第1章

行 列 式

基本要求

1. 了解行列式的概念,会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.
2. 了解行列式的性质,熟练掌握用行列式的性质计算行列式.
3. 了解余子式和代数余子式的概念,掌握用行列式按行(列)展开定理计算行列式.
4. 了解克莱姆法则,会用克莱姆(Cramer)法则求解 n 元线性方程组.

内容提要

一、行列式的概念

1. 排列与逆序数

(1) n 级排列　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 个不同数字的全排列,称为一个 n 级排列,记作 $j_1j_2\cdots j_n$.

(2) 逆序　在一个 n 级排列中,如果有较大数排在较小数的前面,则称这两个数构成一个逆序;一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如果排列的逆序数是奇数称为奇排列,是偶数则称为偶排列.

(3) 对换　在一个排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中,互换两个数 j_s 和 j_t 的位置,其余数位置不变,称为一次对换. 一次对换改变排列的奇偶性.

n 级排列共有 $n!$ 个,其中奇排列与偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

(1) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(3) n 阶行列式由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行、n 列的数表

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示 $n!$ 项的代数和,每一项都是取自行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积,各项的符号是:当这一项中各元素的行标构成自然排列时,若列标构成的排列为偶排列则取正号,若列标构成的排列为奇排列则取负号. 所以 n 阶行列式中的一般项可写成

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时,则得到 n 阶行列式所表示的代数和中的所有项. 因此 n 阶行列式

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

n 阶行列式的一般项还可写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \text{ 或 } (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 及 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列.

二、行列式的性质

性质 1 行列式转置,其值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 互换行列式的某两行(列)的位置,行列式的值变号.

推论 1 若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3 行列式中某一行(列)的公因子,可以提到行列式符号的前面.

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以数 k 等于用数 k 乘以此行列式.

推论 3 若行列式的某一行(列)中所有元素全为零,则此行列式等于零.

推论 4 若行列式的某两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 4 若行列式的某一行(列)中所有元素都是两个元素的和,则此行列式等于两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　将行列式的某一行(列)所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

三、行列式按行(列)展开定理

1. 有关概念

(1) 代数余子式　在 n 阶行列式 D_n 中,划掉元素 a_{ij} 所在的行与列中的所有元素,余下的元素按原来的顺序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};称$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij}.

(2) k 阶子式　在一个 n 阶行列式 D 中任取 k 行 k 列$(1\leqslant k\leqslant n)$,由这些行和列交叉点处的元素按原来顺序构成的 k 阶行列式 M,称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划掉这 k 行 k 列后余下的元素按原来顺序构成的 $n-k$ 阶行列式 M',称为 k 阶子式 M 的余子式. 若行列式 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列下标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 及 $j_1,j_2,\cdots,j_n$,则称 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)+(j_1+j_2+\cdots+j_n)}M'$ 为 k 阶子式 M 的代数余子式. 记为 A.

2. 行列式按行(列)展开

定理 1　n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

推论　n 阶行列式 D 的任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

综合定理及推论,得

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases} D, & i=s \\ 0, & i\neq s \end{cases}$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases} D, & j=t \\ 0, & j\neq t \end{cases}$$

*3. 行列式按 k 行(列)展开(拉普拉斯(Laplace)展开)

在 n 阶行列式 D 中,若任意取定 k 行$(1\leqslant k\leqslant n)$,则由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式 D. 即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t,\quad t=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

四、克莱姆法则

定理 2 若 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$,则该方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D},\ j = 1,2,\cdots,n$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 的第 j 列各元素换为该方程组右端常数项,其余元素不变而得到的行列式.

对于上述 n 元线性方程组,当系数行列式 $D=0$ 时,该方程组可能有解也可能无解,此时不能用克莱姆法则.

对于 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

一定有解,因为 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 就是一个解,此解称为零解.

推论 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $D=0$.

五、重要结论

1. 上(下)三角形行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 关于次对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3. 可利用行列式的性质或拉普拉斯展开定理证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} & c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

4. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$$

例题选讲

一、行列式的概念

1. 计算逆序数

思路1　按排列的次序分别算出每个数后面比它小的数的个数，然后求和；

思路2　按排列的次序分别算出每个数前面比它大的数的个数，然后求和.

例1.1　求下列排列的逆序数.

(1) 347812596；(2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

解　(1) 用思路1，得 $\tau(347812596)=2+2+4+4+0+0+0+1+0=13$.

用思路2，得 $\tau(347812596)=0+0+0+0+4+4+2+0+3=13$.

(2) 该排列中前 n 个数之间不构成逆序，后 n 个数之间也不构成逆序，只是前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序，用思路1，易得

$$\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. 利用行列式定义的计算题

例 1.2 在 7 阶行列式中，$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7j}a_{22}a_{31}$ 取“－”号，确定下标 i 与 j 的值.

解 方法 1 由于 $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7j}a_{22}a_{31}=a_{1i}a_{22}a_{31}a_{47}a_{55}a_{63}a_{7j}$，而 $i21753j$ 是一个 7 级排列，故 i,j 只能取 4，6.

若 $i=4,j=6$ 时，则 $\tau(4217536)=8$ 为偶排列，与已知不符，故 $i=6,j=4$.

方法 2 因为行排列的逆序数为 $\tau(4615723)=11$，所以列排列的逆序数 $\tau(73i5j21)$ 应为偶数.

而若 $i=4,j=6$，则 $\tau(7345621)=15$ 为奇数，与已知不符，故 $i=6,j=4$.

例 1.3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 4x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^4 与 x^3 的系数.

解 根据行列式定义，只有 4 个元素 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}$ 相乘才能得出 x^4 项，故 x^4 的系数为 4；含 x^3 的项只有 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^{\tau(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x$，故 x^3 的系数为－1.

例 1.4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

分析 一般行列式无法用行列式定义计算. 但这里的行列式有较多的零元素，一般项中会有很多项为零，我们只需求得乘积不为零的项，所以可以考虑用定义计算.

解 根据行列式定义，D 的一般项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，只有当 $j_1=n-1,j_2=n-2,\cdots,j_{n-1}=1,j_n=n$ 时，才不为 0，故

$$D = (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 21n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

二、行列式的计算

对于二阶和三阶行列式，可以用对角线法则计算. 但对于高阶行列式，一般需要根据所求行列式的特点去寻找计算方法. 行列式的计算方法很多，主要有：

1. 直接根据行列式定义计算，这时需要行列式中含有足够多的零元素，使不为零的一般项只有很少几项，否则计算过程会较为繁琐.

2. 利用行列式性质将行列式化为三角形或某些特殊形式来计算，这是最常用的方法.

3. 降阶法——利用按行(列)展开定理，化行列式为较低阶行列式计算.

4. 递推法——利用行列式性质，把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式，再根据此关系式递推得所求 n 阶行列式.

5. 利用数学归纳法计算或证明行列式.

以上方法中，前三种方法是基本方法，应重点掌握.

例 1.5　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

解　本题为数字行列式，没有明显特点，一般用行列式性质化为三角形行列式计算.

$$D\xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_4+r_2\\ r_2+2r_3}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_3\div(-3)\\ r_4+2r_3}}-3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}=-27$$

本题也可用行列式性质结合展开定理计算.

例 1.6　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-\lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}$$

分析　本题特点是每一行(或列)各元素之和相等，均为 $x+(n-2)\lambda$. 常用办法是将后面各列(或行)都加到第 1 列(或行)，使第 1 列(或行)有公因子可以提到行列式符号外面. 这样为下一步利用性质 5 提供方便.

解　将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列后，第 1 列各元素均为 $x+(n-2)\lambda$；再将第 1 列的公因子提出，第 1 列各元素均变为 1；最后将第 1 行乘以(-1)加到其他各行上去，则行列式变成上三角形，即

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-2)\lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ x+(n-2)\lambda & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-2)\lambda & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}=[x+(n-2)\lambda]\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)\lambda]\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & x-2\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-2\lambda \end{vmatrix}=[x+(n-2)\lambda](x-2\lambda)^{n-1}$$

例 1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

分析 本题特点是第 1 行、第 1 列及主对角线元素以外，其余元素全为零. 这类行列式通常可化为三角形行列式计算.

解 分别将第 $i+1$ 列乘以$\left(-\frac{b_i}{a_i}\right)(i=1,2,\cdots,n)$都加到第 1 列，得

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i} & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1 a_2 \cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i}\right)$$

例 1.8 证明

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1 x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

分析 本题左端行列式(记为 D_n)中有较多的零，且规律性很强，容易找出 D_n 与 D_{n-1} 的关系式，故可用递推法.

证 方法 1 递推法. 将左端行列式按第 1 列展开，得

$$D_n=xD_{n-1}+a_n$$

递推得

$$D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}, xD_{n-1}=x^2 D_{n-2}+xa_{n-1}$$

$$D_{n-2}=xD_{n-3}+a_{n-2}, x^2 D_{n-2}=x^3 D_{n-3}+x^2 a_{n-2}$$

……

$$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2, x^{n-2}D_2=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}$$

综合以上各式，得 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

方法 2　数学归纳法. 当 $n=2$ 时，$D_2=x^2+a_1x+a_2$，结论成立；

假设 $n-1$ 阶行列式，结论成立，即 $D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$；

现证 n 阶行列式，结论也成立. 将左端 n 阶行列式按第 1 列展开，并利用假设条件，得

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1}+a_n=x(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1})+a_n \\ &= x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \end{aligned}$$

故原结论成立.

注　(1) 本题中使用递推法时，为了不破坏行列式原有的结构规律，应当按第 1 列展开.

(2) 本题也可用行列式性质结合展开定理计算.

例 1.9　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解　方法 1　递推并利用对称性. 依次将第 $i+1$ 行乘以 (-1) 加到第 i 行上 $(i=1, 2,\cdots,n-1)$，则有

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x+a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & x+a & a-x \\ -a & -a & -a & & -a & x \end{vmatrix}\text{（按第 1 列展开）}$$

$$=(x+a)D_{n-1}+(-a)(-1)^{n+1}(a-x)^{n-1}=(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}$$

再利用行列式关于主对角线的对称性，有

$$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1}$$

联立上面两式，得 $D_n=\dfrac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]$.

方法 2　拆项法. 将原行列式的第 1 列拆开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{x-a}{2}+\frac{x+a}{2} & a & a & \cdots & a \\ \frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2} & x & a & \cdots & a \\ \frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2} & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2} & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{x-a}{2} & a & a & \cdots & a \\ \frac{x-a}{2} & x & a & \cdots & a \\ \frac{x-a}{2} & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{x-a}{2} & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{x+a}{2} & a & a & \cdots & a \\ -\frac{x+a}{2} & x & a & \cdots & a \\ -\frac{x+a}{2} & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{x+a}{2} & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

对于第一个行列式，将第 1 行乘以(−1)加到其他各行后，再按第 1 列展开即变为下三角形行列式；对于第 2 个行列式，将第 1 行加到其他各行后即变成上三角形行列式. 故

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{x-a}{2} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2a & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -2a & -2a & \cdots & x-a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{x+a}{2} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(x-a)^n+(x+a)^n]$$

例 1.10 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$$

分析 本题与范德蒙德行列式比较缺少了三次幂一行，因而可添上一行化为范德蒙德行列式，然后比较系数来确定 D；也可直接按第 4 行展开，则各余子式都是范德蒙德行列式.

解　记

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4&x\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2&x^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3&x^3\\x_1^4&x_2^4&x_3^4&x_4^4&x^4\end{vmatrix}$$

则该行列式中元素 x^3 的余子式即为所求行列式. 一方面,根据范德蒙行列式,有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{4}(x-x_i)\cdot\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)$$

另一方面,对 $f(x)$按第 5 列展开,有

$$f(x)=A_{15}+xA_{25}+x^2A_{35}+x^3A_{45}+x^4A_{55}$$

比较上面两式 x^3 的系数,得

$$A_{45}=-\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)$$

故

$$D=M_{45}=-A_{45}=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)$$

三、有关余子式或代数余子式的线性组合的计算

例 1.11　设行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-5&1&7&1\\1&1&8&-1\\2&2&3&4\end{vmatrix}$$

求:(1)$A_{21}+2A_{22}+A_{23}+A_{24}$;(2)$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$;(3)$M_{21}-M_{22}+2M_{23}$.

分析　本题可以分别计算每一个余子式或代数余子式,然后再求和,但计算量较大. 这里需灵活运用行列式按行(列)展开定理及其推论.

解　(1) $A_{21}+2A_{22}+A_{23}+A_{24}$可看成是行列式 D 的第 2 行各元素分别换成 1,2,1,1 后的新行列式按第 2 行的展开式,故计算新行列式可得

$$A_{21}+2A_{22}+A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&8&-1\\1&2&3&4\end{vmatrix}=25$$

(2) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$是行列式 D 的第 1 行各元素与第 4 行各元素的代数余子式乘积之和,故 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$.

(3) $M_{21}-M_{22}+2M_{23}=-A_{21}-A_{22}-2A_{23}$ 可看成行列式 D 的第 2 行各元素分别换成 $-1,-1,-2,0$ 后的新行列式按第 2 行的展开式,故计算新行列式得

$$M_{21}-M_{22}+2M_{23}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&-2&0\\1&1&8&-1\\1&2&3&4\end{vmatrix}=-5$$

四、克莱姆法则的应用

对于 n 元线性方程组,当系数行列式 $D\neq 0$ 时,可由克莱姆法则求得其唯一解,但当 n 较大时,n 阶行列式的计算量较大. 克莱姆法则的重要性更多地体现在理论上.

例 1.12 对于 4 元齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+ax_2+ax_3+bx_4=0\\ax_1+ax_2+bx_3+ax_4=0\\ax_1+bx_2+ax_3+ax_4=0\\bx_1+ax_2+ax_3+ax_4=0\end{cases}$$

问 a,b 满足何种关系时,有非零解?

解 因为该方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a&a&a&b\\a&a&b&a\\a&b&a&a\\b&a&a&a\end{vmatrix}=(3a+b)(b-a)^3$$

所以当 $b=a$ 或 $b=-3a$ 时,该方程组有非零解.

例 1.13 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,证明:若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点,则 $f(x)\equiv 0$.

证 设 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同的零点为 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$,则 $f(x_i)=0(i=0,1,2,\cdots,n)$,即

$$\begin{cases}a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=0\\a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=0\\\qquad\qquad\vdots\\a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=0\end{cases}\qquad(*)$$

将(*)式看成是以 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为未知量的齐次线性方程组,其系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1&x_0&x_0^2&\cdots&x_0^n\\1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\neq 0$$

故方程组(*)仅有零解,即 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=0$,所以 $f(x)\equiv 0$.

习题解答

习题一

A 类

1. 求下列排列的逆序数,并确定其奇偶性.

(1)347812596;(2)671298435;(3)$n(n-1)\cdots 321$;(4)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

解　(1)见例 1.1.

(2) $\tau(671298435)=18$,偶排列.

(3) $\tau(n(n-1)\cdots 321)=\dfrac{n(n-1)}{2}$;当 $n=4k$ 或 $n=4k+1(k=1,2,\cdots)$时为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3(k=0,1,2,\cdots)$时为奇排列.

(4)见例 1.1.

2. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$.

解　(1) -1; (2) 0; (3) -14; (4) $2x^3-6x^2+6$.

3. 用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$$

解　因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=60\neq 0$,所以方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}=180, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}=60, D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}=60$$

所以 $x_1=3,x_2=1,x_3=1$.

4. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{41}$ 的项.

解　含有因子 $a_{12}a_{41}$ 的项有:$-a_{12}a_{41}a_{23}a_{34}$,$a_{12}a_{41}a_{24}a_{33}$.

5. 在 7 阶行列式中,$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7j}a_{22}a_{31}$ 取“$-$”号,确定下标 i 与 j 的值.

解　见例 1.2.

6. 根据行列式的定义,计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 (1) 原行列式$=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}n!=(-1)^{n-1}n!$;

(2) 原行列式$=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

7. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$;(2) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x-\lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & x-\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & x-\lambda \end{vmatrix}$($n$ 阶行列式);

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$$(n\geqslant 2)$;(6) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1-y & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(8) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$；

(9) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$（$n$ 阶行列式）；

(10) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

解　(1) 因该行列式行和相等，故将第 2，3 列都加到第 1 列，并提取公因子，得

$$D=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{=}(2a+2b+2c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix}=2(a+b+c)^3$$

(2) 见例 1.5.

(3) 见例 1.6.

(4) 从上到下依次将上一行加到下一行，得

$$原式=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

(5) 原式 $\xlongequal[r_n - r_2]{r_3 - r_2,\ \cdots}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2 - 2r_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

(6) 将行列式的第 $n+1$ 列分别乘以 $(-a_i)$ 加到第 i 列 $(i=1,2,\cdots,n)$，得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

(7) 方法 1　利用行列式性质进行计算. 当 $y\neq 0$ 时，有

$$D \xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 0 & 0 & -x & -x \\ 0 & y & 0 & -x \\ -y & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \overset{y\neq 0}{\xlongequal[c_4-c_3]{c_4-\frac{x}{y}c_1,\ c_4+\frac{x}{y}c_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^2y^2$$

当 $y=0$ 时，$D=0$.

方法 2　结合行列式性质与展开定理进行计算，有

$$D \xlongequal[r_4-r_3]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 0 & 0 & -x & -x \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ -y & -y & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-c_3]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^2y^2$$

(8) 方法 1　利用行列式性质进行计算，有

$$D \xlongequal[r_n-r_1]{r_2-r_1,\ \cdots} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+\frac{a_1}{a_n}c_n]{c_1+\frac{a_1}{a_2}c_2,\ \cdots} \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

方法 2　利用行列式性质直接化为三角形行列式计算，有

$$D \xlongequal[\substack{c_1 \div a_1 \\ c_2 \div a_2 \\ \vdots \\ c_n \div a_n}]{} a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix} \text{（第 2 列至第 } n \text{ 列加到第 1 列，并提取公因子）}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

（9）按第 1 列展开，得 $D_n = x^n + (-1)^{n+1} y^n$.

（10）记原行列式为 D_5. 将第 1 行至第 4 行都加到第 5 行，得

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

按最后一行展开，得

$$D_5 = D_4 + (-a)(-1)^{5+1} a^4 = D_4 - a^5$$

递推，得

$$D_4 = D_3 + (-a)(-1)^{4+1} a^3 = D_3 + a^4$$

$$D_3 = D_2 + (-a)(-1)^{3+1} a^2 = D_2 - a^3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a + a^2$$

以上各式相加，得

$$D_5 = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$$

8．解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}=0,\text{其中 } a_1\neq 0$$

解 将方程左端的行列式的第 1 行乘以(−1)加到其他各行，得

$$\text{左端}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-x \end{vmatrix}=a_1(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)$$

故 $x=a_1$ 或 $x=a_2$ 或……或 $x=a_{n-1}$.

9．证明

(1) $$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

证 (1) 利用行列式性质将第 1 列拆开，再提取公因子，得

$$\text{左端}=a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}\text{（多次利用行列式性质）}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=\text{右端}$$

(2) 见例 1.8.

10．已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 及 $A_{44}+A_{45}$.

解　方法 1　将 D 按第 4 行展开，同时又将 D 的第 2 行各元素与第 4 行相应元素的代数余子式相乘并求和，得$\begin{cases} A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45})=27 \\ 2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+A_{44}+A_{45}=0 \end{cases}$，解得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,\ A_{44}+A_{45}=18$$

方法 2　$A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$ 可分别看成是行列式 D 的第 4 行各元素分别换成 1,1,1,0,0 和 0,0,0,1,1 后的新行列式按第 4 行的展开式，故可计算新行列式得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-9,\ A_{44}+A_{45}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=18$$

11. 利用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=3 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=4 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a+b+c \\ ax_1+bx_2+cx_3=a^2+b^2+c^2 \\ bcx_1+cax_2+abx_3=3abc \end{cases}$，其中 a,b,c 互不相等.

解　(1) 由于该方程组的系数行列式 $D=-70\neq 0$，所以该方程组有唯一解. 又

$$D_1=-70,D_2=-70,D_3=-70,D_4=-70$$

所以根据克莱姆法则，原方程组的唯一解为 $x_1=1,x_2=1,x_3=1,x_4=1$.

(2) 由于该方程组的系数行列式 $D=(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$，且

$D_1=a(a-b)(b-c)(c-a),D_2=b(a-b)(b-c)(c-a),D_3=c(a-b)(b-c)(c-a)$

所以原方程组有唯一解为 $x_1=a,x_2=b,x_3=c$.

12. 设齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$有非零解，求 a,b 应满足的关系式.

解　因为方程组有非零解，所以系数行列式 $D=a^2+a+1-3b=0$，故 $3b=a^2+a+1$.

B 类

一、填空题

1. 当 $i=$________，$j=$________时排列 $12i546j39$ 为奇排列.

解 当 $i=7, j=8$ 时，$\tau(127546839)=9$；当 $i=8, j=7$ 时，$\tau(128546739)=10$. 故 $i=7$，$j=8$.

2．若排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 k，则排列 $j_n \cdots j_2 j_1$ 的逆序数为________.

解 方法 1 在排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中，任意两个数或为顺序或为逆序，所以顺序与逆序的总数为 C_n^2. 而排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的顺序数恰是排列 $j_n \cdots j_2 j_1$ 的逆序数，故排列 $j_n \cdots j_2 j_1$ 的逆序数为 $C_n^2 - k$.

方法 2 设排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中，排在 $j_i (i=1,2,\cdots,n)$ 后面比 j_i 小的数有 k_i 个，则排在 j_i 前面比 j_i 小的数有 $j_i - 1 - k_i$ 个，显然 $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$. 所以排列 $j_n \cdots j_2 j_1$ 中排在 $j_i (i=1,2,\cdots,n)$ 后面比 j_i 小的数有 $j_i - 1 - k_i$ 个，所以 $\tau(j_n \cdots j_2 j_1) = \sum\limits_{i=1}^{n}(j_i - 1 - k_i) = \dfrac{n(n-1)}{2} - k$.

3．A_{ij} 是 n 阶行列式中 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} \neq 0$，则 i 与 s 的关系为________.

解 因为若 $i \neq s$，则 $a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0$，与已知矛盾，故 $i = s$.

4．$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$________，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$________.

解 第一式 $=12$，第二式 $=0$.

5．多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中，常数项为________.

解 常数项为 $f(0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$（按第 1 行展开）.

6．$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$________，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix} =$________.

解 第一式 $= \begin{vmatrix} b+c+a & c+a+b & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$