第 1 章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念及运算

1　高考精选

1. (2014 江苏模拟) 集合$\{-1,0,1\}$共有________个子集.

2. (2013 山东) 设集合$A=\{0,1,2\}$,则集合$B=\{x-y \mid x\in A, y\in A\}$中元素的个数为 (　　)
A. 1　　B. 3
C. 5　　D. 9

3. (2013 全国大纲版) 设集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5\}$,则集合$M=\{x \mid x=a+b, a\in A, b\in B\}$中元素的个数为 (　　)
A. 3　　B. 4
C. 5　　D. 6

4. (2014 重庆模拟) 设全集$U=\{1,2,3,4\}$,集合$A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,则$\complement_U(A\cup B)=$ (　　)
A. $\{1,3,4\}$　　B. $\{3,4\}$
C. $\{3\}$　　D. $\{4\}$

5. (2013 陕西) 设全集为$\mathbf{R}$,函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$的定义域为M,则$\complement_{\mathbf{R}}M$为 (　　)
A. $[-1,1]$　　B. $(-1,1)$
C. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

6. (2013 广东) 设集合$M=\{x \mid x^2+2x=0, x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{x \mid x^2-2x=0, x\in\mathbf{R}\}$,则$M\cup N=$ (　　)
A. $\{0\}$　　B. $\{0,2\}$
C. $\{-2,0\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

7. (2013 新课标全国 Ⅰ) 已知集合$A=\{x \mid x^2-2x>0\}$,$B=\{x \mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$,则 (　　)
A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$
C. $B\subseteq A$　　D. $A\subseteq B$

8. (2013 浙江) 设集合$S=\{x \mid x>-2\}$,$T=\{x \mid x^2+3x-4\leqslant 0\}$,则$(\complement_{\mathbf{R}}S)\cup T=$ (　　)
A. $(-2,1]$　　B. $(-\infty,-4]$
C. $(-\infty,1]$　　D. $[1,+\infty)$

9. (2013 上海) 设常数$a\in\mathbf{R}$,集合$A=\{x \mid (x-1)(x-a)\geqslant 0\}$,$B=\{x \mid x\geqslant a-1\}$,若$A\cup B=\mathbf{R}$,则$a$的取值范围为 (　　)
A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,2]$
C. $(2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

10. (2013 广东) 设整数$n\geqslant 4$,集合$X=\{1,2,3,\cdots,n\}$.令集合$S=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in X$,且三个条件$x<y<z$,$y<z<x$,$z<x<y$恰有一个成立$\}$,若$(x,y,z)$和$(z,w,x)$都在$S$中,则下列选项正确的是 (　　)
A. $(y,z,w)\in S,(x,y,w)\notin S$
B. $(y,z,w)\in S,(x,y,w)\in S$
C. $(y,z,w)\notin S,(x,y,w)\in S$
D. $(y,z,w)\notin S,(x,y,w)\in S$

2　2015 高考考情分析

考点	考纲要求	考查角度
集合的含义与表示	了解集合的含义、元素与集合的关系;能用自然语言、图形语言、符号语言描述集合	用描述法表示集合的含义;会规范表述集合与元素的关系
集合间的基本关系	理解集合之间的包含与相等的含义;能识别给定集合的子集	根据集合间的关系求参数的值或范围;求子集的个数;定义型信息问题
集合的运算	理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个集合的并集与交集;理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集	集合的基本运算(求交集、并集、补集);已知集合间的关系确定参数范围;用韦恩(Venn)图表示集合间的关系

3　基础知识整合

一、集合的含义与表示

1. 元素与集合的关系.

	属于	不属于
符号	$\in$	$\notin$
示例	$a\in A$	$a\notin B$

注:元素与集合的关系有且仅有两种,且二者必居其一.

2. 集合中元素的特征.

特征	理　解	应　用
确定性	对于一个确定的集合,一个元素要么是该集合中的元素,要么不是,二者必居其一	判断涉及的总体能否构成集合
互异性	对于一个确定的集合,它的任何两个元素都是不同的	判断集合的表示是否正确;求集合中的未知元素
无序性	集合中的元素与排列的顺序无关,如集合$\{a,b,c\}$与集合$\{c,b,a\}$是相同的集合	判断两个集合的关系

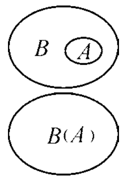
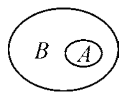
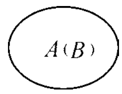
3. 集合的分类：有限集、无限集. 特别地，我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

4. 常用的数集符号.

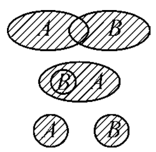
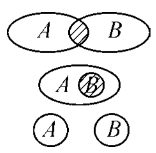
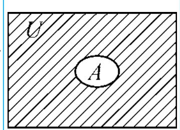
名称	非负整数集（自然数集）	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

5. 集合的表示方法：列举法、描述法、韦恩图法.

二、集合间的基本关系

名称	自然语言描述	符号语言表示	Venn 图表示
子集	如果集合 A 中的所有元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集	$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)	
真子集	如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $a\in B$，且 $a\notin A$，则称集合 A 是集合 B 的真子集	$A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)	
集合相等	如果集合 A 与集合 B 中元素相同，那么集合 A 与集合 B 相等	$A=B$	

三、集合的运算

名称	自然语言描述	符号语言表示	Venn 图表示
并集	对于两个给定的集合 A，B，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$	
交集	对于两个给定的集合 A，B，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	
补集	对于一个集合 A，由全集 U 中所有属于集合 U 但不属于集合 A 的元素组成的集合称为集合 A 在全集 U 中的补集，记作 $\complement_U A$	$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $\notin A\}$	

四、集合中常用的结论

1. 交集：$A\cap B\subseteq A$；$A\cap B\subseteq B$；$A\cap B\subseteq U$；$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

2. 并集：$A\cup B\supseteq A$；$A\cup B\supseteq B$；$A\cup U=U$；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$.

3. 补集：$\complement_U(\complement_U A)=A$；$\complement_U U=\varnothing$；$\complement_U\varnothing=U$；$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；$A\cup(\complement_U A)=U$.

4. $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

4　核心考点解读

考点一　集合的概念

本考点的内容包括集合、元素的概念，元素与集合的关系，集合中元素的特征等. 此类题目的命题点一般着眼于集合中元素的确定性与互异性，解决问题的关键是对数学分类讨论思想的灵活应用，分类时应注意不重复、不遗漏，保证分类的标准一致.

例 1（2014 黄冈调考）若集合 $A=\{(x,y)\mid x-y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x-3y+4=0\}$，则 $A\cap B=$ ______.

【解析】　由 $\begin{cases}x-y=0\\2x-3y+4=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$，

$\therefore A\cap B=\{(4,4)\}$.

【名师点睛】　要解决集合概念问题，必须先弄清集合中元素的性质，明确是数集还是点集，是函数的定义域还是函数的值域等.

【跟踪训练】

1.（2014 北京模拟）设集合 $A=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}^+\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}^+\}$，则 $A\cap B=$ ______.

例 2（2014 福建泉州模拟）已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求实数 a 的值.

【解析】　因为 $1\in A$，

所以 $a+2=1$ 或 $(a+1)^2=1$ 或 $a^2+3a+3=1$.

(1) 若 $a+2=1$，则 $a=-1$，

当 $a=-1$ 时，$a+2=a^2+3a+3=1$，

所以 $a=-1$ 不符合题意.

(2) 若 $(a+1)^2=1$，则 $a=0$ 或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时，$a+2=2$，$(a+1)^2=1$，$a^2+3a+3=3$，所以 $a=0$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，$(a+1)^2=a^2+3a+3=1$，所以 $a=-2$ 不符合题意.

(3) 若 $a^2+3a+3=1$，则 $a=-1$ 或 $a=-2$，

由(1)(2)可知，$a=-1$，$a=-2$ 都不符合题意.

综上所述，实数 a 的值为 0.

【名师点睛】　由 $1\in A$ 可知集合 A 中的三个元素都有可能等于 1，得到 a 的值后，要对集合中元素的互异性进行检验，否则可能导致错解.

【跟踪训练】

2.（2014 长沙模拟）若集合 $\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$ 与集合 $\{x\mid x^2-1=0\}$ 的元素个数相同，则实数 a 的取值集合是______.

考点二　集合间的基本关系

(1) 判断两个集合的关系常用两种方法：一是化简集合，从表达式中寻找两个集合间的关系；二是用列举法表示各集合，从元素中寻找关系.

(2) 已知两个集合间的关系求参数时，关键是将两个集合间的关系转化为元素间的关系，进而转化为参数满足的关系，解决这类问题常常运用数轴、Venn 图帮助分析.

例 3(2012 青岛模拟)已知集合 $A=\{x\mid 0<ax+1\leqslant 5\}$,集合 $B=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$.

(1)若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

(2)若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

(3)集合 A,B 能否相等?若能,求出 a 的值;若不能,试说明理由.

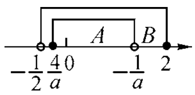
【解析】 A 中不等式的解集应分三种情况讨论:

① 若 $a=0$,则 $A=\mathbf{R}$;

② 若 $a<0$,则 $A=\left\{x\middle|\frac{4}{a}\leqslant x<-\frac{1}{a}\right\}$;

③ 若 $a>0$,则 $A=\left\{x\middle|-\frac{1}{a}<x\leqslant\frac{4}{a}\right\}$.

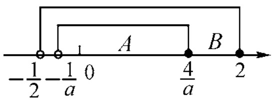
(1)当 $a=0$ 时,$A\subseteq B$,此种情况不存在.



当 $a<0$ 时,因为 $A\subseteq B$,如右图所示,

则 $\begin{cases}\frac{4}{a}>-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{a}\leqslant 2\end{cases}$,得 $\begin{cases}a<-8\\a\leqslant-\frac{1}{2}\end{cases}$,故 $a<-8$.

当 $a>0$ 时,因为 $A\subseteq B$,如右图所示,



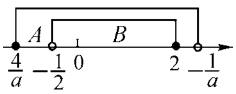
则 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\geqslant-\frac{1}{2}\\\frac{4}{a}\leqslant 2\end{cases}$,

$\therefore\begin{cases}a\geqslant 2\\a\geqslant 2\end{cases}$,所以 $a\geqslant 2$.

综上所述,当 $A\subseteq B$ 时,$a<-8$ 或 $a\geqslant 2$.

(2)当 $a=0$ 时,显然 $B\subseteq A$.

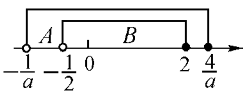
当 $a<0$ 时,因为 $B\subseteq A$,如右图所示,



则 $\begin{cases}\frac{4}{a}\leqslant-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{a}>2\end{cases}$,得 $\begin{cases}a\geqslant-8\\a>-\frac{1}{2}\end{cases}$,

所以 $-\frac{1}{2}<a<0$.

当 $a>0$ 时,因为 $B\subseteq A$,如右图所示,



则 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\leqslant-\frac{1}{2}\\\frac{4}{a}\geqslant 2\end{cases}$,

得 $\begin{cases}a\leqslant 2\\a\leqslant 2\end{cases}$,所以 $0<a\leqslant 2$.

综上所述,当 $B\subseteq A$ 时,$-\frac{1}{2}<a\leqslant 2$.

(3)当且仅当 A,B 两个集合互相包含时,$A=B$,由(1)、(2)知 $a=2$.

【名师点睛】 在解含有参数的不等式时,注意要对参数进行讨论,在分析用不等式表示的集合间的子集或交集、并集、补集的关系时,要借助好数轴这个工具,以体现数形结合思想.

【跟踪训练】

3.(2014 山东烟台二模)已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$,$B=\{x\mid |x|\geqslant a\}$,全集 $U=\mathbf{R}$. 当 a 为何值时,$A\subsetneqq B$ 成立?

考点三　集合间的基本运算

集合的基本运算包括集合间的交、并、补集运算,解决此类运算问题一般应注意以下几点:一是看元素组成.集合是由元素组成的,从研究集合中元素的构成入手是解决运算问题的前提.二是对集合化简.有些集合是可以化简的,如果先化简再研究其关系并进行运算,可使问题变得简单明了,易于解决.三是注意数形结合思想的应用.集合运算常用的数形结合形式有数轴、坐标系和 Venn 图.

例 4(1)(2011 安徽)集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$S=\{1,4,5\}$,$T=\{2,3,4\}$,则 $S\cap(\complement_U T)$ 等于　(　　)

A. $\{1,4,5,6\}$　　B. $\{1,5\}$

C. $\{4\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

(2)(2009 山东)集合 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,则 a 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【解析】 (1)可根据集合运算的概念直接求解,由补集的概念知 $\complement_U T=\{1,5,6\}$,从而 $S\cap(\complement_U T)=\{1,4,5\}\cap\{1,5,6\}=\{1,5\}$.

(2)可根据并集的概念分别确定 a,a^2 的可能取值,$\{a,a^2\}=\{4,16\}$,故 $a=4$.

【名师点睛】在解决集合的混合运算时,一般先运算括号内的部分,当集合是用列举法表示的数集时,可以通过列举集合的元素进行运算;当集合是用不等式形式表示的时,可运用数轴求解.

【跟踪训练】

4.(2014 山东曲阜质检)若集合 $A=\{y\mid y=\lg x,\frac{1}{10}\leqslant x\leqslant 10\}$,$B=\{-2,-1,1,2\}$,全集 $U=\mathbf{R}$,则下列结论正确的是　(　　)

A. $A\cap B=\{-1,1\}$　　B. $(\complement_U A)\cup B=[-1,1]$

C. $A\cup B=(-2,2)$　　D. $(\complement_U A)\cap B=[-2,2]$

5.(2011 陕西)设集合 $M=\{y\mid y=\cos^2 x-\sin^2 x,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\left\{x\middle|\,|x-\frac{1}{\mathrm{i}}|<\sqrt{2},\mathrm{i}\text{ 为虚数单位},x\in\mathbf{R}\right\}$,则 $M\cap N=$　(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,1]$　　C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

考点四　“新定义”问题的解决方法

集合命题中与运算法则相关的问题已成为高考的热点,这类试题的特点是:通过给出新的数学概念或新的运算方法,在新的情境下完成某种推理证明是集合命题的一个新方向.常见的有定义新概念、新公式、新运算和新法则等类型.

例 5(2014 武汉调考)已知集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$,A 是 S 的一个子集,当 $x\in A$ 时,若有 $x-1\notin A$ 且 $x+1\notin A$,则称 x 为 A 的一个“孤立元素”,那么 S 中无“孤立元素”的 4 个元素的子集共有______个,其中的一个是______.

【解析】 由成对的相邻元素组成的四元子集都没有“孤立元素”,如 $\{0,1,2,3\}$,$\{0,1,3,4\}$,$\{0,1,4,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{2,3,4,5\}$ 这样的集合,故共有 6 个.

【名师点睛】 解此类问题的关键是理解并掌握题目给出的新定义(或新运算).思路是找到与此新知识有关的所学知识,帮助理解,同时找出新知识与所学相关知识的不同之处,通过对比加深对新知识的理解.

【跟踪训练】

6. (2014黄冈调考)定义集合运算:$A*B=\{z\mid z=xy,x\in A,y\in B\}$,设$A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合$A*B$的所有元素之和为 ( )

A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

5 考点失分警示

1. 空集在解题时有特殊地位,它是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集,所以要时刻关注对空集的讨论,防止漏掉.

2. Venn图示法和数轴图示法是进行集合交、并、补运算的常用方法,其中运用数轴图示法要特别注意端点是实心还是空心.

典型例题 若集合$A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$,$B=\{x\mid ax-2=0\}$,且$A\cap B=B$,求由实数a组成的集合C.

【错解】 由$A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$,得$A=\{-1,3\}$.因为$A\cap B=B$,所以$B\subseteq A$,从而$B=\{-1\}$或$B=\{3\}$.

当$B=\{-1\}$时,由$a\times(-1)-2=0$,得$a=-2$;

当$B=\{3\}$时,由$a\times 3-2=0$,得$a=\dfrac{2}{3}$.

故由实数a组成的集合$C=\left\{-2,\dfrac{2}{3}\right\}$.

【正解】 ① 当$B\neq\varnothing$时,同上解法,得$a=-2$或$a=\dfrac{2}{3}$;

② 当$B=\varnothing$时,由$ax-2=0$无实数根,得$a=0$.

综上可知,实数a组成的集合$C=\left\{-2,0,\dfrac{2}{3}\right\}$.

【错因分析】 由交集定义容易得知,对于任何一个集合A,都有$A\cap\varnothing=\varnothing$,所以错解忽略了$B=\varnothing$时的情况.

【易错警示】 $\varnothing$有两个独特的性质,即:(1)对于任意集合A,皆有$A\cap\varnothing=\varnothing$;(2)对于任意集合$A$,皆有$A\cup\varnothing=A$.正因如此,如果$A\cap B=\varnothing$,就要考虑集合$A$或$B$可能是$\varnothing$;如果$A\cup B=A$,就要考虑集合$B$可能是$\varnothing$.

【补救训练】

已知$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x<-2$或$x>3\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant 2a-1\}$,若$A\cup B=A$,求实数$a$的取值范围.

6 热点题型探究

1. (2012新课标全国,1)已知集合$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x-y\in A\}$,则$B$中所含元素的个数为 ( )

A. 3 B. 6

C. 8 D. 10

2. (2012辽宁,1)已知集合$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,集合$A=\{0,1,3,5,8\}$,集合$B=\{2,4,5,6,8\}$,则$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$ ( )

A. $\{5,8\}$ B. $\{7,9\}$ C. $\{0,1,3\}$ D. $\{2,4,6\}$

3. (2012浙江,1,)设集合$A=\{x\mid 1<x<4\}$,集合$B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$,则$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ ( )

A. $(1,4)$ B. $(3,4)$

C. $(1,3)$ D. $(1,2)\cup(3,4)$

4. (2012陕西,1)集合$M=\{x\mid \lg x>0\}$,$N=\{x\mid x^2\leqslant 4\}$,则$M\cap N=$ ( )

A. $(1,2)$ B. $[1,2)$

C. $(1,2]$ D. $[1,2]$

5. (2011湖北,2)已知$U=\{y\mid y=\log_2 x,x>1\}$,$P=\left\{y\mid y=\dfrac{1}{x},x>2\right\}$,则$\complement_U P=$ ( )

A. $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ B. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

C. $(0,+\infty)$ D. $(-\infty,0]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

6. (2011辽宁,2)已知M,N为集合I的非空真子集,且M,N不相等,若$N\cap\complement_I M=\varnothing$,则$M\cup N=$ ( )

A. M B. N

C. I D. $\varnothing$

7. (2010福建,9)对于复数a,b,c,d,若集合$S=\{a,b,c,d\}$具有性质"对任意$x,y\in S$,必有$xy\in S$",则当$\begin{cases}a=1\\ b^2=1\\ c^2=b\end{cases}$时,$b+c+d$等于 ( )

A. 1 B. -1

C. 0 D. i

8. (2012全国大纲版,2)已知集合$A=\{1,3,\sqrt{m}\}$,$B=\{1,m\}$,$A\cup B=A$,则$m=$ ( )

A. 0或$\sqrt{3}$ B. 0或3

C. 1或$\sqrt{3}$ D. 1或3

9. (2011北京,1)已知集合$P=\{x\mid x^2\leqslant 1\}$,$M=\{a\}$.若$P\cup M=P$,则$a$的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1]$ B. $[1,+\infty)$

C. $[-1,1]$ D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

10. (2010天津,9)设集合$A=\{x\mid |x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid |x-b|>2,x\in\mathbf{R}\}$.若$A\subseteq B$,则实数$a,b$必满足 ( )

A. $|a+b|\leqslant 3$ B. $|a+b|\geqslant 3$

C. $|a-b|\leqslant 3$ D. $|a-b|\geqslant 3$

11. (2012天津,11)已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x+2|<3\}$,集合$B=\{x\in\mathbf{R}\mid (x-m)(x-2)<0\}$,且$A\cap B=(-1,n)$,则$m=$______,$n=$______.

12. (2011天津,13)已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x+3|+|x-4|\leqslant 9\}$,$B=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\, x=4t+\dfrac{1}{t}-6,t\in(0,+\infty)\right\}$,则集合$A\cap B=$______.

7 2015热点预测

预测2015年高考对集合的考查一般以两种形式出现,一是考查集合的概念、集合间的关系及集合的运算,对于用列举法表示的集合,可借助于韦恩图的直观性,而对于用描述法表示的与实数运算有关的集合,可充分借助于数轴的直观性;二是与其他知识相联系,以集合语言和集合思想为载体,考查函数的定义域、值域、函数、方程与不等式的关系,直线与曲线的位置关系等问题,以选择题与填空题为主,难度为中低档.

1. (2013湖北八市联考)设$P=\{y\mid y=-x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=$

$\{y \mid y=2^x, x\in\mathbf{R}\}$,则 ( )

A. $P\subseteq Q$ B. $Q\subseteq P$

C. $\complement_{\mathbf{R}}P\subseteq Q$ D. $Q\subseteq\complement_{\mathbf{R}}P$

【解析】 $P=\{y \mid y=-x^2+1, x\in\mathbf{R}\}=\{y \mid y\leqslant 1\}$, $Q=\{y \mid y=2^x, x\in\mathbf{R}\}=\{y \mid y>0\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}P=\{y \mid y>1\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}P\subseteq Q$.

【答案】 C

2. (2014 武汉调考)设集合 $A=\{-1,1\}$, $B=\{x \mid mx=1\}$,且 $A\cup B=A$,则 m 的值为 ( )

A. 1 或 -1 或 0 B. -1

C. 1 或 -1 D. 0

【解析】 因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,即 $m=0$ 或 $\dfrac{1}{m}=-1$ 或 $\dfrac{1}{m}=1$,得到 m 的值为 1 或 -1 或 0.

【答案】 A

3. (2014 天津市新华中学模拟)设集合 $A=\{x \mid |x-a|<1, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid 1<x<5, x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\{a \mid 0\leqslant a\leqslant 6\}$ B. $\{a \mid a\leqslant 2$,或 $a\geqslant 4\}$

C. $\{a \mid a\leqslant 0$,或 $a\geqslant 6\}$ D. $\{a \mid 2\leqslant a\leqslant 4\}$

【解析】 $A=\{x \mid |x-a|<1, x\in\mathbf{R}\}=\{x \mid a-1<x<1+a\}$,因为 $A\cap B=\varnothing$,所以有 $a-1\geqslant 5$ 或 $1+a\leqslant 1$,即 $a\geqslant 6$ 或 $a\leqslant 0$.

【答案】 C

4. (2014 湖北省黄冈中学模拟)已知集合 $M=\{x \mid x(x-a-1)<0, a\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$,若 $M\cup N=N$,求实数 a 的取值范围.

【解析】 由已知得 $N=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,因为 $M\cup N=N$,所以 $M\subseteq N$.

又 $M=\{x \mid x(x-a-1)<0, a\in\mathbf{R}\}$

①$a+1<0$ 即 $a<-1$ 时,集合 $M=\{x \mid a+1<x<0\}$.

要使 $M\subseteq N$ 成立,只需 $-1\leqslant a+1<0$,解得 $-2\leqslant a<-1$.

② 当 $a+1=0$ 即 $a=-1$ 时, $M=\varnothing$,显然有 $M\subseteq N$,所以 $a=-1$ 符合题意.

③ 当 $a+1>0$ 即 $a>-1$ 时,集合 $M=\{x \mid 0<x<a+1\}$.

要使 $M\subseteq N$ 成立,只需 $0<a+1\leqslant 3$,解得 $-1<a\leqslant 2$.

综上所述,a 的取值范围是 $[-2,2]$.

1.2 命题及其关系、充分条件与必要条件

1 高考精选

1. (2014 福建模拟)已知集合 $A=\{1,a\}$, $B=\{1,2,3\}$,则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的 ( )

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. (2013 山东)给定两个命题 p、q,若 $\neg p$ 是 q 的必要而不充分条件,则 p 是 $\neg q$ 的 ( )

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. (2013 上海模拟)钱大姐常说“便宜没好货”,她这句话的意思是:“不便宜”是“好货”的 ( )

A. 充分条件 B. 必要条件

C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

4. (2013 北京)“$\varphi=\pi$”是“曲线 $y=\sin(2x+\varphi)$ 过坐标原点的” ( )

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

2 2015 高考考情分析

(续表)

考点	考纲要求	考查角度
命题及其真假判定	理解命题的概念;会判断命题的真假	命题真假的判定
四种命题	了解“若 p,则 q”形式的命题及其逆命题、否命题与逆否命题;会分析四种命题的相互关系	四种命题的转化及真假之间的关系
充分条件与必要条件	理解并掌握好充分条件、必要条件的意义;能够判断给定的两个命题的充要关系	充分条件与必要条件的判断

3 基础知识整合

一、命题的概念

1. 命题:在数学中用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题.

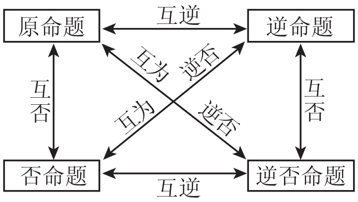
2. 真命题与假命题:判断为真的语句叫做真命题;判断为假的语句叫做假命题.

二、四种命题及其关系

1. 四种命题

原命题	若 p,则 q
逆命题	若 q,则 p
否命题	若 $\neg p$,则 $\neg q$
逆否命题	若 $\neg q$,则 $\neg p$

2. 四种命题间的关系



3. 四种命题的真假关系

(1) 两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性.

(2) 两个命题互为逆命题或互为否命题，它们的真假性没有关系.

三、充分条件与必要条件

1. 概念

$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$
p 是 q 的充分条件	p 是 q 的必要条件
q 是 p 的必要条件	q 是 p 的充分条件
q 的充分条件是 p	q 的必要条件是 p
p 的必要条件是 q	p 的充分条件是 q
若"$p \Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$"	则 p 是 q 的充要条件

2. 集合角度

若 p 以集合 A 的形式出现，q 以集合 B 的形式出现，即 $A=\{x \mid p(x)\}$，$B=\{x \mid q(x)\}$，则关于 p，q 的充分条件、必要条件又可叙述为：

$A \subseteq B$	p 是 q 的充分条件
$A \supseteq B$	p 是 q 的必要条件
$A = B$	p 是 q 的充要条件

4　核心考点解读

考点一　四种例题及其真假性之间关系的判定

四种命题反映出命题之间的内在联系，要深刻理解其关系的产生过程. 给出一个命题，判断它是真命题，需要经过严格的推理，而要说明它是假命题，只需举一个反例即可.

例 1(2014 黄冈调考)有下列四个命题：①"若 $x+y=0$，则 x，y 互为相反数"的否命题；②"若 $a>b$，则 $a^2>b^2$"的逆否命题；③"若 $x\leqslant -3$，则 $x^2-x-6>0$"的否命题；④"对顶角相等"的逆命题. 其中真命题的个数为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

【解析】 ①"若 $x+y\neq 0$，则 x，y 不互为相反数"是真命题. ②"若 $a^2\leqslant b^2$，则 $a\leqslant b$"，取 $a=0$，$b=-1$，则 $a^2\leqslant b^2$，但 $a>b$，故是假命题. ③"若 $x>-3$，则 $x^2-x-6\leqslant 0$"，由不等式 $x^2-x-6\leqslant 0$ 可得 $-2\leqslant x\leqslant 3$，而 $x=4>-3$，不是不等式的解，故是假命题. ④"相等的角是对顶角"，是假命题. 故选 B.

【名师点睛】 本题采用了举反例的方法，如②③的解法，举出一个反例说明一个命题不正确是经常用到的方法.

【跟踪训练】

1. (2009 广东)给定下列四个命题：

① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；

② 若一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；

③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行；

④ 若两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中，为真命题的是　(　　)

A. ①和②　　B. ②和③

C. ③和④　　D. ②和④

考点二　充分条件与必要条件的判断

判断充分条件与必要条件的方法有以下三种.

(1) 定义法：寻找条件 p，q 间的推式，即先对命题"若 p，则 q"与"若 q，则 p"进行真假判断，再下结论. 注意 p 是 q 的什么条件只有四种：充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分又不必要条件.

(2) 集合法：当所要判断的命题与方程的根、不等式的解集有关，或所描述的对象可以用集合表示时，可以借助集合间的包含关系进行充分条件与必要条件的判断.

(3) 等价法：在判断 $\neg q$ 与 $\neg p$ 之间的关系时，可根据原命题与其逆否命题的等价性将其转化为判断 p 与 q 的关系.

例 2(2010 广东)"$m<\frac{1}{4}$"是"一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 充分必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】 因为 $x^2+x+m=0$ 有实数解，

所以 $\Delta=1-4m\geqslant 0$，即 $m\leqslant\frac{1}{4}$，

所以当 $x^2+x+m=0$ 有实数解时，$m\leqslant\frac{1}{4}$，

所以"$m<\frac{1}{4}$"是"$x^2+x+m=0$ 有实数解"的充分不必要条件.

【名师点睛】 判断充分条件、必要条件、充要条件时，常用的方法是通过"⇒"来判断，一方面是要注意箭头的指向(单向或双方)；另一方面是看"p 是 q 的 ……"或"q 是 p 的 ……". p 是 q 的充分条件表示为 $p\Rightarrow q$. p 是 q 的必要条件表示为 $q\Rightarrow p$，解题时最容易出错的就是颠倒了充分性与必要性，所以在解决这类问题时一定要根据充要条件的概念进行准确的判断.

【跟踪训练】

2. (2011 天津)设集合 $A=\{x\in\mathbf{R} \mid x-2>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R} \mid x<0\}$，$C=\{x\in\mathbf{R} \mid x(x-2)>0\}$，则"$x\in A\cup B$"是"$x\in C$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

考点三　充分条件和必要条件的应用

对于条件或结论中含有参数的命题，可先将其转化为最简形式，利用充分条件、必要条件或充要条件揭示命题和结论之间的从属关系，借助于 Venn 图或数轴的直观性列方程或不等式，即可求出参数的值或取值范围.

例 3(2011 长沙质检)已知命题 p: $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x-10\leqslant 0,\end{cases}$ 命题 q:$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$,$m>0$.若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,求实数 m 的取值范围.

【解析】 p 化简为 $x\in[-2,10]$,q 化简为 $x\in[1-m,1+m]$,$\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件等价于 $p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$,所以 $[-2,10]\subsetneqq[1-m,1+m]$,得 $\begin{cases}m>0,\\1-m\leqslant -2,\\1+m\geqslant 10.\end{cases}$ 故 $m\geqslant 9$,即 m 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

【名师点睛】 (1)考查充分条件与必要条件的问题一般有两种方式:一是直接给定 p 与 q,问 p 是 q 的什么条件,这是最常见的考查方式,要特别注意这种问法中哪个是条件,哪个是结论;二是给 q 加上一个使其成立的充分或必要条件,来求参数的值或范围.

(2) p 是 q 的充分不必要条件等价于 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,可结合互为逆否命题之间的关系得出结论.

【跟踪训练】

3.(2013 山东济南二模)已知"$|x-a|<1$"是"$x^2-6x<0$"的充分不必要条件,求实数 a 的取值范围.

考点四　充要条件的证明

(1)证明充要性首先要分清谁是条件,谁是结论.在这里要注意两种说法:"p 是 q 的充要条件"与"p 的充要条件是 q".前者 p 是条件,后者 q 是条件.

(2)证明分为两个环节,一是充分性,即由条件推结论;二是必要性,即由结论推条件.在证明时,不要认为它是推理过程的"双向书写",而应该进行由条件到结论,由结论到条件的两次证明.

例 4(2014 河北模拟)设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边,求证方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $a^2=b^2+c^2$.

【解析】 设 m 是两个方程的公共根,显然 $m\neq 0$.由题设知 $m^2+2am+b^2=0$①, $m^2+2cm-b^2=0$②, 由①+②得 $2m(a+c+m)=0$,$\therefore m=-(a+c)$③. 将③代入①得 $(a+c)^2-2a(a+c)+b^2=0$,化简得 $a^2=b^2+c^2$,$\therefore$ 所给的两个方程有公共根的必要条件是 $a^2=b^2+c^2$.下面证明其充分性.$\because a^2=b^2+c^2$,$\therefore$ 方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 即为 $x^2+2ax+a^2-c^2=0$,它的两个根分别为 $x_1=-(a+c)$,$x_2=c-a$;同理,方程 $x^2+2cx-b^2=0$ 的两根分别为 $x_3=-(a+c)$,$x_4=a-c$.$\because x_1=x_3$,$\therefore$ 方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根.综上所述,方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $a^2=b^2+c^2$.

【名师点睛】 (1)条件已知,证明结论成立是充分性;结论已知,推出条件成立是必要性.

(2)证明时易出现必要性与充分性混淆的情形,这就需要分清哪个是条件,哪个是结论.

【跟踪训练】

4.(2014 咸宁鄂南高中质检)求证关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是 $a\leqslant 1$.

5　考点失分警示

1.否命题是既否定命题的条件,又否定命题的结论,而命题的否定是只否定命题的结论,要注意区别.

2.当判断 p 与 q 之间的关系时,要注意 p 与 q 之间的关系的方向性,充分条件与必要条件的方向正好向反,不要混淆.

【典型例题】

命题:"若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$"的否命题是　(　　)

A.若 $x^2\geqslant 1$,则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

B.若 $-1<x<1$,则 $x^2<1$

C.若 $x>1$ 或 $x<-1$,则 $x^2>1$

D.若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$,则 $x^2\geqslant 1$

【错解】 C

【正解】 A. 命题"若 p,则 q"的否命题是"若 $\neg p$ 则 $\neg q$",所以命题:"若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$"的否命题是:"若 $x^2\geqslant 1$,则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$".

【错因分析】 对于命题的条件和结论没有分析清楚,"若 p 则 q"的否定形式是"若 p 则 $\neg q$",而否命题是"若 $\neg p$ 则 $\neg q$".

【易错警示】

(1)对一个命题的否定,是对正面叙述的词语进行否定,它否定的是命题的结论;否命题是相对于原命题而言的,它既否定原命题的条件又否定原命题的结论;

(2)常用的正面用语和它的否定用语

正面用语	等于	大于	小于	都是	所有的	至多有一个	至少有一个	x 或 y	x 且 y
反面用语	不等于	不大于	不小于	不都是	某个	至少有两个	一个也没有	$\neg x$ 且 $\neg y$	$\neg x$ 或 $\neg y$

【补救训练】

已知原命题为"若 r,则 p 或 q",则这一命题的否命题是　(　　)

A.若 $\neg r$,则 p 且 q　　B.若 $\neg r$,则 $\neg p$ 或 $\neg q$

C.若 $\neg r$,则 $\neg p$ 且 $\neg q$　　D.若 $\neg r$,则 $\neg p$ 且 q

6　热点题型探究

1.(2012 湖南,2)命题"若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha=1$"的逆否命题是　(　　)

A.若 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha\neq 1$　　B.若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha\neq 1$

C.若 $\tan\alpha\neq 1$,则 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$　　D.若 $\tan\alpha\neq 1$,则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

2.(2012 福建,3)下列命题中,真命题是　(　　)

A.$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$e^{x_0}\leqslant 0$

B.$\forall x\in\mathbf{R}$,$2^x>x^2$

C.$a+b=0$ 的充要条件是 $\frac{a}{b}=-1$

D.$a>1$,$b>1$ 是 $ab>1$ 的充分条件

3.(2010 天津,3)命题"若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x)$ 是奇函数"的否命题是　(　　)

A.若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(-x)$ 是偶函数

B.若 $f(x)$ 不是奇函数,则 $f(-x)$ 不是奇函数

C.若 $f(-x)$ 是奇函数,则 $f(x)$ 是奇函数

D.若 $f(-x)$ 不是奇函数,则 $f(x)$ 不是奇函数

4.(2012 天津,2)设 $\varphi\in\mathbf{R}$,则"$\varphi=0$"是"$f(x)=\cos(x+\varphi)$,

$x\in\mathbf{R}$ 为偶函数”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. (2012安徽,6) 设平面 α 与平面 β 相交于直线 m，直线 a 在平面 α 内，直线 b 在平面 β 内，且 $b\perp m$，则“$\alpha\perp\beta$”是“$a\perp b$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. (2012陕西,3) 设 $a,b\in\mathbf{R}$，i是虚数单位，则“$ab=0$”是“复数 $a+\frac{b}{\mathrm{i}}$ 为纯虚数”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. (2012四川,7) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量. 下列四个条件中，使 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立的充分条件是 ( )

A. $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ B. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$ D. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

8. (2012重庆,7) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且以2为周期，则“$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的增函数”是“$f(x)$ 为 $[3,4]$ 上的减函数”的 ( )

A. 既不充分也不必要条件 B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件 D. 充要条件

9. (2011山东,5) 对于函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，“$y=|f(x)|$ 的图像关于 y 轴对称”是“$y=f(x)$ 是奇函数”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. (2011天津,2) 设 $x,y\in\mathbf{R}$，则“$x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$”是“$x^2+y^2\geqslant 4$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

11. (2011湖南,2) 设集合 $M=\{1,2\}$. $N=\{a^2\}$，则“$a=1$”是“$N\subseteq M$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

12. (2010陕西,9) 对于数列 $\{a_n\}$，“$a_{n+1}>|a_n|\ (n=1,2,\cdots)$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的 ( )

A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7 2015热点预测

预测2015年高考对本节的考查仍将以命题真假判断、四种命题的关系及充分条件与必要条件为主，以选择题和填空题为主要题型，难度适中.

1. (2013山东泗水一中模拟) 有下列四个命题：(1)“若 $xy=1$，则 x,y 互为倒数”的逆命题；(2)“面积相等的三角形全等”的否命题；(3)“若 $m\leqslant 1$，则方程 $x^2-2x+m=0$ 有实数解”的逆否命题；(4)“若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$”的逆否命题. 其中真命题的个数为 ( )

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

【解析】 (1)、(2)、(4) 显然成立；(3) 对于方程 $x^2-2x+m=0$，因为 $m\leqslant 1$ 所以 $\Delta=4-4m\geqslant 0$，即该方程有实数解，原命题成立则其逆否命成立，所以(3)成立.

【答案】 D

2. (2013潍坊市高三联考) 已知条件 $p:x\leqslant 1$，条件 $q:\frac{1}{x}<1$，则 p 是 $\neg q$ 成立的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解析】 由 $\frac{1}{x}<1$ 得，$x<0$ 或 $x>1$，所以 $\neg q$:$0\leqslant x\leqslant 1$，所以 p 是 $\neg q$ 成立的必要不充分条件.

【答案】 B

3. (2014云南师大附中模拟) 已知条件 $p:x^2-3x-4\leqslant 0$；条件 $q:x^2-6x+9-m^2\leqslant 0$，若 p 是 q 的充分不必要条件，则 m 的取值范围是 ( )

A. $[-1,1]$ B. $[-4,4]$

C. $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$ D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

【解析】 由题意可得，p:$-1\leqslant x\leqslant 4$，q:$3-m\leqslant x\leqslant 3+m(m>0)$ 或 $3+m\leqslant x\leqslant 3-m(m<0)$，

依题意得，$\begin{cases}m>0\\3-m\leqslant -1\\3+m\geqslant 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<0\\3+m\leqslant -1\\3-m\geqslant 4\end{cases}$，

解得 $m\leqslant -4$ 或 $m\geqslant 4$.

【答案】 C

1.3 逻辑联结词

1 高考精选

1. (2014湖北模拟) 在一次跳伞训练中，甲、乙两位学员各跳一次，设命题 p 是“甲降落在指定范围”，q 是“乙降落在指定范围”，则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为 ( )

A. $(\vee\ \neg p)\vee(\neg q)$ B. $p\vee(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$ D. $p\vee q$

2. (2013重庆) 命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2\geqslant 0$”的否定为 ( )

A. 对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2<0$

B. 不存在 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2<0$

C. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2\geqslant 0$

D. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2<0$

3. (2013福建模拟) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$x_0(x_0\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点，以下结论一定正确的是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(x_0)$

B. $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

C. $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点

D. $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

4. (2013 湖南) 设函数 $f(x)=a^x+b^x-c^x$,其中 $c>a>0$,$c>b>0$.若 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长,则下列结论正确的是(写出所有正确结论的序号)______.

① $\forall x\in(-\infty,1)$,$f(x)>0$;

② $\exists x\in\mathbf{R}$,使 a^x,b^x,c^x 不能构成一个三角形的三条边长;

③ 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,则 $\exists x\in(1,2)$,使 $f(x)=0$.

2　2015 高考考情分析

考点	考纲要求	考查角度
逻辑联结词	了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义	判断复合命题的真假
全称命题与特称命题	理解全称量词与存在量词的意义;能正确地对含有一个量词的命题进行否定	全称命题与特称命题的真假判断,含有一个量词的命题的否定

3　基础知识整合

逻辑联结词

1. 命题中的“或”、“且”、“非”叫做逻辑联结词.

2. 命题:$p\wedge q$,$p\vee q$,$\neg p$ 的真假判断.

(1) $p\wedge q$ 形式复合命题真值表.

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

(2) $p\vee q$ 形式复合命题真值表.

p	q	$p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

(3) $\neg p$ 形式复合命题真值表.

p	$\neg p$
真	假
假	真

3. 全称命题与特称命题.

命题	全称命题“$\forall x\in A$,$p(x)$”	特称命题“$\exists x\in A$,$p(x)$”
表述方法	① 对所有的 $x\in A$,$p(x)$ 成立 ② 对一切 $x\in A$,$p(x)$ 成立 ③ 对每一个 $x\in A$,$p(x)$ 成立 ④ 任选一个 $x\in A$,$p(x)$ 成立 ⑤ 凡 $x\in A$,都有 $p(x)$ 成立	① 存在 $x\in A$,使 $p(x)$ 成立 ② 至少有一个 $x\in A$,使 $p(x)$ 成立 ③ 对有些 $x\in A$,$p(x)$ 成立 ④ 对某个 $x\in A$,$p(x)$ 成立 ⑤ 有一个 $x\in A$,使 $p(x)$ 成立

4. 含有一个量词的命题的否定(全称命题与特称命题).

命题	命题的否定
$\forall x\in M,p(x)$	$\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$
$\exists x_0\in M,p(x_0)$	$\forall x\in M,\neg p(x)$

注:“对所有 x 成立”的否定是“存在某个 x 不成立”;

“对任意 x 不成立”的否定是“存在某个 x 成立”;

“至少有一个”的否定是“一个也没有”;

“至多有一个”的否定是“至少有两个”;

“至少有 n 个”的否定是“至多有 $n-1$ 个”;

“至多有 n 个”的否定是“至少有 $n+1$ 个”.

5. 复合命题的否定.

(1)“$\neg p$”的否定是“p”.

(2)“p 或 q”的否定是“$\neg p$ 且 $\neg q$”.

(3)“p 且 q”的否定是“$\neg p$ 或 $\neg q$”.

4　核心考点解读

考点一　含有逻辑联结词的命题的真假判断

若要判断一个含有逻辑联结词的命题的真假,需先判断构成这个命题的每个简单命题的真假,再依据“或”——一真即真,“且”——一假即假,“非”——真假相对,做出判断即可.

例 1 (2014 西宁质检) 已知命题 p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $\tan x=1$,命题 q:$x^2-3x+2<0$ 的解集是 $\{x\mid 1<x<2\}$,给出下列结论:

① 命题“$p\wedge q$”是真命题;② 命题“$p\wedge\neg q$”是假命题;

③ 命题“$\neg p\vee q$”是真命题;④ 命题“$\neg p\vee\neg q$”是假命题.

其中正确的是 (　　)

A. ②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ①②③④

【解析】 命题 p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $\tan x=1$ 是真命题,命题 q:$x^2-3x+2<0$ 的解集是 $\{x\mid 1<x<2\}$ 也是真命题,∴① 命题“$p\wedge q$”是真命题;② 命题“$p\wedge\neg q$”是假命题;③ 命题“$\neg p\vee q$”是真命题;④ 命题“$\neg p\vee\neg q$”是假命题.故选 D.

【名师点睛】 解决这类问题应先判断命题 p,q 的真假,再依据真值表进行判断.

【跟踪训练】

1. (2014 银川质检) 命题 p:$a^2+b^2<0(a,b\in\mathbf{R})$;命题 q:$(a-2)^2+|b-3|\geq 0(a,b\in\mathbf{R})$,下列结论正确的是 (　　)

A.“$p\vee q$”为真　　B.“$p\wedge q$”为真

C.“$\neg p$”为假　　D.“$\neg q$”为真

考点二　全称命题与特称命题的真假判断

(1) 全称命题的真假判断

① 要判定全称命题“$\forall x\in M,p(x)$”是真命题,必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立;

② 要判定全称命题“$\forall x\in M,p(x)$”是假命题,只需举出一个反例,即在集合 M 中找到一个元素 x_0,使得 $p(x_0)$ 不成立,那么这个全称命题就是假命题.

(2) 特称命题真假的判断

① 要判定特称命题“$\exists x_0\in M,p(x_0)$”是真命题,只需找到集合 M 中的一个元素 x_0,使 $p(x_0)$ 成立即可.

② 要判定一个特称命题是假命题,需对集合 M 中的任意一个元素 x 验证 $p(x)$ 都不成立.

例2 (2010 天津)下列命题中,真命题是　　(　　)

A. $\exists m\in\mathbf{R}$,使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

B. $\exists m\in\mathbf{R}$,使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数

C. $\forall m\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 都是偶函数

D. $\forall m\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 都是奇函数

【解析】　由于当 $m=0$ 时,函数 $f(x)=x^2+mx=x^2$ 为偶函数,故"$\exists m\in\mathbf{R}$,使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 为偶函数"是真命题,故选 A.

【名师点睛】　本题考查逻辑语言与函数的奇偶性,重要的是要弄清楚偶函数的概念.

【跟踪训练】

2. (2010 湖南)下列命题中的假命题是　　(　　)

A. $\exists x\in\mathbf{R}$,$\lg x=0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R}$,$\tan x=1$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^3>0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$,$2^x>0$

考点三　含有一个量词的命题的否定

一些常用的正面词语及它们的否定词语列表如下:

正面词语	等于($=$)	大于($>$)	小于($<$)	是	都是
否定词语	不等于($\neq$)	不大于($\leqslant$)	不小于($\geqslant$)	不是	不都是

正面词语	至多有一个	至少有一个	任意的	所有的	一定	…
否定词语	至少有两个	一个也没有	某个	某些	不一定	…

例3 (2013 黄冈调研)命题"对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$x^3-x^2+1\leqslant 0$"的否定是　　(　　)

A. 不存在 $x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1\leqslant 0$

B. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1\leqslant 0$

C. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1>0$

D. 对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1>0$

【解析】　选 C. 命题"对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1\leqslant 0$"是一个全称命题,其否定是一个特称命题,即"存在 $x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1>0$".

【名师点睛】　解本题的关键是能理解为什么"对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1\leqslant 0$"的否定是"存在 $x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^3-x_0^2+1>0$".原命题是指对所有的实数,不等式 $x^3-x+1\leqslant 0$ 都成立,要否定这个结论,只要找到一个实数 x_0 使不等式 $x_0^3-x_0^2+1\leqslant 0$ 不成立,即存在实数 x_0 使 $x_0^3-x_0^2+1>0$ 即可.

【跟踪训练】

3. 写出下列命题的否定并判断其真假.

(1)p:不论 m 取何实数,方程 $x^2+mx-1=0$ 必有实数根;

(2)p:有的三角形的三条边相等;

(3)p:菱形的对角线互相垂直;

(4)p:$\exists x_0\in\mathbf{N}$,$x_0^2-x_0+1\leqslant 0$.

考点四　与逻辑联结词、全(特)称命题有关的参数问题

含有逻辑联结词的命题要先确定构成该复合命题的(一个或两个)单一命题的真假,求出此时参数成立的条件,再求出含逻辑联结词的命题成立的条件.

例4 已知命题 p:$\forall x\in[1,2]$,$x^2-a\geqslant 0$;命题 q:$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使 $x_0^2+2ax_0+2-a=0$.若命题"p 且 q"是真命题,则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\{a\mid a\leqslant -2$ 或 $a=1\}$

B. $\{a\mid a\geqslant 1\}$

C. $\{a\mid a\leqslant -2$ 或 $1\leqslant a\leqslant 2\}$

D. $\{a\mid -2\leqslant a\leqslant 1\}$

【解析】　选 A. 由"p 且 q"是真命题得 p,q 均为真命题.若 p 为真命题,则 $a\leqslant x^2$ 恒成立,因为 $x\in[1,2]$,所以 $a\leqslant 1$.若 q 为真命题,则 $x^2+2ax+2-a=0$ 有实根,所以 $\Delta=4a^2-4(2-a)\geqslant 0$,即 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -2$.综上所述,实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant -2$ 或 $a=1\}$.

【名师点睛】　逻辑联结词"或"、"且"、"非"与集合部分所学的"并集"、"交集"、"补集"的关系非常密切,因此,可结合集合的运算来加深对这三个逻辑联结词的理解.对"非"的理解,可以联想集合中"补集"的概念."非"是对命题结论的全盘否定,若将命题 p 对应的集合记作 P,则命题 $\neg p$ 对应着集合 P 在全集 U 中的补集 $\complement_U P$.对"或"的理解,可以联想到集合中"并集"的概念,$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 中的"或"是指"$x\in A$"、"$x\in B$"至少有一个是成立的,既可以是"$x\in A$,$x\notin B$",也可以是"$x\notin A$,$x\in B$",还可以是"$x\in A$,$x\in B$".逻辑联结词中的"或"与并集中的"或"的含义是一致的,它们均不同于生活用语中的"或".生活用语中的"或"表示"不兼有"的意思,而逻辑联结词中的"或"与并集中的"或"表示"可以兼有但不必须兼有".对"且"的理解,可以联想集合中"交集"的概念,$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B)$,其中的"且"是指"$x\in A$"、"$x\in B$"必须同时满足的意思,即 x 既属于集合 A 又属于集合 B.

【跟踪训练】

4. (2013 北京海淀模拟)命题 p:关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$,对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,q:函数 $f(x)=(3-2a)^x$ 是增函数,若 p 或 q 为真,p 且 q 为假,求实数 a 的取值范围.

5　考点失分警示

1. 一般地,若一个全称命题为真命题,则它的否定是一个存在性命题,并且是假命题;若一个存在性命题是真命题,则它的否定是一个全称命题,并且是假命题;

2. 对一个命题的否定是全部否定,而不是部分否定;

3. 逻辑联结词"或"与日常生活中的"或"是有差别的.

【典型例题】

若命题 p:方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的根是 2,命题 q:方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的根是 1,则命题"方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的根是 2 或 1"是______命题(填"真"或"假").

【错解】　由条件易知命题 p 与命题 q 都是假命题,而命题"方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的根是 2 或 1"为"$p\vee q$",故为假命题.

【正解】　所判断命题为真命题.

【错因分析】　命题"方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的根是 2 或 1"中的"或"并不是复合命题中的"或",即不是 p 与 q 的复合.

【易错警示】　逻辑联结词"或"与日常生活中的"或"是有区别的,前者包括"或此、或彼、或兼"三种情形,后者表示"或此、或彼"两种情形.有的含有"且"、"或"、"非"联结词的命题,从字面上看不一定有"且"、"或"、"非"等字样,这就需要我们掌握一些词语、符号或式子与逻辑联结词"且"、"或"、"非"的关系.如"并且"、"$\mathrel{\underline{\angle}}$"的含义为"且";"或者"、"$\leqslant$"的含义为"或";"不是"、"$\notin$"的含义为"非".

【补救训练】

(2014 南京质检)已知 $M=\left\{x\left|\frac{ax-1}{2x-a}\leqslant 0\right.\right\}$ 且 $1\notin M$,则 a 的取值范围是________.

6 热点题型探究

1. (2012 辽宁,4) 已知命题 p:$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,$(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)\geqslant 0$,则 $\neg p$ 是　(　　)
   A. $\exists x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)\leqslant 0$
   B. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)\leqslant 0$
   C. $\exists x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)<0$
   D. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},(f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)<0$
2. (2012 湖北,2) 命题"$\exists x_0\in \complement_{R}Q,x_0^3\in Q$"的否定是　(　　)
   A. $\exists x_0\notin \complement_{R}Q,x_0^3\in Q$　　B. $\exists x_0\in \complement_{R}Q,x_0^3\notin Q$
   C. $\forall x_0\notin \complement_{R}Q,x_0^3\in Q$　　D. $\forall x_0\in \complement_{R}Q,x_0^3\notin Q$
3. (2011 北京) 若 p 是真命题,q 是假命题,则　(　　)
   A. $p\wedge q$ 是真命题　　B. $p\vee q$ 是假命题
   C. $\neg p$ 是真命题　　D. $\neg q$ 是真命题
4. (2011 安徽) 命题"所有能被 2 整除的整数都是偶数"的否定是　(　　)
   A. 所有不能被 2 整除的整数都是偶数
   B. 所有能被 2 整除的整数都不是偶数
   C. 存在一个不能被 2 整除的整数是偶数
   D. 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数
5. (2011 辽宁) 已知命题 p:$\exists n\in\mathbf{N},2^n>1000$,则 $\neg p$ 为　(　　)
   A. $\forall n\in\mathbf{N},2^n\leqslant 1000$　　B. $\forall n\in\mathbf{N},2^n>1000$
   C. $\exists n\in\mathbf{N},2^n\leqslant 1000$　　D. $\exists n\in\mathbf{N},2^n<1000$
6. (2010 湖南) 下列命题中的假命题是　(　　)
   A. $\forall x\in\mathbf{R},2^{x-1}>0$　　B. $\forall x\in\mathbf{N}^*,(x-1)^2>0$
   C. $\exists x\in\mathbf{R},\lg x<1$　　D. $\exists x\in\mathbf{R},\tan x=2$
7. (2010 新课标全国) 已知命题 p_1:函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,p_2:函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数. 则在命题 $q_1:p_1\vee p_2$,$q_2:p_1\wedge p_2$,$q_3:(\neg p_1)\vee p_2$ 和 $q_4:p_1\wedge(\neg p_2)$ 中,真命题是　(　　)
   A. q_1,q_3　　B. q_2,q_3
   C. q_1,q_4　　D. q_2,q_4
8. (2010 辽宁) 已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax+b=0$,则下列选项的命题中为假命题的是　(　　)
   A. $\exists x\in\mathbf{R},f(x)\leqslant f(x_0)$　　B. $\exists x\in\mathbf{R},f(x)\geqslant f(x_0)$
   C. $\forall x\in\mathbf{R},f(x)\leqslant f(x_0)$　　D. $\forall x\in\mathbf{R},f(x)\geqslant f(x_0)$
9. (2010 辽宁 11) 已知 $a>0$,则 x_0 满足关于 $ax=b$ 的充要条件是　(　　)
   A. $\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$
   B. $\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$
   C. $\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$
   D. $\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\frac{1}{2}ax_0^2-bx_0$
10. (2009 浙江 10) 对于正实数 α,记 M_α 为满足下述条件:对函数 $f(x)$ 构成的集合:$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_2>x_1$,有 $-\alpha(x_2-x_1)<f(x_2)-f(x_1)<\alpha(x_2-x_1)$. 下列结论中正确的是　(　　)
    A. 若 $f(x)\in m_{\alpha1},g(x)\in M_{\alpha_2}$,则 $f(x)\cdot g(x)\in M_{\alpha_1\cdot\alpha_2}$
    B. 若 $f(x)\in m_{\alpha1},g(x)\in M_{\alpha_2}$,且 $g(x)\neq 0$,则 $\frac{f(x)}{g(x)}\in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$
    C. 若 $f(x)\in m_{\alpha1},g(x)\in M_{\alpha_2}$,则 $f(x)+g(x)\in M_{\alpha_1+\alpha_2}$
    D. 若 $f(x)\in m_{\alpha1},g(x)\in M_{\alpha_2}$,且 $\alpha_1>\alpha_2$,则 $f(x)-g(x)\in M_{\alpha_1-\alpha_2}$
11. (2010 安徽,11) 命题"对任何 $x\in\mathbf{R}$,$|x-2|+|x-4|>3$"的否定是____________.
12. (2012 北京,14) 已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$,$g(x)=2^x-2$. 若同时满足条件:
    ① $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$;
    ② $\exists x\in(-\infty,-4)$,$f(x)g(x)<0$,
    则 m 的取值范围是________.

7 2015 热点预测

预测 2015 高考会考查以下两个方面的内容:一是以复合命题的形式考查数学相关知识;二是对含有一个量词的命题进行否定. 题型多为选择题、填空题,难度适中.

1. (2014 山东省泰安市期中考试) 命题"所有实数的平方都是正数"的否定为　(　　)
   A. 所有实数的平方都不是正数
   B. 有的实数的平方是正数
   C. 至少有一个实数的平方是正数
   D. 至少有一个实数的平方不是正数

   【解析】 全称命题的否定是特称命题,所以"所有实数的平方都是正数"的否定为"至少有一个实数的平方不是正数".

   【答案】 D
2. (2014 天津市天津一中模拟) 有关下列命题的说法正确的是(　　)
   A. 命题"若 $x^2=1$,则 $x=1$"的否命题为"若 $x^2=1$ 则 $x\neq 1$"
   B. "$x=-1$"是"$x^2-5x-6=0$"的必要不充分条件
   C. 命题"$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+x+1<0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$,均有 $x^2+x+1<0$"
   D. 命题"若 $x=y$,则 $\sin x=\sin y$"的逆否命题为真命题

   【解析】 "若 $x^2=1$,则 $x=1$"的否命题为"$x^2\neq 1$,则 $x\neq 1$",即 A 错误. 若 $x^2-5x-6=0$,则 $x=6$ 或 $x=-1$,所以"$x=-1$"是"$x^2-5x-6=0$"的充分不必要条件,所以 B 错误. "$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+x+1<0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$,均有 $x^2+x+1\geqslant 0$",所以 C 错误. 命题"若 $x=y$,则 $\sin x=\sin y$"正确,所以它的逆否命题也正确.

   【答案】 D
3. (2014 山东省青岛市期中考试) 给出下列三个结论:(1) 若命题 p 为真命题,命题 $\neg q$ 为真命题,则命题"$p\wedge q$"为真命题;(2) 命题"若 $xy=0$,则 $x=0$ 或 $y=0$"的否命题为"若 $xy=0$,则 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$";(3) 命题"$\forall x\in R,2^x>0$"的否定是"$\exists x\in R,2^x\leqslant 0$". 则以上结论正确的个数为　(　　)
   A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 0 个

   【解析】 $\neg q$ 为真,则 q 为假,所以 $p\wedge q$ 为假命题,所以 (1) 错误. "若 $xy=0$,则 $x=0$ 或 $y=0$"的否命题为"若 $xy\neq 0$,则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$",所以 (2) 错误. (3) 正确.

   【答案】 C