

1.1 钢筋混凝土非线性有限元分析的意义

钢筋混凝土结构是土建工程中应用最为广泛的一种结构。但是,对钢筋混凝土的力学性能还不能说已经掌握得很全面了,特别是混凝土。因为混凝土由水泥、水、砂子、石子及各种掺合料或者外加剂混合硬化而成,是成分复杂、性能多样的建筑材料。长期以来,人们用线弹性理论来分析钢筋混凝土结构的应力或内力,而以极限状态的设计方法确定构件的承载能力。这种钢筋混凝土构件的设计方法采用的往往是基于大量试验数据基础上的经验公式,虽然这些经验公式能够反映钢筋混凝土构件的非弹性性能,对常规设计来说也是行之有效且简便易行的,但是在使用上毕竟有局限性,也缺乏系统的理论性。这种设计方法的不足之处主要有:

(1) 规范提供的设计公式主要是针对杆件结构的构件,如梁、柱和墙板等,对于复杂的结构,并未提供计算公式。在这种情况下,设计者往往采用模型试验或弹性力学分析方法来确定内力和变形,并据此进行配筋设计。

(2) 规范提供的设计方法,不能清晰地给出结构在受到各种外荷载作用下的各受力阶段的性状及其发展规律,不能揭示结构内力和变形重分布的过程,从而也不能较准确地评估整个结构的可靠性。

(3) 规范计算公式只是保证安全的一种算法,并不能计算出结构在正常使用荷载下,构件内部任意一点的应力或者应变状态。

为了克服上述不足,人们曾做了大量的研究工作,探索考虑塑性变形和开裂的结构非线性分析方法,以便能够正确反映钢筋混凝土结构的实际性状。

随着电子计算机的发展,有限元法等现代数值计算方法在工程分析中得到了越来越广泛的应用。同样,在钢筋混凝土结构的分析中也开始显示出这一方法是非常有用的。这是由于运用有限元分析可以提供大量的结构反应信息,诸如结构位移、应力、应变、混凝土屈服、钢筋塑性流动、粘结滑移和裂缝发展等。这对研究钢筋混凝土结构的性能,改进工程设计都有重要的意义。

钢筋混凝土有限元分析方法能够给出结构内力和变形发展的全过程;能够描述裂缝的形成和开展,以及结构的破坏过程及其形态;能够对结构的极限承载能力和可靠度作出评估;能够揭示出结构的薄弱部位和环节,以利于优化结构设计。同时,它能广泛地适应于各种结构类型和不同的受力条件和环境。

由于钢筋混凝土非线性分析对计算机性能的要求比线性分析要高,计算模型也远比线性模型复杂,对操作人员的力学知识、计算机知识、结构知识的要求也更多。因此,虽然现在个人计算机和商用非线性有限元软件已经得到了很大发展,但是相对于量大面广的钢筋混凝土结构,进行非线性分析的还是少数。目前常用于下列几种情况:

(1) 用于重大结构,如核反应堆的安全壳,海上采油平台,大型地下洞库,超高、超大跨结构等。这些结构一旦失效,经济损失大,社会政治影响也大,因而在对这些结构的可靠性评价过程中,往往需要用到非线性有限元进行分析。

(2) 用于结构或构件的全过程分析。例如混凝土坝,施工工序多、工期长,交付使用后还有徐变,对这一全过程中各个阶段的受力性能,应力、位移分布,徐变后的内力重分布等,必须用非线性有限元的方法才能得出合理的结论,以供设计和施工参考。有些构件,如深梁、梁柱节点、已有主导裂缝的构件等,人们需要对其受力全过程作深入了解,这时也往往借助于非线性有限元分析。

(3) 辅助实验分析。为了研究各种参数,如混凝土强度等级、钢筋强度、配筋形式等对结构构件的影响,往往要做很多组试验,工作量大、周期长,劳动强度大。用非线性有限元法辅助实验,则可进行少量基本试验,确定参数,校核算法模型,然后进行内插或外推,得到参数变化的影响。这对减轻劳动,减少试验数量,提高效率是很有意义的。

1.2 钢筋混凝土有限元分析发展简况

为了能准确对钢筋混凝土结构进行非线性受力分析,各国学者对钢筋混凝土有限元进行了深入而广泛的研究,逐步形成了一个相对独立的研究领域,受到土木工程界专家的重视,应用也越来越广泛。

第一篇比较系统地介绍钢筋混凝土中应用非线性有限元方法的是美国学者 D. Ngo 和 A. C. Scordelies(图 1-1-1)。在他们的研究中(Ngo & Scordelies, 1967),沿用已有的有限元方法,将钢筋和混凝土均划分成三角形单元,用线弹性理论分析钢筋和混凝土的应力。但针对混凝土的特点,在钢筋与混凝土之间附加了一种粘结弹簧,从而可以分析粘结应力的变化。对于裂缝,他们根据试验总结,预先设置了一条剪切斜裂缝,裂缝间也附加了特殊的连接弹簧,以模拟混凝土裂缝间的骨料咬合力和钢筋的销栓作用。这篇研究论文发表后引起很大反响。随后,各国学者对钢筋混凝土有限元分析的各个细节方面进行了深入的研究并加强交流工作。美国土木工程师协会组织了一个 20 人的委员会,花了 5 年时间,总结和分析了钢筋混凝土结构有限元分析领域的大量研究资料和信息,在 1982 年 5 月发表了长达 545 页的综述报告(Bazan & Nilson, 1982),内容涉及:本构关系与破坏理论;钢筋模拟及粘结的表示;混凝土开裂;剪力传递;时间效应;动力分析;数值算例和应用;还在附录中发表了钢筋混凝土结构非线性分析的有限元源程序。在这一时期,欧洲和亚洲的一些学者也在

钢筋混凝土结构非线性分析方面进行了大量的研究工作。日本学者的研究工作在起步较晚的情况下很快达到了应用阶段,并且在与试验的结合方面取得了很大的进展。他们在梁、柱、梁柱节点、剪力墙、核反应堆结构等方面都进行了深入细致的研究,并部分地应用于工程设计或为制定规范提供了依据。改革开放以后,我国有一些学者到加拿大、美国和欧洲研修这方面的课题,回国后继续深入研究,无论从实验研究或理论分析上均有很多成果,并发表了大量的论文,出版了多部专著。

TITLE NO. 64-14

Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams

By D. NGO and A. C. SCORDELIS

The basic concept of using the finite element method of analysis in constructing an analytical model for the study of the behavior of reinforced concrete members is discussed. The finite elements chosen to represent the concrete, the steel reinforcement, and the bond links between the concrete and the steel reinforcement are described. Several examples of singly reinforced concrete beams on simple supports with different idealized cracking patterns are analyzed and results are presented for comparison and discussion. The effect of the assumed stiffness of the bond links is also examined briefly. No general conclusions regarding the behavior of the reinforced concrete beams under load are attempted in the present investigation. The purpose of the paper is to demonstrate the feasibility and to explore the potentialities as well as the difficulties of using the finite element method, with an ultimate aim of developing a general analytical method for the study of reinforced concrete members in the full range of loading.

Keywords: beams [structural]; bond [reinforced concrete]; computer; cracking [fracturing]; diffusion; matrix methods [structural]; reinforced concrete; stress concentration; structural analysis.

■ Structures of reinforced concrete members to load have occupied the attention of many investigators during the present century. For example, hundreds of papers have been written on the subject of shear strength of reinforced concrete members alone. Unfortunately, because of the complexities involved, no basic analytical approach has been developed which can be used to accurately determine the internal stress distribution in the concrete and in the steel reinforcement of a member throughout its loading history. Some of the complexities of the problem are enumerated below:

1. The structural system is three dimensional and is composed of two different materials: concrete and steel.

2. The structural system has a continuously changing character due to the cracking of the concrete under increasing load.

3. Effects of dowel action in the steel reinforcement, bond between the steel reinforcement and concrete, and bond slip are difficult to incorporate into a general analytical model.

4. The stress-strain relationship for concrete is nonlinear and is a function of many variables.

5. Concrete deformations are influenced by creep and shrinkage and are time-dependent.

In view of such great complexities, an analysis to determine principal stresses throughout such a member by a direct application of the classical theories of continuum mechanics is virtually impossible. However, if these detailed stress distributions in the concrete, both in the compression zone and in the tension zone between cracks, as well as in the steel reinforcement, could be determined for various load levels, studies of the basic behavior of these members would be immeasurably aided.

The general approach to be followed in this paper has been made possible by two recent developments: first, the high-speed digital computer and second, the concept of the finite element approach for the analysis of structural systems. The finite element method consists of replacing the actual structural system by a system of finite elements interconnected at nodal points. In the case of a reinforced concrete member these finite elements have to be selected so as to accurately represent the behavior of the concrete and the steel reinforcement and their interaction through the bond. This finite element system may then be analyzed by either a displacement or force method of analysis to yield the nodal point displacements and the internal stresses and deformations in the concrete and the steel reinforcement. In the initial studies described herein,

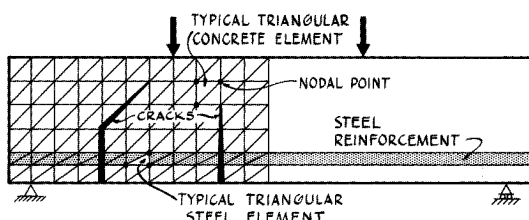


Fig. 2—Finite element idealization

152

ACI JOURNAL / MARCH 1967

图 1-1-1 世界上第一篇钢筋混凝土非线性有限元分析论文及文中插图(Ngo & Scordelis, 1967)

经过几十年的发展,钢筋混凝土有限元分析的研究有了很大发展,不仅从分析方法、理论基础和实验研究上均取得了明显的进展,而且可以说,已经到了相当实用的阶段。欧洲混凝土委员会制定的混凝土模式规范 MC 90 (CEB-FIP, 1993)已经将混凝土有限元分析方法纳入其有关条文中,我国《水工钢筋混凝土结构设计规范》及 2002 年出版的《钢筋混凝土结构设计规范》也都在附录中列入了有关有限元分析的条文。

以下就钢筋混凝土有限元分析的发展和应用中的有关问题作一简要回顾。

首先是关于混凝土的破坏准则。在早期的有限元分析中,比较多的是采用莫尔破坏准则。这一准则有两个材料常数,它在应力空间可以表示为一个多角锥体。而近代混凝土三轴破坏试验表明,多角锥不能精确地反映混凝土破坏曲面。于是,三参数、四参数和五参数破坏准则相继被提出来。已有的试验结果证明,某些四参数和五参数公式已能较好地反映出混凝土在三轴应力状态下的破坏特征,可以用于实际工程分析,并有足够的精度。

在混凝土的本构关系上,各国学者提出了多种多样的模式,如线弹性理论、非线性弹性理论、弹塑性理论、内时理论、粘弹性和粘塑性理论等,但彼此之间还差异较大。近年来,利用断裂力学和损伤力学的方法进行混凝土构件和结构分析,也取得了进展。可以说,凡是在固体力学或结构分析中应用过的理论,在混凝土本构关系建立过程中均被采用过,并用来分析不同类型的实际结构。可是,由于缺乏足够的实验基础,至今还没有一种公认的理论或本

构模型,可以广泛用于各种条件下的混凝土结构分析。为解决这一问题还有许多研究工作要做,特别是在实验研究方面。

在钢筋与混凝土间的粘结单元模型方面,已提出了多种不同的粘结单元模型,如双弹簧联结单元、粘结斜杆单元、无厚度四节点或六节点粘结单元、斜弹簧单元等。而在粘结-滑移关系(τ - S 曲线)方面,在分析中初期采用的是线性关系,随后发展为非线性关系,提出了多种 τ - S 曲线的数学表达式。由于影响因素较多,问题复杂,目前尚无完善的计算模式。

裂缝处理始终是混凝土有限元分析的关键问题。初期的混凝土有限元分析采用分离式裂缝,即裂缝置于单元之间,一旦裂缝发展,则需要重新划分网格,这是很费工时的,限制了它的进一步扩大应用。H. A. Franklin 于 1970 年(Franklin, 1970)提出了“弥散裂缝”的概念和处理方法,可以自动追踪裂缝的发展,这为有限元分析混凝土结构提供了有力的手段,得到了广泛的应用。20 世纪 80 年代,人们又将断裂力学和损伤力学用于混凝土的裂缝分析,也取得了可喜的进展。

在混凝土有限元分析中,钢筋与混凝土的组合方法也有了较大的发展。早期是与单一或几种连续介质材料组成的有限元划分方法一样,将钢筋和混凝土均划分成微小单元,这对大型钢筋混凝土结构的分析是难以实现的。后来提出了分层组合式单元,用于受弯构件的分析,可以计算出随荷载增加而裂缝沿高度截面逐步开展的情况。另一种钢筋与混凝土组合形式是由 O. C. Zienkiewicz(Zienkiewicz, et al., 1972)建议的带膜组合式,用于核电站三维结构的分析,取得了许多有价值的结果。稍后,美国的 W. C. Schnobrich(Hand, et al., 1973)提出了一种“弥散”钢筋的方法,即把钢筋化为等效的混凝土,然后统一计算刚度矩阵。这种方法计算简便,特别适用于大体积钢筋混凝土结构,因而应用很广。上述有限元组合模型的研究,对有限元技术的发展起了重要的促进作用。

此外,在求解非线性有限元方程方面,已经发展了多种有效的数值解法,最常用的是增量法和迭代法。但是,由于混凝土的应力-应变全曲线具有下降段,结构在达到极限承载力后产生“软化”现象。目前,针对处理这种软化现象虽然已经发表了不少论文,但大多数还只是针对一些特定的情况,至今还没有完善的处理方法;特别是在考虑结构软化现象后,数值解法的稳定性和收敛性问题更缺乏理论上的论证。

钢筋混凝土结构的有限元分析离开计算机是不可能实现的,因而程序的编制特别重要。目前,世界各国都编制了众多的用于混凝土有限元分析的专用程序,用来分析梁、柱单个构件,以及杆系结构和板、壳等不同类型的结构,并且已推广应用于海岸工程、核电站工程、大坝工程等大型结构的分析中,取得了良好的实际效果;除静力分析外,对温度作用、地震反应以及撞击和爆炸作用下的动力分析等领域也进行了广泛的研究。目前,许多功能强大的通用有限元程序均已嵌入有关混凝土的本构模型,为钢筋混凝土的非线性分析提供了强大的工具。

1.3 钢筋混凝土有限元分析的发展展望

尽管钢筋混凝土有限元分析得到了深入的研究和广泛的应用,但仍有许多问题需要进一步研究,例如:

(1) 试验技术。混凝土的破坏准则及本构关系均需要实验基础。在三轴应力试验方面,由于压力机能力的限制,现在的立方体试件普遍偏小,要发展大吨位的三轴压力试验机。在粘结滑移方面,许多试验数据是基于拔出试验或剖开钢筋,内贴应变片的试验。如何能真实地反映混凝土与钢筋之间的粘结滑移关系,需要无损而又直接的接触界面上的应力-应变测试技术。近来光纤测量应变技术的发展有助于这一技术的突破。现在,基于损伤力学建立的混凝土本构关系受到各国学者的普遍重视,但混凝土内部损伤量的测量还十分困难。目前多用声发射或超声波探测技术,或者用频率变化间接推测,但其精度甚至可靠性还有待进一步研究。

(2) 混凝土的本构关系。对在复杂应力状态下的破坏准则和应力-应变关系、混凝土与钢筋之间的粘结关系,虽然已经进行了不少的试验和理论研究工作,但还是不够完善,数量较多的还局限于单向和双向荷载,而复杂应力状态下的实验数据还很不充分。近十多年来,许多学者提出了不少破坏模式和应力-应变关系的计算公式,但是由于试验方法不同,加上混凝土材料的性质变异性很大,所得结果往往不大一致。许多问题还需要进一步讨论。对于近期发展的高性能混凝土、纤维混凝土、轻质混凝土等的破坏准则尚需进行系统的试验和总结。对于非比例加载、多次重复加载、特殊环境加载(高温,冷冻等)条件下的本构关系也需研究。

(3) 理论框架。从理论方面来看,尽管有很多理论可供应用,但对于像钢筋混凝土这样具有复杂本构关系的结构,尚需进一步研究。例如,混凝土的受压或受拉全过程曲线,都存在软化阶段。用弹塑性理论分析时,如何处理这一“软化”现象,仍是一个困难的问题。又如断裂力学对于处理已经存在的单个裂缝的扩展是相当有效的。但对于经常有成批裂缝存在的钢筋混凝土结构,应当如何处理也是需要深入研究的问题。近年来,有许多学者将损伤力学应用于混凝土结构分析,这方面的课题确实吸引了不少学者,研究工作相当活跃,也有了很多成果。

(4) 数值方法的计算精度。在混凝土结构的有限元分析中,由于非线性因素很多,为了考虑这些非线性因素往往要引入许多参数,这些参数还可能相互影响,有的还很难由试验直接测定。再加上混凝土材料本身的复杂性和离散性,有些断裂和破坏机理还不完全清楚,所以对结构的非线性分析结果往往有较大的离散性。当结构出现严重的非线性和软化时,隐式迭代的收敛性问题也很严重,往往由于计算不收敛而导致分析失败。这也是在今后一段时间内需要重点研究和改进的问题。

(5) 有关分析软件的开发和研究。目前广泛应用的几乎都是国外的商业软件。我国是混凝土结构应用最广泛的国家,但在软件开发方面与国外差距很大。应大力提倡研发有自主知识产权的功能强大的混凝土非线性有限元分析软件。

应力与应变分析

2.1 向量与张量

1. 向量的表示法

在现实世界中,有一些物理量由一个数值即可确定,这种量称为标量,例如,物体的质量、温度、人的身高、三角形的面积等;而另一些物理量则不仅与其数值大小有关,而且还与方向有关,例如,力、速度、力矩等。这类具有大小和方向的量称为向量,也称为矢量。向量常用以下几种方法表示(如图 2-1-1 所示)。

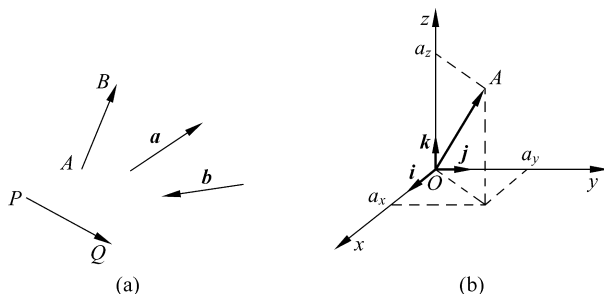


图 2-1-1 向量表示法

(1) 字母表示法

该法是用字母上面加一箭头表示,如 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$,或用两个字母表示,如 $\overrightarrow{PQ}$ 等。现在我国《量和单位》(GB 3100~3102—1993)已规定用黑体字母表示向量,如 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 等表示。

(2) 坐标表示法

该法也称为代数表示法。设在直角坐标系 $O-xyz$ 中,沿坐标轴的单位向量为 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$,向量 $\mathbf{a}$ 在坐标轴上的投影为 a_x 、 a_y 、 a_z ,则向量 $\mathbf{a}$ 可表示为

$$\mathbf{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (2-1-1)$$

式中, $a_x \vec{i}$ 、 $a_y \vec{j}$ 、 $a_z \vec{k}$ 就是向量 $\mathbf{a}$ 在坐标轴 x 、 y 、 z 方向的分量。这种表示法便于向量运算。例如,向量 $\mathbf{a}$ 的模(绝对值的大小)可按下式计算:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2-1-2)$$

(3) 矩阵表示法

由式(2-1-1)可以看出,若坐标系和单位坐标向量已经选定,则向量 $\mathbf{a}$ 便由三个标量 a_x, a_y, a_z 决定。于是,可用一组有序的数来表示向量,这便是矩阵表示法,如

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2-1-3)$$

这种表示方法很简洁,计算也很方便,在力学分析及编制计算机程序公式时常用。

2. 向量的基本运算

(1) 向量的数乘

用一个数(标量) k 乘向量 $\mathbf{a}$,产生向量 $\mathbf{b}$,其方向当 $k>0$ 时与向量 $\mathbf{a}$ 相同,当 $k<0$ 时,则相反,而大小为原向量的 $|k|$ 倍,记为

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a} \quad (2-1-4)$$

显然,若 $k=0$,则有 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ 。

(2) 向量的和与差

若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 可表达为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-1-5)$$

则两向量之和为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k} \quad (2-1-6)$$

两向量之差为

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \mathbf{i} + (a_y - b_y) \mathbf{j} + (a_z - b_z) \mathbf{k} \quad (2-1-7)$$

显然,只有当 $a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$ 时,两向量才相等,即有 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 。

(3) 向量的数量积

向量的数量积又称点积或内积。设两向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ ,则其点积定义为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2-1-8)$$

这表示第一个向量的大小(模)与第二个向量在第一个向量上的投影(分量的模)的乘积。点积的结果为一标量。在实际应用中,如作用力 $\mathbf{F}$ 与物体位移 $\mathbf{u}$ 的方向不一致时,该力所做的功 W 便可用点积来表示,即

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (2-1-9)$$

当两向量用代数式(2-1-5)表示时,点积可按下式计算:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2-1-10)$$

当两向量用矩阵表示时,即

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2-1-11)$$

则两向量的点积可按下式运算

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (2-1-12)$$

(4) 向量的向量积

向量的向量积又称作叉积。若两向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 间的夹角为 θ , 则两向量的叉积产生另一个向量 $\mathbf{c}$, 其大小定义为

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta \quad (2-1-13)$$

向量 $\mathbf{c}$ 的方向与向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 所组成的平面垂直, 并且 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 构成右手系, 并记作

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2-1-14)$$

若两向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 用代数式(2-1-5)表示, 则向量积可按下式计算:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \mathbf{k} \quad (2-1-15)$$

为便于记忆, 可写成行列式的形式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2-1-16)$$

注意, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, 即向量积不满足交换律。

由向量的点积和叉积可以求得两向量的夹角计算式

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \\ \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \end{aligned} \right\} \quad (2-1-17)$$

(5) 3 个向量的混合积

设有 3 个向量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k} \\ \mathbf{c} &= x_3 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{j} + z_3 \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-1-18)$$

则它们的混合积定义为

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (2-1-19)$$

混合积的结果是一个数(标量), 其绝对值是以 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 为边长的平行六面体的体积。

有关向量的概念与运算的更详细的知识可参考专门的资料。

3. 字母标记法

在力学分析中有不少物理量或几何量必须用一组量才能描述。例如, 在常用的直角坐标系中:

空间点的位置, 用 3 个坐标值 x 、 y 、 z 确定;

力用 3 个分量表示, 如 f_x 、 f_y 、 f_z ;

位移用 3 个分量表示, 如 u 、 v 、 w ;

力矩用 3 个分量表示, 如 M_x 、 M_y 、 M_z 等。

有一些量可用 $3^2 = 9$ 个分量来表示, 如应力可用 9 个分量来表示: σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 、 τ_{xz} 、 τ_{zx} ; 应变分量也可用 9 个分量来表示: ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yx} 、 γ_{yz} 、 γ_{zy} 、 γ_{xz} 、 γ_{zx} 等。

为了表达简洁,运算方便,上述各量可采用指标符号记法表达。所谓指标符号记法,就是对同一物理量的各分量均用同一字母表示,

而用附加下标(称为指标)来区分各分量。例如,

如图 2-1-2 所示坐标值 x, y, z 可用 x_1, x_2, x_3 表示,并用 $x_i (i=1, 2, 3)$ 来概括;

位移 u, v, w 可用 u_1, u_2, u_3 表示,并用 $u_i (i=1, 2, 3)$ 来概括;

坐标轴方向的单位向量 i, j, k 可用 e_1, e_2, e_3 表示,并用 $e_i (i=1, 2, 3)$ 来概括。在本书中,

如无特别注明,字母指标中的下标字母(上述诸

例中的 i)均可取数字 1、2、3。当然,除 i 外,其他字母也可运用,如 x_m 和 u_p 等,其中 m, p 均

可取数 1、2、3。3 个分量的量用一个下标的字母指标表示,9 个分量的量可用两个下标的字母

标号表示。例如,用 σ 表示应力,用 σ_{ij} 表示应力分量,双重标号 i 与 j 均可取 1、2、3。这样,

σ_{ij} 就表示 9 个分量 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{13}, \sigma_{31}$ 。

在微分运算中也可采用字母标记法。我们约定,用逗号(,)表示微分。例如

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{或} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

可用 $\varphi_{,x}, \varphi_{,y}, \varphi_{,z}$ 表示,简写为 $\varphi_{,x_i}$,进一步简写为 $\varphi_{,i}$ 。

4. 求和约定

考察求和表达式

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (2-1-20)$$

常缩写为

$$S = \sum_{i=1}^3 a_i x_i \quad (2-1-21)$$

其实,用其他字母作下标,结果也是一样的,如

$$S = \sum_{m=1}^3 a_m x_m \quad (2-1-22)$$

$$S = \sum_{n=1}^3 a_n x_n \quad (2-1-23)$$

以上不同字母下标的求和表达式都表示同一种运算,运算求得的总和与所用的下标符号并

无依赖关系。因此,可以约定:若某一项的一个指标重复一次时,就表示将标号轮换取 1、2、

3 时所得各项之和。这种约定称作求和约定,而同一项中重复一次的字母指标称为求和指

标号或哑标。有了求和约定,许多求和式子可以写得很简洁,例如

$$S = a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (2-1-24)$$

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2-1-25)$$

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2-1-26)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2) \end{aligned} \quad (2-1-27)$$

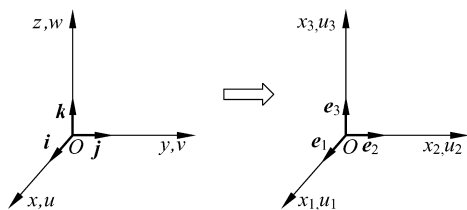


图 2-1-2 字母标记法

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_m \mathbf{e}_m = \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{e}_3 \quad (2-1-28)$$

$$\varphi_{,i} dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 \quad (2-1-29)$$

在运用求和指标时,应注意以下几点:

① 哑标变换时并不改变其含义,如

$$a_i b_i = a_m b_m = a_j b_j \quad (2-1-30)$$

$$a_{ij} x_j = a_{in} x_n \quad (2-1-31)$$

② 在有括号的运算中要注意区别

$$a_{ii}^2 \neq (a_{ii})^2$$

$$a_{ii}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2$$

$$(a_{ii})^2 = (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2$$

因
而

③ 如果需用重复下标而又不表示求和时,应加以注明。如正应力分量 σ_{ii} (不求和) 表示只取 σ_{11} 、 σ_{22} 、 σ_{33} 中的任一项正应力,而不是取 3 个正应力之和。

同一项内不重复出现的标号称为自由指标。自由指标表示一般项,可取标号为 1、2 或 3 中的任何一项,例如

$$a_j = b_{ji} x_i \quad (2-1-32)$$

其中 i 为求和指标(哑标), j 为自由标号。该式表示下列 3 式均成立,亦即下列 3 式的概括表达:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 \\ a_2 &= b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3 \\ a_3 &= b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-1-33)$$

显然,上式也可表达为 $a_m = b_{mj} x_j$ 或 $a_i = b_{ik} x_k$ 。

5. 克罗内克 δ 符号和置换符号 e_{ijk}

(1) 克罗内克 δ 符号是一个重要符号,称为 Kronecker delta,它有 9 个分量,定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2-1-34)$$

用矩阵表示时可写作

$$\boldsymbol{\delta}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1-35)$$

使用 δ_{ij} 可得到下列等式:

$$\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = \delta_{jj} = 3$$

$$\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$$

$$a_{ij} \delta_{ij} = a_{ii} = a_{jj}$$

$$a_j \delta_{ij} = a_i$$

在直角坐标系中,单位坐标轴向量 $\mathbf{e}_i$ 的内积具有下列关系

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2-1-36)$$

这一性质在坐标轴转换计算中是很有用的。因克罗内克符号用 δ_{ij} 表示,工程界人士常直称

之为“代尔塔”符号。

(2) e_{ijk} 称为置换符号,又称为排列符号,它的定义为

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & i, j, k \text{ 为顺循环} \\ -1, & i, j, k \text{ 为逆循环} \\ 0, & i, j, k \text{ 有重复标号(非循环)} \end{cases} \quad (2-1-37)$$

例如

$$\begin{aligned} e_{123} &= e_{231} = e_{312} = 1 \\ e_{321} &= e_{213} = e_{132} = -1 \\ e_{112} &= e_{322} = e_{233} = 0 \end{aligned}$$

e_{ijk} 有 27 个分量,其中只有 6 个不为零。显然,在 e_{ijk} 的标号中,相邻标号互换一次,则改变正负号一次。因而,当标号位置变换偶次时,不改变循环性质,也不改变 e_{ijk} 的符号;反之,若标号位置交换为奇次,则 e_{ijk} 改变符号。例如

$$e_{ijk} = -e_{ikj} = -(-e_{kij}) = e_{kij} \quad (2-1-38)$$

由上述定义,一个三阶行列式的值可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = e_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3} \quad (2-1-39)$$

用上述置换符号,两个坐标轴方向的单位向量的向量积可表示为

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \begin{cases} \mathbf{e}_k, & i, j, k \text{ 为顺循环} \\ -\mathbf{e}_k, & i, j, k \text{ 为逆循环} \\ 0, & i, j, k \text{ 为非循环} \end{cases}$$

上式也可表示为

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = e_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (2-1-40)$$

于是,两个向量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的向量积可表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A_i \mathbf{e}_i \times B_j \mathbf{e}_j = A_i B_j \mathbf{e}_k e_{ijk} \quad (2-1-41)$$

因 $e_{ijk} = -e_{jik}$, 所以有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (2-1-42)$$

可以证明,置换符号与代尔塔符号有下列恒等关系

$$e_{ijk} e_{ist} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks} \quad (2-1-43)$$

并称为 e - δ 等式。

6. 张量的定义

张量是表征一些物理量或几何量的有效数学工具,但是它的严格定义比较难懂。为此,我们先从向量的数学定义说起,并只限于介绍笛卡儿张量的基本概念。

我们已经知道向量是有大小有方向的量。在空间直角坐标系中,向量可以用坐标轴的 3 个分量来表示。若选择的坐标系为 $x_i (i=1, 2, 3)$, 坐标轴的单位向量为 $\mathbf{e}_i (i=1, 2, 3)$, 有一向量 $\mathbf{u}$, 在坐标轴方向的分量为 u_i , 则向量 $\mathbf{u}$ 可表示为

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$$

假如转动坐标轴得到新坐标系 $x'_i (i=1,2,3)$, 其相应的坐标轴向量为 e'_i , 如图 2-1-3 所示, 则向量 u 在 x'_i 坐标系中的 3 个分量为 u'_i , 于是向量 u 又可表示为

$$u = u'_i e'_i \quad (2-1-44)$$

坐标系虽然不同, 但表示的是同一向量 u , 所以应有

$$u = u_i e_i = u'_i e'_i \quad (2-1-45)$$

我们再看一下 e_i 与 e'_i 之间的关系。首先把 e'_1 看做在坐标系 x_i 中的一个矢量, 设 e'_1 与坐标轴 x_1, x_2, x_3 的方向余弦分别为 l_{11}, l_{12}, l_{13} , 由于 e'_1 为单位向量, 因而它在 x_i 坐标轴方向的分量即为 l_{11}, l_{12}, l_{13} , 或者说

$$e'_1 = l_{11}e_1 + l_{12}e_2 + l_{13}e_3 = l_{1i}e_i \quad (2-1-46)$$

同理, e'_2 在 x_i 中的方向余弦为 $l_{2i} (i=1,2,3)$, e'_3 在 x_i 中的方向余弦为 $l_{3i} (i=1,2,3)$, 并且有

$$\begin{aligned} e'_2 &= l_{2i}e_i \\ e'_3 &= l_{3i}e_i \end{aligned} \quad (2-1-47)$$

上面三式可用一个简洁式子表示, 即

$$e'_j = l_{ji}e_i \quad (2-1-48)$$

l_{ji} 有 9 个元素, 写成矩阵形式为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (2-1-49)$$

称为坐标转换矩阵。

将式(2-1-49)代入式(2-1-45)可知

$$u_j = u'_i l_{ij} \quad (2-1-50)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} \quad (2-1-51)$$

这样我们可以给出向量的解析定义: 向量由 3 个分量确定, 在坐标转动时, 其分量之间的关系服从坐标转换公式(2-1-50)。这一定义当然不如前面给出的向量定义直观明了, 但对于引出张量的定义很有用。也可以说, 向量的 3 个分量的关系服从坐标转换公式(2-1-50)时, 称为一阶张量。向量就是一阶张量。下面推广到二阶。

设在坐标系 x_i 中有一个向量具有 $3^2=9$ 个分量 a_{ij} (这可以想像为 3 个互相垂直的面上都有一个向量, 而每一向量又有 3 个分量), 坐标轴转动后得到新坐标系 x'_i , 该量的 9 个分量变为 a'_{ij} 。若这些分量满足下列转换关系:

$$a_{ij} = a'_{mn} l_{mi} l_{nj} \quad (2-1-52)$$

则这 9 个分量构成了一个二阶张量。式中, l_{mi}, l_{nj} 是 x'_i 的坐标轴在 x_i 坐标系中的方向余弦。

同理, 我们还可以推广到三阶(有 $3^3=27$ 个分量)或更高阶的张量, 但在力学分析中常用的是一阶(向量)和二阶张量。例如, 物体内一点的应力状态就可用二阶张量来表示。

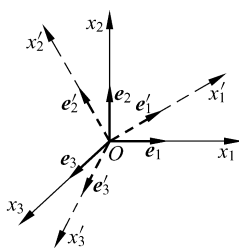


图 2-1-3 坐标轴旋转

若张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 的分量满足 $a_{ji} = a_{ij}$, 则称该张量为对称张量。例如, 应力张量和应变张量都是对称张量。

若张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 的分量满足 $a_{ji} = -a_{ij}$, 则称为反对称张量。显然, 在反对称二阶张量中必有 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ 。

一般张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 为非对称张量。若有另一张量 $\mathbf{a}'_{ij}$, 其分量满足 $a'_{ji} = a_{ij}$, 亦即 $\mathbf{a}_{ij}$ 与 $\mathbf{a}'_{ij}$ 所对应的矩阵互为转置, 则张量 $\mathbf{a}'_{ij}$ 称为张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 的转置张量。

7. 张量的基本运算

(1) 张量相等

设张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 与张量 $\mathbf{b}_{ij}$ 对应的分量一一相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (2-1-53)$$

则称两张量相等。

(2) 张量的加减

将张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 与张量 $\mathbf{b}_{ij}$ 相应的分量相加或相减, 可得到一个新的张量, 新张量称为两张量的和或差, 即

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (2-1-54)$$

(3) 张量的数乘

用一标量 α 乘张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 各分量, 得到同阶张量 $\mathbf{b}_{ij}$, 为

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (2-1-55)$$

(4) 向量的并乘(张量的外积)

向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的并乘用 $\mathbf{ab}$ 表示, 它定义为

$$\mathbf{ab} = a_i b_j \quad (2-1-56)$$

用矩阵形式表示则为

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (2-1-57)$$

向量并乘后得到一个二阶张量。并乘与向量的点积和叉积都不同, 点积的结果为一个标量, 叉积的结果是一个向量, 并乘的结果则为一个二阶张量。

向量是一阶张量, 并乘后升阶为二阶张量。这种运算可以推广到高阶张量, 张量的并乘运算称为张量的外积。设有两个张量, 分别为 m 和 n 阶, 则这两个张量的外积为一个 $m+n$ 阶张量。例如, 有二阶张量 $\mathbf{a}_{ij}$ 和 $\mathbf{c}_{kl}$, 一阶张量 $\mathbf{b}_k$, 则外积

$$a_{ij} b_k = d_{ijk} \quad (2-1-58)$$

为三阶张量;

$$a_{ij} c_{kl} = d_{ijkl} \quad (2-1-59)$$

为四阶张量。

注意, 进行并乘的两个张量的下标是不相同和不重复的。

(5) 张量的缩并与张量的点积

在上述张量并乘运算中, 若取任意两个下标重复(注意, 重复下标表示求和), 则可以得到一个降阶的张量, 这种运算称为张量的缩并。例如, $\mathbf{a}_i$ 、 $\mathbf{b}_i$ 均为一阶张量(向量), 则

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c \quad (2-1-60)$$

为一标量(降阶为零阶张量)。这一运算公式与向量的点积是一样的,也可推广到高阶张量,并称为张量的点积。如果 a_{ij} 、 b_{ij} 均为二阶张量,则

$$a_{ik} b_{kj} = c_{ij} \quad (2-1-61)$$

仍为二阶张量。这种运算所得新张量的阶数为原两张量阶数之和减 2。

(6) 二阶张量的双点积

还有一种二阶张量的数量积,用双点号表示。例如 a 、 b 均为二阶张量,则

$$c = a : b = a_{ij} b_{ij} \quad (2-1-62)$$

二阶张量双点积的结果为一标量,故又称数量积。在线弹性理论中,应变比能可用数量积表示。设应力张量为 σ_{ij} ,应变张量为 ϵ_{ij} ,则应变比能为

$$W = \frac{1}{2} \sigma : \epsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (2-1-63)$$

张量符号在推导公式中书写方便,表达简洁,因而张量分析在力学与结构工程中的应用日益广泛。这里只对笛卡儿张量作了一些简要的介绍,读者若需要张量的进一步知识,可以参阅有关专著。

2.2 应力分析

2.2.1 外力、内力与应力

力是物体间的相互作用。当取某一物体(或由几个物体组成的系统)作为研究对象时,我们可以把力分为外力与内力。外力是指其他物体作用于该物体上的力;内力是指该物体内部各部分之间相互作用的力。应该注意,内力和外力在一定条件下是可以互相转化的。例如,为了研究物体内部相互作用的内力,我们常用假想的截面将物体切开,取出一部分为研究对象,这一部分通常称为隔离体。这时,另一部分对隔离体的作用力对隔离体来讲是外力,而对整个物体来讲则是内力。

用假想截面将物体切开后,截面上各点之间的相互作用力一般是不相同的。我们在截面上取包含点 P 在内的一微面积 ΔA ,如图 2-2-1 所示。设作用在 ΔA 上的内力为 ΔF ,则作用在 ΔA 上力的集度的平均值为 $\bar{\sigma} = \Delta F / \Delta A$ 。当 ΔA 无限缩小而聚于 P 点时,取

$$\sigma_P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2-2-1)$$

称为 P 点的应力。因为面积 ΔA 是标量,所以 σ_P 的方向就是 ΔF 的极限方向,是一个向量。 σ_P 是截面上的总应力,为便于公式推导和数值计算,可以用它在坐标轴方向上的 3 个分量来表示,如 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 等。另外,在分析物体的变形和强度问题时,我们又常将总应力分解为正应力和剪应力。正应力是应力在截面法线方向的分量,剪应力是在截面切线方向的分量。工程上,正应力常用 σ 表示,剪应力常用 τ 表示,如图 2-2-1 所示。

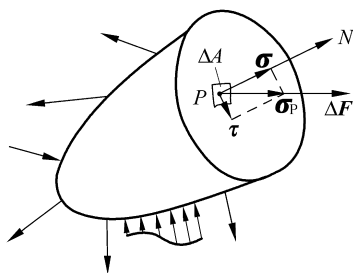


图 2-2-1 P 点的应力

2.2.2 一点应力状态表示法

一般情况下,截面上各点的应力不一定相同。此外,即使对于同一点,其截面方向不同时,应力的大小和方向也会不同。为了分析物体内一点的应力状态,即分析同一点在截面方向不同时截面上的应力大小和方向,在物体内部取出包含该点在内的一个微元六面体,六面体的各面与相应的坐标面相平行,平行于各坐标轴的各棱边之长分别为 Δx 、 Δy 和 Δz ,如图 2-2-2 所示。将每个截面上的总应力沿坐标轴方向分解为 3 个分量,即分解为一个正应力和两个剪应力,6 个面共有 18 个应力分量。对于六面体的两对面,即平行于同一坐标面的两对面,当边长趋向于零时,实际上变为同一截面的两面,但外法线方向相反,因而这两对面上的应力或应力分量必然大小相等而方向相反。这样,一点的应力状态便可以用 3 个相邻面上的 9 个应力分量来表示。

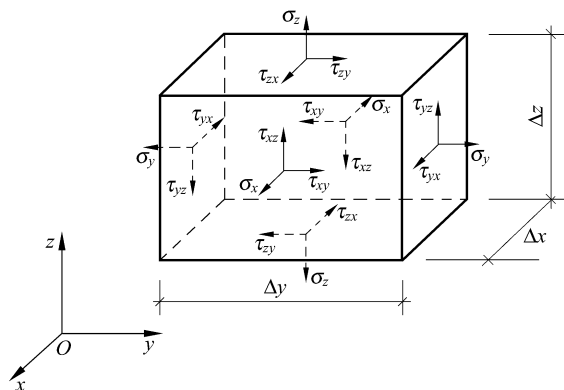


图 2-2-2 一点的应力分量

为了表示不同面上的不同应力分量,每一个应力取两个下标。第一个下标表示应力作用于哪个面,第二个下标则表示应力分量平行于哪个轴。例如, σ_{xx} 表示应力作用面的法线与 x 轴平行,而应力分量方向也与 x 轴平行; τ_{xy} 表示应力作用面的法线与 x 轴平行,而应力分量方向为 y 方向。显然,下标两个字母相同时为正应力,下标字母不同时为剪应力。为简便起见, σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 3 个正应力可简记为 σ_x 、 σ_y 和 σ_z 。取截面外法线方向与某一坐标轴方向一致的面为正面,正面上的应力分量与坐标轴正方向一致者为正,反之为负。相反,若某一截面的外法线方向与坐标轴方向相反,则称为负面。负面上的应力分量以沿坐标轴负方向的为正,沿坐标轴正方向的为负。如图 2-2-2 所示,应力分量全是正方向的。于是,一点的应力状态可以表示为一个二阶应力张量

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-2-2)$$

上式 9 个应力分量中,6 个剪应力有三个互等关系。例如,以六面体前后两个面的中心连线为轴,列出力矩平衡方程为

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2} = 0$$

从而可得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2-2-3)$$

同理有

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2-2-4)$$

这就证明了剪应力互等定律。因此,应力张量是一个对称的二阶张量。在张量运算中,常用同一字母表示同一物理量,这一物理量的不同分量则用不同的下标表示。这样,应力张量也可表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2-5)$$

由于应力张量是对称张量,只有 6 个分量是独立的,因此一点的应力状态又常用 1 个列向量来表示为

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (2-2-6)$$

或

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T \quad (2-2-7)$$

以上三种表示方法,第一种工程表示法为工程师们所熟悉。第二种字母标记法表达简洁,力学工作者常用,且有在工程界普及的趋势。第三种矩阵表示法在计算力学和计算机程序编制中应用最为广泛。

2.2.3 任意斜截面上的应力

若某一点微六面体的 9 个应力分量为已知,则可以求出经过该点的任一斜面上的应力。

图 2-2-3 表示在 O 点附近取出的一个微六面体,有一任意斜面与六面体的 3 个棱线交

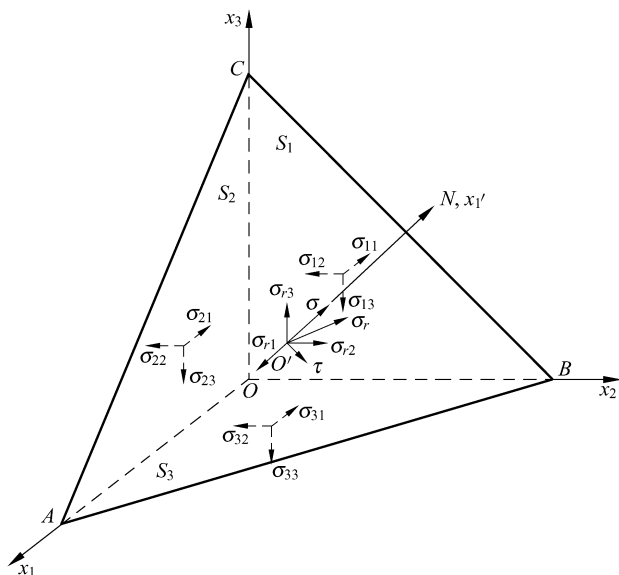


图 2-2-3 斜面上的应力

于 A、B、C。今取 3 个棱边 OA 、 OB 、 OC 为坐标轴 x_1 、 x_2 、 x_3 。若斜面外法线方向为 N ，其方向余弦为

$$\cos(N, x_1) = l_1, \quad \cos(N, x_2) = l_2, \quad \cos(N, x_3) = l_3$$

又设斜面 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，则 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OAC$ 、 $\triangle OAB$ 的面积分别为

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S \cos(N, x_1) = Sl_1 \\ S_2 &= S \cos(N, x_2) = Sl_2 \\ S_3 &= S \cos(N, x_3) = Sl_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-2-8)$$

设斜面上的总应力为 σ_r ，总应力在 3 个坐标轴方向的应力分量为 σ_{r1} 、 σ_{r2} 、 σ_{r3} 。由平衡条件 $\sum X = 0$ 可得

$$\sigma_{r1} S = \sigma_{11} Sl_1 + \sigma_{12} Sl_2 + \sigma_{13} Sl_3$$

$$\text{即} \quad \sigma_{r1} = \sigma_{11} l_1 + \sigma_{12} l_2 + \sigma_{13} l_3 \quad (2-2-9a)$$

$$\text{同理有} \quad \sigma_{r2} = \sigma_{21} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \sigma_{23} l_3 \quad (2-2-9b)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_{31} l_1 + \sigma_{32} l_2 + \sigma_{33} l_3 \quad (2-2-9c)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{r1} \\ \sigma_{r2} \\ \sigma_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \quad (2-2-10)$$

用字母标号法可写成简洁的形式

$$\sigma_{ri} = \sigma_{ij} l_j \quad (2-2-11)$$

这一公式称为柯西(Cauchy)公式。斜面上的总应力等于 3 个应力分量之和，即有

$$\sigma_r^2 = \sigma_{r1}^2 + \sigma_{r2}^2 + \sigma_{r3}^2 \quad (2-2-12)$$

通常需要将总应力分解为垂直于斜面的正应力和平行于斜面的剪应力。为此，我们取斜面中心点 O' ，以过 O' 点的外法线为坐标轴 $O'x'_1$ ，同时在斜面上取互相垂直的两个坐标轴 $O'x'_2$ 和 $O'x'_3$ 。新坐标系各轴在原坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中的方向余弦共 9 个，如表 2-2-1 所示。

表 2-2-1 新坐标轴在原坐标系中的方向余弦

	x_1	x_2	x_3
x'_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x'_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x'_3	l_{31}	l_{32}	l_{33}

斜面上的正应力可计算如下：

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{r1} l_{11} + \sigma_{r2} l_{12} + \sigma_{r3} l_{13} \\ &= \sigma_{11} l_{11}^2 + \sigma_{22} l_{12}^2 + \sigma_{33} l_{13}^2 + 2\sigma_{12} l_{11} l_{12} + 2\sigma_{23} l_{12} l_{13} + 2\sigma_{31} l_{13} l_{11} \end{aligned} \quad (2-2-13)$$

在斜面上沿 $O'x'_2$ 轴和 $O'x'_3$ 轴的剪应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma'_{12} &= \sigma_{r1} l_{21} + \sigma_{r2} l_{22} + \sigma_{r3} l_{23} \\ &= \sigma_{11} l_{11} l_{12} + \sigma_{22} l_{12} l_{22} + \sigma_{33} l_{13} l_{23} + \sigma_{12} (l_{11} l_{22} + l_{21} l_{12}) \\ &\quad + \sigma_{23} (l_{12} l_{23} + l_{22} l_{13}) + \sigma_{31} (l_{13} l_{21} + l_{11} l_{23}) \end{aligned} \quad (2-2-14)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{13} &= \sigma_{r1} l_{31} + \sigma_{r2} l_{32} + \sigma_{r3} l_{33} \\ &= \sigma_{11} l_{31} l_{11} + \sigma_{22} l_{32} l_{12} + \sigma_{33} l_{33} l_{13} + \sigma_{12} (l_{31} l_{12} + l_{11} l_{32}) \\ &\quad + \sigma_{23} (l_{33} l_{12} + l_{13} l_{32}) + \sigma_{31} (l_{33} l_{11} + l_{13} l_{31}) \end{aligned} \quad (2-2-15)$$

同理,可以取 $O'x'_2$ 为法线作一斜面,还可取 $O'x'_3$ 为法线作另一斜面,每一个斜面上均可求得一个正应力和两个互相垂直的剪应力。计算公式与上类似,这里不再一一列出。最后,我们得到在新的坐标系 $O'x'_1x'_2x'_3$ 中同一点的另外 9 个应力分量,这些分量均可由原坐标系中的 9 个应力分量求出,可用下式计算:

$$\sigma'_{mn} = \sigma_{ij} l_{mi} l_{nj} \quad (2-2-16)$$

写成矩阵的形式,这一计算式可表达为

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2-17)$$

这就是应力分量的坐标转换公式。

由此可见,若某一点的 9 个应力分量为已知,则可以求出任意斜面上的正应力和剪应力,以及以该斜面法线方向为新坐标轴的 9 个应力分量。

2.2.4 主应力与应力张量不变量

如上所述,经过同一点的不同斜面上的应力是随斜面的方向而变化的。若斜面变化到某一方向,其法线方向余弦为 l_1, l_2, l_3 , 该斜面上的剪应力分量都等于零,则该斜面上的正应力称为主应力。由于剪应力分量等于零,所以该斜面上的总应力 σ_r 就等于主应力。我们用 σ 表示主应力,则 $\sigma_r = \sigma$ 。总应力在三个坐标轴方向的分量为

$$\sigma_{r1} = \sigma l_1, \quad \sigma_{r2} = \sigma l_2, \quad \sigma_{r3} = \sigma l_3 \quad (2-2-18)$$

另一方面,若取斜面法线为投影坐标轴,由任意斜面应力公式(即柯西公式)有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} l_1 + \sigma_{12} l_2 + \sigma_{13} l_3 &= \sigma_{r1} = \sigma l_1 \\ \sigma_{21} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \sigma_{23} l_3 &= \sigma_{r2} = \sigma l_2 \\ \sigma_{31} l_1 + \sigma_{32} l_2 + \sigma_{33} l_3 &= \sigma_{r3} = \sigma l_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-2-19)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \quad (2-2-20)$$

可见,这相当于求以应力分量组成的 3×3 阶矩阵的特征值问题: σ 为其特征值,而 l_1, l_2, l_3 为相应的特征向量。

上式移项后,还可写成

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-2-21)$$

这是关于 l_1, l_2, l_3 的一组齐次方程。由方向余弦的性质 $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ 可知, l_1, l_2, l_3 不会同时为零,所以这组齐次方程应有非零解。齐次方程有非零解的必要条件是其系数行列式值等于零,即

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-2-22)$$

写成简洁的形式为

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (2-2-23)$$

展开后得到关于 σ 的一个三次方程

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2-2-24)$$

其中,

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2-2-25a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \end{aligned} \quad (2-2-25b)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (2-2-25c)$$

在弹性力学中已经证明,这个三次方程有 3 个实根,也即可以求出 3 个主应力,而且这 3 个主应力的方向是正交的。一般将这 3 个主应力按由大到小的次序排列,并用符号 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 表示,分别称为第一、第二和第三主应力。第一主应力又称最大主应力,第三主应力又称为最小主应力。求出 3 个主应力以后,将每一个主应力值代回方程(2-2-21),可以求出主应力作用斜面的方向余弦。3 个主应力所在面的法线组成了一个正交的坐标系。若以主应力方向为轴(称为主轴),在这个坐标系内的应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2-2-26)$$

对于给定的应力状态,其主应力是确定的,即其大小和方向与坐标轴的选择无关。由此可以推出, I_1 、 I_2 和 I_3 也必定是与坐标轴选择无关的量。这 3 个量分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量。

通常取 3 个主应力之和的平均值定义为平均正应力,即

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} \quad (2-2-27)$$

一点的应力张量可以看成两部分之和。一部分是以平均正应力的应力状态,称为应力球张量,即

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2-2-28)$$

另一部分等于应力张量减去相应应力球张量,称为应力偏张量或应力偏量,记作 s_{ij} ,即

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2-2-29)$$

于是应力张量可以分解为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2-30)$$

第一部分是平均应力状态,其主应力等于平均正应力;第二部分应力偏量也是一个对称的二阶张量。对应力偏量,我们可求出其主应力偏量,其方向与原应力张量的主应力方向一致,且有

$$s_i = \sigma_i - \sigma_m, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2-2-31)$$

因此,只要求出平均正应力与应力偏量的主值,即可求出主应力。下面,先求主应力偏量。与式(2-2-23)类似,可求得方程为

$$|s_{ij} - s\delta_{ij}| = 0 \quad (2-2-32)$$

展开后可得三次方程为

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (2-2-33)$$

其中,

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \quad (2-2-34a)$$

$$J_2 = - \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s_{33} & s_{31} \\ s_{13} & s_{11} \end{vmatrix} \\ = -s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{33}s_{11} + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 \quad (2-2-34b)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} \\ = s_{11}s_{22}s_{33} + 2s_{12}s_{23}s_{31} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{13}^2 - s_{33}s_{12}^2 \quad (2-2-34c)$$

式中, J_1 、 J_2 和 J_3 分别称为应力偏量的第一、第二和第三不变量。由于第一应力偏量不变量 $J_1=0$,所以求应力偏量的主值要方便一些,求出 $s_i(i=1,2,3)$ 以后,即可求出主应力为

$$\sigma_i = s_i + \frac{I_1}{3} \quad (2-2-35)$$

将其代入求主应力的方程,得

$$\left(s + \frac{I_1}{3}\right)^3 - I_1 \left(s + \frac{I_1}{3}\right)^2 + I_2 \left(s + \frac{I_1}{3}\right) - I_3 = 0 \quad (2-2-36)$$

化简后可得

$$s^3 - \left(\frac{I_1^2}{3} - I_2\right)s - \left(\frac{2I_1^3}{27} - \frac{I_1 I_2}{3} + I_3\right) = 0 \quad (2-2-37)$$

与求主应力偏量的方程对比可知

$$J_2 = \frac{I_1^2}{3} - I_2 \quad (2-2-38a)$$

$$J_3 = \frac{2I_1^3}{27} - \frac{I_1 I_2}{3} + I_3 \quad (2-2-38b)$$

可见应力张量不变量与相应的应力偏量的不变量是密切相关的。在弹塑性理论中, J_2 、 J_3 用得较多,因此下面列出一些 J_2 、 J_3 的不同表达式,因

$$J_1^2 = (s_{11} + s_{22} + s_{33})^2 \\ = s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2(s_{11}s_{22} + s_{22}s_{33} + s_{33}s_{11}) = 0$$