第 1 章

赋范空间、非线性算子和迭代程序

非线性算子迭代序列的收敛性是十分活跃的课题，得到国内外许多学者的广泛研究. 问题更多地集中在空间框架、非线性算子、迭代程序和迭代序列的收敛性这四个方面，为了使读者系统了解和掌握非线性迭代基本理论，本章分别对前三个问题给予综述.

1.1 赋范空间的几何性质

非线性算子理论与算子所在的空间是密切相关的，不同的空间会有不同的结果，为此我们首先介绍非线性算子迭代理论所涉及的各类空间的概念和性质. 由于一些结论的证明方法与迭代理论的建立没有更多的必然联系，所以大部分结果仅仅给出定理的内容，略去了证明过程，其详细的证明过程可参考相应的文献.

事实上，要想在算子的迭代理论上获得突破性的结果，掌握各类空间的几何性质是至关重要的，也是这项工作的基础. 在本节中，我们仅介绍必要的、常用的赋范空间的几何性质.

研究非线性算子迭代理论，通常是在距离空间、赋范空间、Banach 空间（一致凸和一致光滑的 Banach 空间）和 Hilbert 空间的框架下进行的.

定义 1.1.1 设 X 是一个非空集合，二元函数 d：$X\times X\to\mathbf{R}$ 满足：

(1) $d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；

(2) $d(x,y)=d(y,x)$；

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

则称 d 为 X 的距离，对偶(X,d)为距离空间，也称 X 为距离空间.

定义 1.1.2 设 X 是数域 F 上的线性空间，范数 $\|\cdot\|$ 是定义在 X 上的实值函数，且具有以下性质：对任意 $x,y\in X$ 和任意的 $\alpha\in F$ 有：

(1) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$；

(3) $\|x\|\geqslant 0$ 且 $\|x\|=0\Rightarrow x=0$.

则称$(X,\|\cdot\|)$为赋范线性空间,为简单起见,也称 X 为赋范空间.

定义 1.1.3 设 X 是数域 F 上的线性空间,定义二元函数$\langle\cdot,\cdot\rangle$: $X\times X\to F$ 满足下列条件:对任意的 $\alpha,\beta\in F$ 和 $x,y,z\in X$ 有

(1) $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle\leqslant\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$;

(2) $\langle x,y\rangle\leqslant\overline{\langle y,x\rangle}$;

(3) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$ 且$\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$.

则称$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 X 上的内积.定义了内积的线性空间称为内积空间.若 F 是实数域,则称 X 为实内积空间;若 F 是复数域,则称 X 为复内积空间.

从上述定义可知:内积空间是赋范空间,赋范空间是距离空间.

定义 1.1.4 设 X 是赋范线性空间,若 X 中的 Cauchy 序列都收敛,则称赋范空间 X 是完备的,并且称完备的赋范空间是 Banach 空间;完备的内积空间是 Hilbert 空间.

定义 1.1.5 设 X 是 Banach 空间:

(1) 称 X 为严格凸的 Banach 空间,如果对任意的 $x,y\in S_X$(S_X 是 X 的单位球面),且 $x\neq y$,都有 $\|x+y\|<2$;

(2) 称 X 为一致凸的 Banach 空间,如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对任意的 $x,y\in S_X$, $\|x+y\|>1-\delta$,有 $\|x-y\|<\varepsilon$;

(3) 称 X 为局部一致凸的 Banach 空间,如果 $\forall\,\varepsilon>0,x\in\bar{B}_X$($\bar{B}_X$ 是 X 的闭单位球),存在常数 $\delta(x,\varepsilon)>0$,对任何 $y\in\bar{B}_X$ 都有

$$\|x-y\|\geqslant\varepsilon\Rightarrow\|x+y\|\leqslant 2-\delta.$$

注 一致凸的 Banach 空间的等价定义:

(1) 称 X 为一致凸的 Banach 空间,如果 X 的凸性模

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{\|x+y\|}{2}:\|x\|=\|y\|=1,\|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\}$$

是$(0,1]$的函数.

(2) 若对任意的$\{x_n\},\{y_n\}\subseteq S_X$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$[①],则称 X 为一致凸的 Banach 空间.

定义 1.1.6 称 X 的范数是一致 Gâteaux 可微的,如果对任意的 $y\in S_X$,极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

关于 $x\in S_X$ 是一致存在的.

定义 1.1.7 称 X 的范数为一致 Fréchet 可微的,如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

① 本书中的无穷符号"∞"均表示正无穷.

关于 $x,y\in S_X$ 是一致存在的.

定义 1.1.8 称实 Banach 空间 X 是一致光滑的,若 X 的光滑模

$$\rho_X(\tau)=\sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)-1:x,y\in X,\|x\|=1,\|y\|\leqslant\tau\right\}$$

满足 $\rho_X(\tau)/\tau\to 0(\tau\to 0)$.

在研究算子半群时,有时会涉及算子的积分,即抽象函数的积分.

定义 1.1.9 设 $I=[a,b]$,X 是赋范空间,$T(t):I\to X$ 抽象函数,将区间$[a,b]$分割为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$,令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|t_i-t_{i-1}|\}$为分割细度,作和

$$S=\sum_{i=1}^{n}T(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\quad \xi_i\in[t_i-t_{i-1}],$$

如果存在 $x_0\in X$,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\lambda<\delta$ 时,有

$$\|S-x_0\|<\varepsilon,$$

则称抽象函数 $T(t)$是可积的,x_0 是 $T(t)$在$[a,b]$上的积分,记作

$$\int_a^b T(t)\mathrm{d}t=x_0.$$

定义 1.1.10 设 X 是 Banach 空间,称 X 上的有界线性泛函全体为 X 的对偶空间,记为 X^*. 当线性空间 X^* 赋予范数

$$\|f\|=\max\{f(x):x\in S_X\},$$

其中 S_X 为 X 的单位球面,则 X^* 也是 Banach 空间.

定义 1.1.11 设 X 是实 Banach 空间,X^* 是 X 的对偶空间,对任意 $p\in(1,\infty)$,映象 $J_p:X\to 2^{X^*}$ 定义如下:

$$J_p(x)=\{f\in X^*:(x,f)=\|f\|\cdot\|x\|,\|f\|=\|x\|^{p-1}\},$$

称映象 J_p 是具有有规函数 $\varphi(t)=t^{p-1}$的对偶映象. 特别地,当 $p=2$ 时,对偶映象 J_2 表示为

$$J_2(x)=\{f\in X^*:(x,f)=\|f\|\cdot\|x\|,\|f\|=\|x\|\},$$

称映象 J_2 为正规对偶映象,J_2 简记为 J.

定义 1.1.12 称 Banach 空间 X 满足 Opial's 条件,如果序列$\{x_n\}\subset X$ 弱收敛于 x,则对任意的 $x\neq y$ 有

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x\|<\limsup_{n\to\infty}\|x_n-y\|.$$

定义 1.1.13 如果 X 的集合 A 中的每一序列有收敛的子列,则称 A 为列紧集;如果 A 中的每一个序列都有收敛于 A 中点的子序列,则称 A 是自列紧集.

定理 1.1.1 设 X 是实 Banach 空间,X^* 是 X 的对偶空间,$1<p<\infty$,$\alpha\in[0,\infty)$,对任意的 $x\in X$,则有:

(1) $J_p(x)\neq\varnothing$,且 $D(J_p)=X$;

(2) $J_p(x)=\|x\|^{p-2}J_2(x)$;

(3) $J_p(\alpha x)=\alpha^{p-2}J_p(x)$,$\alpha\in[0,\infty)$;

(4) $J_p(-x)=-J_p(x)$;

(5) J_p 是有界的,即对任意有界集 $E\in X$,$J_p(E)$是 2^{X^*} 的有界子集;

(6) J_p 是函数 $\psi(x)=p^{-1}\|x\|^p$ 的次微分,即

$$J_p(x)=\partial\psi(x)=\{f\in X^*:\psi(y)-\psi(x)\geqslant(f,y-x),\forall y\in X\};$$

(7) X 是一致光滑的 Banach 空间$\Leftrightarrow X^*$ 是一致凸的 Banach 空间$\Leftrightarrow$在 X 的有界子集上,J_p 是单值的,一致连续的.

注 此定理的证明过程见参考文献[2,3].

定理 1.1.2 关于赋范空间的一些性质:

(1) 一致凸空间是局部一致凸的,局部一致凸空间是严格凸的,有限维的严格凸是一致凸的,即有限维空间下,三个概念:严格凸、局部凸和一致凸是等同的.

(2) 一致凸(一致光滑)的 Banach 空间是自反的,且是严格凸的.

(3) Hilbert 空间是一致凸空间.

(4) 设 X 是 Banach 空间,若 X^* 是严格凸的,则 X 是光滑的;若 X^* 是光滑的,则 X 是严格凸的(此结论是不可逆的).

(5) 设 X 是自反的 Banach 空间,X^* 是严格凸的充要条件是 X 是光滑的;X^* 是光滑的充要条件是 X 是严格凸的.

(6) 设 X 是 Banach 空间,则:

X 是一致光滑的$\Leftrightarrow X^*$ 是一致凸的$\Leftrightarrow X$ 的范数是一致 Fréchet 可微的.

(7) 设 X 是 Banach 空间,X 是一致凸的充要条件是 X^* 是一致光滑的;X 是一致光滑的充要条件是 X^* 是一致凸的.

(8) 设 X 是可分的 Banach 空间,则存在 X 上的等价范数,在新的范数下,X 是局部一致凸的,且是光滑的.

注 此定理的证明过程见参考文献[1].

定理 1.1.3[4] 设 X 是 Banach 空间,其范数是一致 Gâteaux 可微的,则正规对偶映象 $J:X\to 2^{X^*}$ 是单值的,而且在 X 的每一有界集上由 X 的范数拓扑到 X^* 的弱 * 拓扑是一致连续的.

定理 1.1.4 设 X 是实 Banach 空间,$J_p:X\to 2^{X^*}$ 为对偶映象,则对任意的 $x,y\in X$ 有

$$\|x+y\|^p\leqslant\|x\|^p+p\cdot\langle y,j_p(x+y)\rangle,\quad\forall j_p\in J_p(x+y).$$

证明 根据定理 1.1.1 的结论(6),有 $J_p(x)=\partial\psi(x)$,其中 $\psi(x)=p^{-1}\cdot\|x\|^p$,于是有

$$\psi(x)-\psi(x+y)\geqslant\langle x-(x+y),j_p(x+y)\rangle,\quad\forall j_p\in J_p(x+y),$$

则有

$$\|x+y\|^p\leqslant\|x\|^p+p\cdot\langle y,j_p(x+y)\rangle,\quad\forall j_p\in J_p(x+y).$$

定理 1.1.5　设 X 是实 Banach 空间，X^* 是 X 对偶空间，$J: X\to 2^{X^*}$ 是正规对偶映象，则对任意的 $x,y\in X$ 有

(1) $\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\ \forall j(x+y)\in J(x+y)$；

(2) $\|x+y\|^2\geqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x)\rangle,\ \forall j(x+y)\in J(x+y)$.

证明　对任意的 $x,y\in X$ 和 $\forall j(x+y)\in J(x+y)$，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,j(x+y)\rangle\leqslant\|x\|\ \|x+y\|+\langle y,j(x+y)\rangle\\&\leqslant\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|x+y\|^2)+\langle y,j(x+y)\rangle,\end{aligned}$$

于是结论(1)成立.

类似地，对任意的 $x,y\in X$ 和 $\forall j(x)\in J(x)$，有

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\langle x,j(x)\rangle=\langle x+y-y,j(x)\rangle\\&\leqslant\|x\|\ \|x+y\|+\langle y,j(x)\rangle\leqslant\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|x+y\|^2)+\langle y,j(x)\rangle,\end{aligned}$$

于是结论(2)成立.

事实上，定理 1.1.5 的结论(1)是定理 1.1.4 的特例，也是研究不动点逼近问题常用的不等式，为方便起见，今后将此不等式称为 Banach 空间性质.

定理 1.1.6[5]　设 X 是一致凸的 Banach 空间，$p>1$，$r>0$ 是两个固定常数，则存在严格增的凸函数 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 且 $g(0)=0$，对于任意的 $x,y\in B_r$ 有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p\leqslant\lambda\ \|x\|^p+(1-\lambda)\ \|y\|^p-w_p(\lambda)g(\|x-y\|),\tag{1.1.1}$$

其中 $w_p(\lambda)=\lambda(1-\lambda)^p+\lambda^p(1-\lambda)$，$B_r=\{x\in X:\|x\|\leqslant r\}$是 X 的半径为 r 的闭球.

在定理 1.1.6 中，取 $p=2$，则有下面结论：

定理 1.1.7　设 X 是一致凸的 Banach 空间，则存在严格增凸函数 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$g(0)=0$，对于任意的 $x,y\in B_r$ 有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2\leqslant\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\ \|y\|^2-\lambda(1-\lambda)g(\|x-y\|).\tag{1.1.2}$$

不等式(1.1.1)和(1.1.2)是研究非线性算子迭代序列收敛性常用的不等式，又称为 Xu(徐)不等式，这个不等式是由徐洪坤先生给出的.

特别地，当 X 是 Hilbert 空间时，有下面不等式：

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2=\lambda\ \|x\|^2+(1-\lambda)\ \|y\|^2-\lambda(1-\lambda)\ \|x-y\|^2,\quad x,y\in X.$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，则有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\ \|x\|^2+2\ \|y\|^2,\quad x,y\in X.$$

上述公式又称为平行四边形公式，或中线公式，即对角线长度的平方和等于四边长度的平方和.

定理 1.1.8[6] 设 X 是一致凸的 Banach 空间，E 是 X 非空有界闭凸子集，T 是 L-Lipschitz 映象，则存在严格增凸函数 g：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 且 $g(0)=0$，$\forall x,y\in E$ 和 $t\in[0,1]$ 有
$$g(L^{-1}\|tTx+(1-tT)y-T(tx+(1-t)y)\|)\leqslant\|x-y\|-L^{-1}\|Tx-Ty\|.$$

定理 1.1.9 若 X 是一致光滑 Banach 空间，则存在连续非减函数 φ：$[0,\infty)\to[0,\infty)$，满足 $\varphi(0)=0$ 且 $\forall k\geqslant1,\varphi(kx)\leqslant k\varphi(x)$，对任意的 $x,y\in X$ 有
$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,J(x)\rangle+\max\{\|x\|,1\}\|y\|\varphi(\|y\|).\tag{1.1.3}$$

不等式(1.1.3)被称为 Reich 不等式，这个不等式是由 Reich 在 1978 年给出的(见文献[7])，这也是研究迭代问题常用的不等式.

定理 1.1.10 设 X 是一致凸 Banach 空间，$0<a<b<1$，$\{t_n\}\subseteq[a,b]$，$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是 X 上两个序列，且$\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n\|\leqslant d$，$\limsup\limits_{n\to\infty}\|y_n\|\leqslant d$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\|(1-t_n)x_n+t_ny_n\|=d$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

注 详见参考文献[8,9]. 这个定理十分重要，一些迭代算法之所以要求空间框架是一致凸 Banach，主要是因为一致凸 Banach 空间有这样的性质. 当然，一致凸 Banach 空间还有其他性质，这些性质在研究迭代理论时也会起到一定的作用.

定理 1.1.11[2] Banach 空间 X 是自反的充要条件是 X 中的闭单位球是弱自列紧.

定理 1.1.12 设 X 是一致凸的 Banach 空间，则存在连续严格增凸函数 g：$[0,\infty)\to[0,\infty)$，$g(0)=0$ 满足：
$$\|ax+by+cz\|^2\leqslant a\|x\|^2+b\|y\|^2+c\|z\|^2-abg(\|x-y\|),\quad\forall x,y\in B_r.$$

注 详见参考文献[38]，这一定理是定理 1.1.7 的推广. 在某种意义上说，定理 1.1.12 比定理 1.1.7 具有更广泛的应用性.

1.2 非线性算子的分类和性质

定义 1.2.1 设 E 是赋范空间 X 的非空子集，T：$E\to E$ 是一映象：

(1) 称 T 是非扩张的，如果对任意的 $x,y\in E$ 有
$$\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|;$$

(2) 称 T 是渐近非扩张的，如果存在数列$\{k_n\}\subset[1,\infty)$且$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得对任意的 x，$y\in E$ 有
$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|,\quad n\in\mathbf{N};$$

(3) 称 T 是渐近非扩张型的，如果对任何 $y\in E$，有
$$\limsup_{n\to\infty}\{\sup_{x\in E}(\|T^nx-T^ny\|^2-\|x-y\|^2)\}\leqslant0,$$
其等价形式为
$$\limsup_{n\to\infty}\{\sup_{x\in E}(\|T^nx-T^ny\|-\|x-y\|)\}\leqslant0;$$

(4) 称 T 是$(L-\alpha)$一致 Lipschitz 的，若存在常数 $L>0$ 和 $\alpha>0$，对任何 $x,y\in E$，都有

$$\| T^n x - T^n y \| \leqslant L \| x - y \|^{\alpha}.$$

定义 1.2.2　设 X 是实 Banach 空间，E 是 X 的非空子集，T：$E\to E$ 是一映象：

(1) 称 T 是增生的，如果 $\forall x,y\in E$，存在 $j_p(x-y)\in J_p(x-y)$使得

$$(Tx - Ty, j_p(x-y)) \geqslant 0;$$

(2) 称 T 是强增生的，如果 $\forall x,y\in E$，存在 $j_p(x-y)\in J_p(x-y)$使得

$$(Tx - Ty, j_p(x-y)) \geqslant k \| x-y \|^p, \quad k>0,$$

其中 k 为算子 T 的强增生常数.

定义 1.2.3　设 X 是实 Banach 空间，E 是 X 的非空子集，T：$E\to E$ 是一映象，I 是恒等算子：

(1) 称 T 是伪压缩的，如果 $\forall x,y\in E$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \| x-y \|^2.$$

应该指出的是，伪压缩映象等价于：若 $\forall x,y\in E$，对任意 $s>0$ 有

$$\| x-y \| \leqslant \| x-y+s[(I-T)x-(I-T)y] \|.$$

(2) 称 T 是强伪压缩的，如果存在常数 $k\in(0,1)$，对 $\forall x,y\in E$，及对某一个 $j(x-y)\in J(x-y)$有

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant k \| x-y \|^2.$$

需要指出的是，强伪压缩映象等价于：若于任意的 $x,y\in E$ 和 $s,r>0$ 有

$$\| x-y \| \leqslant \| (1+r)(x-y)+sr(Tx-Ty) \|.$$

特别的，当 $s=1$ 时，T 是伪压缩的。

(3) 称 T 是在 Browder-Petryshyn 意义下严格伪压缩的，如果存在常数 $\lambda\in(0,1)$，对 $\forall x,y\in E$，及对某一个 $j(x-y)\in J(x-y)$有

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \| x-y \|^2 - \lambda \| (I-T)x-(I-T)y \|^2.$$

此不等式等价于

$$\langle (I-T)x-(I-T)y, j(x-y)\rangle \geqslant k \| (I-T)x-(I-T)y \|^2.$$

定义 1.2.4　设 X 是实 Banach 空间，E 是 X 的非空子集，T：$E\to E$ 是一映象，Φ：$[0,\infty)\to[0,\infty)$是严格增函数且 $\Phi(0)=0$，$F(T)$表示算子 T 的不动点集：

(1) 称 T 是 Φ-伪压缩的，如果对任意的 $x,y\in E$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$，有

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \| x-y \|^2 - \Phi(\| x-y \|).$$

(2) 称 T 是 Φ-拟伪压缩的，如果对任意的 $x\in E$ 和 $p\in F(T)$，都存在 $j(x-p)\in J(x-p)$，有

$$\langle Tx - p, j(x-p)\rangle \leqslant \| x-p \|^2 - \Phi(\| x-p \|).$$

(3) 称 T 是 Φ-依次伪压缩的，如果对任意的 $x,y\in E$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$，都有

$$\langle T^n x - T^n y, j(x-y)\rangle \leqslant \| x-y \|^2 - \Phi(\| x-y \|).$$

(4) 称 T 是渐近 Φ-伪压缩的，如果对任意的 $x,y\in E$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$，都有

$$\langle T^n x - T^n y, j(x-y)\rangle \leqslant k_n \|x-y\|^2 - \Phi(\|x-y\|).$$

其中$\{k_n\}\subset[1,\infty)$且$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$.

(5) 称 T 是渐近 Φ-拟伪压缩的,若$\forall x\in E, p\in F(T)$,存在 $j(x-p)\in J(x-p)$使得

$$\langle T^n x - p, j(x-p)\rangle \leqslant k_n \|x-p\|^2 - \Phi(\|x-p\|).$$

其中$\{k_n\}\subset[1,\infty)$且$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$.

定义 1.2.5 设 E 是赋范空间 X 的子集,称映象 T: $E\to E$ 是半紧的,如果对 E 中任何满足$\|x_n-Tx_n\|\to 0(n\to\infty)$的有界序列$\{x_n\}$,都存在$\{x_n\}$的收敛子列$\{x_{n_k}\}$,即

$$x_{n_k}\to x^*\in E\quad(k\to\infty).$$

定义 1.2.6 设 E 是赋范空间 X 的非空凸子集,T: $E\to E$ 是一映象,称 T 满足条件(A′),如果存在非减函数 f: $[0,\infty)\to[0,\infty)$,满足 $f(0)=0$, $f(r)>0(r>0)$,有

$$\|x-Tx\|\geqslant f(d(x,F(T))),\quad x\in E,$$

其中 $d(x,F(T))=\inf\{\|x-p\|: p\in F(T)\}$.

这是研究非线性算子迭代序列收敛性的一个常用条件.

定义 1.2.7 设 X 是赋范空间,T: $X\to X$ 是一映象:

(1) 称 T 是 L-Lipschitz 的,如果存在非负常数 $L>0$,对任意的 $x,y\in X$ 有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant L\|x-y\|;$$

(2) 称 T 是一致 L-Lipschitz 的,如果存在非负常数 $L>0$,对任意的 $x,y\in X$ 有

$$\|T^n x-T^n y\|\leqslant L\|x-y\|,\quad n\geqslant 1;$$

(3) 称有限族算子$\{T_1,T_2,\cdots,T_N\}$是一致 L-Lipschitz 的,若存在非负常数 $L>0$,对任意的 $x,y\in X$,有

$$\|T_i^n x-T_i^n y\|\leqslant L\|x-y\|,\quad n\geqslant 1,\quad i\in\{1,2,\cdots,N\}.$$

显然,渐近非扩张映象一定是 Lipschitz 的.若每个算子都是一致 L-Lipschitz 的,则有限个算子族也是一致 L-Lipschitz 的.

定义 1.2.8 设 X 是赋范空间,T: $X\to X$ 是连续算子,称 T 是全连续算子,如果 T 将 X 的有界集映成列紧集.

定义 1.2.9 设 X 是赋范空间,C 是 X 的一个非空子集,记

$$P_C(x)=\{y\in C: \|x-y\|=d(x,C)\},\quad x\in X.$$

若对任意的 $x\in X$, $P_C(x)\neq\varnothing$,则称 C 是可逼近集(可迫近集);若 $x\in X$, $P_C(x)$是单点集,则称 C 是 Chebeshev 集,并称算子 P: $X\to C$ 是从 X 到 C 上的投影算子,其中点 $x\in X$ 到 X 的子集 C 的距离为

$$d(x,C)=\inf\{\|x-y\|: y\in C\}.$$

定义 1.2.10 设 H 是 Hilbert 空间,C 是 H 的一个非空子集,$\{T(t): t\geqslant 0\}$是 C 上的自身映象族,称$\{T(t): t\geqslant 0\}$是 C 上的非扩张半群,如果满足:

(1) 对任意的 $x\in C$, $T(0)x=x$;

(2) 对任意的 $s,t\geqslant 0$，$T(s+t)=T(s)T(t)$；

(3) 对每个 $x\in C$，映象 $t\mapsto T(t)x$ 是连续的；

(4) 对任意的 $x,y\in C$ 和 $t\geqslant 0$，$\|T(t)x-T(t)y\|\leqslant\|x-y\|$.

根据伪压缩、强伪压缩、增生和强增生的定义，显然有下面定理.

定理 1.2.1 设 X 是实 Banach 空间，E 是 X 的非空子集，T: $E\to E$ 是一映象，则

(1) T 是伪压缩的充要条件为 $I-T$ 是增生的；

(2) T 是强伪压缩的充要条件为 $I-T$ 是强增生的；

(3) T 是强伪压缩的，则 T 一定是 Lipschitz 的.

定理 1.2.2 设 X 是实 Banach 空间，T: $X\to 2^X$ 为集值强伪压缩对偶映象，则对任意的 $x,y\in X$，以及 $\forall u\in Tx$ 和 $v\in Ty$，存在 $j_p(x-y)\in J_p(x-y)$，有

$$\langle u-v,j_p(x-y)\rangle\leqslant(1-k)\ \|x-y\|^p,$$

其中 $k\in(0,1)$是算子 $I-T$ 的强增生常数.

证明 由于 T 是强伪压缩算子，则 $I-T$ 是强增生的，于是存在常数 $k\in(0,1)$，使得对任意的 $x,y\in X$，以及 $\forall u\in Tx$ 和 $v\in Ty$，都存在 $j_p(x-y)\in J_p(x-y)$，使得

$$\langle(I-T)x-(I-T)y,j_p(x-y)\rangle\geqslant k\ \|x-y\|^p.$$

由于

$$\begin{aligned}\langle(I-T)x-(I-T)y,j_p(x-y)\rangle&=\langle x-y-(Tx-Ty),j_p(x-y)\rangle\\&=\|x-y\|^p-\langle(Tx-Ty),j_p(x-y)\rangle,\end{aligned}$$

于是 $\forall u\in Tx$ 和 $v\in Ty$，存在 $j_p(x-y)\in J_p(x-y)$，使得

$$\langle u-v,j_p(x-y)\rangle\leqslant(1-k)\ \|x-y\|^p.$$

根据定理 1.2.2，很容易得到下面定理.

定理 1.2.3 设 X 是实 Banach 空间，T: $E\to E$ 是强伪压缩映象，则对任意的 $x,y\in X$，都存在 $j(x-y)\in J(x-y)$，使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant(1-k)\ \|x-y\|^2,$$

其中 $k\in(0,1)$是算子 $I-T$ 的强增生常数.

定理 1.2.4 关于可迫近(可逼近)集和 Chebyshev 集性质：

(1) 设 X 是赋范空间，X_n 是 X 的有限维子空间，则 X_n 是可迫近集；

(2) 设 X 是一致凸的 Banach 空间，M 是 X 的闭凸集，则 M 是 Chebyshev 集；

(3) 设 X 是严格凸的 Banach 空间，X_n 是 X 的有限维子空间，则 X_n 是 Chebyshev 集；

(4) 设 X 是自反的 Banach 空间，M 是 X 的闭凸集，则 M 是可迫近集；

(5) 设 X 是 Banach 空间，则 X 可自反的充要条件是 X 的任何闭凸集是可迫近集.

注 详见参考文献[2]，同时可获得更多的相关结论.

设 M 是 Banach 空间 X 的 Chebyshev 集，一般情况下，距离投影算子 P_M 不一定是线性的，例如：设 $M=\bar{B}_X$(X 的闭单位球)，则

$$P_M(x)=\begin{cases}x, & \|x\|\leqslant 1\\ x/\|x\|, & \|x\|>1\end{cases}$$

是非线性的,同时 P_M 也未必是连续的,但是有下面结论.

定理 1.2.5 投影算子的性质:

(1) 设 M 是一致凸的 Banach 空间 X 的闭凸集,则 P_M 是单值连续映象;

(2) X 是一致凸且一致光滑的 Banach 空间,M 是 X 的闭凸集,则 P_M 在 X 上的任意有界集上是一致连续的.

注 定理 1.2.4 和定理 1.2.5 的证明过程见参考文献[1].

定理 1.2.6 设 X 是一致凸的 Banach 空间,E 是非空有界闭凸集,T: $E\to E$ 是非扩张映象,则 T 有不动点.

注 详见参考文献[10].这是一个很重要的结论,在一致凸的 Banach 空间框架下,可以确保非扩张算子存在不动点.

定理 1.2.7[11] 设 X 是一致凸的 Banach 空间,E 是 X 的非空闭凸子集,T: $E\to E$ 是渐近非扩张映象,则算子 $I-T$ 半闭于 0,即对 E 中每一个序列$\{x_n\}$,若$\{x_n\}$弱收敛于 $q\in E$,$\{(I-T)x_n\}$强收敛于 0,则$(I-T)q=0$.

1.3 非线性算子的迭代程序

非线性算子的迭代理论中有三个基本问题:迭代程序、空间性质、算子类型.在这三个问题中,中心问题是迭代算法.因为任何空间、任何算子都可以考虑在给定迭代程序所生成的序列的收敛性问题.

常见的非线性算子的迭代程序有以下几种.

定义 1.3.1 设 X 是实 Banach 空间,E 是 X 的非空凸子集,T: $E\to E$ 是非线性算子,$x_1\in E$ 是给定的初始点:

(1) 称由迭代程序

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Tx_n,\quad n\geqslant 1 \tag{1.3.1}$$

生成(定义)的序列$\{x_n\}$为 Mann 迭代序列,其中$\{\alpha_n\}$是[0,1]上的数列.

(2) 称由迭代程序

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n\end{cases},\quad n\geqslant 1 \tag{1.3.2}$$

生成(定义)的序列$\{x_n\}$为 Ishikawa 迭代序列,其中$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$是[0,1]上的两个数列.