \frac{J_{\max} + J_{\min}}{2} \leq \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} = \Delta J > 0$$

则

$$b^{-1}\dot{V} < -ds - D |s| < 0$$

即

$$\dot{V} < 0$$

为了降低抖振,采用饱和函数代替符号函数:

$$\text{sat}\left(\frac{\sigma}{\varphi}\right) = \begin{cases} 1, & \sigma/\varphi > 1 \\ \frac{\sigma}{\varphi}, & |\sigma/\varphi| \leq 1 \\ -1, & \sigma/\varphi < -1 \end{cases} \quad (3.17)$$

3.2.4 仿真实例

被控对象为