第 1 章

函　　数

基本要求

1. 理解函数的概念，会建立简单应用问题的函数.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 掌握复合函数及分段函数的概念，理解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及图像，了解初等函数的概念.

5. 理解函数的参数方程、极坐标方程，掌握直角坐标与极坐标的转化.

6. 了解复数的运算，复数的三种表示形式（代数形式、指数形式、三角形式），并会相互转化.

内容提要

一、函数

1. **函数的定义**　设数集 D 是一非空数集，若按照某一对应法则 f，对于 D 内每个数 x 都有唯一确定的数 y 与之对应，则称 f **是定义在 D 上的一元函数**，简称为**函数**，记做 $y=f(x), x\in D$，其中 D 称为函数 f 的**定义域**，记做 D_f，$R=\{y\,|\,y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**，记做 R_f.

2. **反函数**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，若对任意的 $y\in R_f$，有唯一确定的 $x\in D_f$ 满足 $f(x)=y$，则 x 是定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数，记做 $x=f^{-1}(y)$，并称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的**反函数**.

3. **复合函数**　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，若集合 $D=\{x\,|\,\varphi(x)\in D_f, x\in D_\varphi\}\neq\varnothing$，则由 $y=f[\varphi(x)], x\in D$ 确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. 通常称 $y=f(u)$ 为**外层函数**，$u=\varphi(x)$ 是**内层函数**，u 为**中间变量**.

4. **基本初等函数**　常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

5. **初等函数** 基本初等函数经过有限次四则运算和复合所生成的函数.

6. **参数方程** 若变量 y 与 x 之间的函数关系通过方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 确定,则称其为参数方程,变量 t 称为**参数**.

7. 在平面内取一个定点,叫做**极点**;自极点 O 引一条射线 Ox,叫做**极轴**;再选定一个长度单位、一个角度单位(通常用弧度)及其正方向(通常取逆时针方向).这样就建立了一个**极坐标系**.如图 1-1:设 M 是平面内一点,极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的**极径**,记为 $r(r\geqslant 0)$;以极轴 Ox 为始边,射线 OM 为终边的$\angle xOM$ 叫做点 M 的**极角**,记为 θ;有序实数对(r,θ)叫做点 M 的**极坐标**,记为 $M(r,\theta)$.

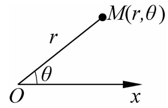

图 1-1

8. 直角坐标与极坐标互化公式 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 与 $\begin{cases} r^2=x^2+y^2, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$

二、复数

1. **复数的概念** 引入一个新数 i 叫做虚数单位,并规定:

(1) $\mathrm{i}^2=-1$;

(2) 实数可以与它进行四则运算,原有的运算法则仍然成立.

称形如 $z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbf{R})$ 的数叫**复数**,实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,记为 $x=\mathrm{Re}z,y=\mathrm{Im}z$.全体复数的集合称为**复数集**,记为 **C**.虚部为零的复数是实数,即实数集是复数集的真子集.虚部不为零的复数称为**虚数**,实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**.称复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 互为**共轭复数**,复数 z 的共轭复数记为$\bar{z}$,即

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y} \quad 或 \quad x+\mathrm{i}y=\overline{x-\mathrm{i}y}.$$

2. **复数的运算** 设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,那么

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$;

(2) 两个复数相乘,按多项式乘法法则进行,其中 $\mathrm{i}^2=-1$,即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1);$$

(3) 若 $z_2\neq 0$,对于$\dfrac{z_1}{z_2}$,分子分母同乘以分母的共轭复数,再进行化简,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad z_2\neq 0.$$

全体复数引入上述运算后就称为**复数域**.与实数域不同,复数域中不能规定复数的大小.

3. **复数的表示形式** 利用直角坐标与极坐标的关系及欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,复数有以下三种表示形式:

代数形式 $z=x+\mathrm{i}y$;

三角形式　$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$；

指数形式　$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

例题选讲

例 1　求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln\cos x}$；　（2）$y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

解　（1）只有 $\sqrt{4-x^2}$ 与 $\ln\cos x$ 同时有意义，且分母不为 0 时的 x 才是定义域内的点，即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.\\ x\neq 2n\pi,\end{cases}$$

上述不等式的解为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，即函数的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（2）只有当 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$，$\sqrt{2x-x^2}$，$\ln(2x-1)$ 同时有意义，且分母不为 0 时的 x 才是定义域内的点，即

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\ 2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8,\\ x(x-2)\leqslant 0,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1.\end{cases}$$

上述不等式的解为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$，即函数的定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

例 2　判别下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；（2）$f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，$F(x)$ 为偶函数.

解　（1）当我们遇到 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 或 $a\pm\sqrt{b}$ 时，考虑分子或分母有理化，有

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

（2）令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，那么

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}.$$

显然 $g(x)+g(-x)=0$,即 $g(x)$为奇函数.由于 $F(x)$为偶函数,所以 $f(x)$是奇函数.

例 3 试把下列函数分解成基本初等函数的四则运算与复合.

(1) $y=\dfrac{e^{x^2}-\ln(x^4+1)}{\sin^3 x}$; (2) $y=\arcsin\left(a^{x^3}\sqrt{x^2+5}\right)$;

解 (1) $y=\dfrac{e^u-\ln v}{w^3}$,$u=x^2$,$v=x^4+1$,$w=\sin x$.

(2) $y=\arcsin u$;其中 $u=v\cdot w$;$v=a^{v_1}$,$v_1=x^3$;$w=\sqrt{w_1}$,$w_1=x^2+5$.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 由函数 $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2\end{cases}$ 的图像易得

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}],\\ 0, & x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty).\end{cases}$$

例 5 设 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}(x\neq 0,a^2\neq b^2)$,求 $f(x)$.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$,则 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$. 令 $t=x$,得 $af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$. 与原式联立解得 $f(x)=\dfrac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\dfrac{a}{x}\right)$.

例 6 若 $z=e^{it}$,试证:$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$;$z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$,其中 n 为正整数.

解 $z^n+\dfrac{1}{z^n}=e^{int}+e^{-int}=\cos nt+i\sin nt+\cos(-nt)+i\sin(-nt)=2\cos nt$;

$z^n-\dfrac{1}{z^n}=e^{int}-e^{-int}=\cos nt+i\sin nt-\cos(-nt)-i\sin(-nt)=2i\sin nt$.

习题解答

复习题一

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$; (2) $y=\sqrt{x^2-9}$;

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$; (4) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$.

解　(1) 由 $x+2\neq 0$ 得 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$；

(2) 由 $x^2-9\geqslant 0$ 得 $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$；

(3) 由 $x^2\neq 1, x+1\geqslant 0$ 得 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(4) 由 $[x+1]\neq 0$ 得 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

2. 下列各对函数中哪些相同，哪些不同？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}, g(x)=1$；　　(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1, g(x)=\cos^2 x+\sin^2 x$；　(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　(1) 不同(定义域不同)；(2) 不同(值域不同)；(3) 相同；(4) 不同(定义域不同).

3. 下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=x+x^2-x^3$；　　(2) $y=a+b\cos x$；

(3) $y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$；　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　(1) 非奇非偶；(2) 偶；(3) 奇(分子有理化)；(4) 偶.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$；　　(2) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\sin[\lg(x^2+1)]$；　　(4) $y=\arcsin^2\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解　(1) $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=x^2+1$；　(2) $y=2^u, u=v^2, v=\sin\omega, \omega=\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\sin u, u=\lg v, v=x^2+1$；　　(4) $y=u^2, u=\arcsin v, v=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数，且 $f(1)=a$，对任何 x 值都有

$$f(x+2)-f(x)=f(2).$$

(1) 用 a 表示 $f(2)$ 和 $f(5)$；

(2) 问 a 取何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解　(1) 将 $x=-1$ 代入 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 得 $f(1)-f(-1)=f(2)$；由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数，所以 $-f(-1)=f(1)=a$，即 $f(2)=2a$.

将 $x=3$ 代入 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 得 $f(5)-f(3)=f(2)$，将 $x=1$ 代入 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 得 $f(3)-f(1)=f(2)$，所以 $f(5)=2f(2)+f(1)=5a$.

(2) 若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，则 $f(x+2)-f(x)=0=f(2)=2a$，所以 $a=0$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解　由函数 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2\end{cases}$ 的图像易得

$$f[f(x)]=\begin{cases}4-(4-x^2)^2, & -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2},\\ 0, & -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant \sqrt{2},\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2,\\ 4, & |x|>2.\end{cases}$$

7．求下列函数的反函数及反函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；（2）$y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}(x\geqslant 0)$；

（3）$y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$；（4）$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty.\end{cases}$

解　（1）由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $2^x(y-1)=-y$，所以 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，即反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$ $(0<x<1)$；

（2）由 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}(x\geqslant 0)$ 得 $\dfrac{x-1}{x+1}=\arcsin\dfrac{y-1}{2}$，所以 $x=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{y-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}}$，即反函数为 $y=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{x-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$，$1-2\sin 1\leqslant x<1+2\sin 1$；

（3）由 $y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 得 $x^2=1-y$，因为 $x<0$，所以 $x=-\sqrt{1-y}$，即反函数为 $y=-\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$；

（4）由 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 得 $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$ 所以反函数为

$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

8．设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

解　$f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$，　$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=\dfrac{1}{1-(1-x^2)^2}=\dfrac{1}{x^2(2-x^2)}$.

9．设 $z=\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，求 $|z|$ 及 $\mathrm{Arg}z$.

解　$|z|=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$，$\mathrm{Arg}z=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

10. 设 $z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，试用指数形式表示 $z_1\cdot z_2$ 及 $\frac{z_1}{z_2}$.

解　$z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，$z_2=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$，所以 $z_1\cdot z_2=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}}$.

自测题

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $f(x)=\arcsin\frac{3x}{x+1}$；　　(2) $f(x)=\log_{(x-1)}(16-x^2)$；

(3) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{1-x^2}$；　　(4) $f(x)=\arccos(1-x)+\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2. 下列各对函数中哪些相同，哪些不同？

(1) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$；　　(2) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$ 与 $g(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-5}}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$；　(4) $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$ 与 $g(x)=x$.

3. 下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=\arctan(\sin x)$；　　(2) $f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\sin x$；

(3) $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^x+1}$；　　(4) $f(x)=x^3+|\sin x|$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^5\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}$；　　(2) $y=3^{\ln(x^2+5)}$；

(3) $y=\arctan[\lg(x^2+1)]$；　　(4) $y=\sqrt{\tan\frac{x+1}{2}}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

6. 求 $y=\frac{1-\sqrt{4x+1}}{1+\sqrt{4x+1}}$ 的反函数及反函数的定义域.

7. 设 $f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，$0<x<1$，求 $f(x)$.

8. 将复数 $\frac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)^2}{(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)^3}$ 化为指数形式和三角形式.

9. 设 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^n$（$x_n,y_n$ 为实数，n 为正整数）. 试证 $x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n=4^{n-1}\sqrt{3}$.

第 2 章

极限与连续

基本要求

1. 理解函数极限与数列极限的定义.

2. 理解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

3. 理解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的比较方法,了解无穷大的概念,掌握无穷大与无穷小的关系.

4. 理解一元函数连续点及区间上连续的定义,会判别函数间断点的类型.

5. 了解连续函数的性质及初等函数的连续性,掌握利用初等函数的连续性求极限的方法.

6. 能正确叙述和简单应用闭区间上连续函数的性质.

7. 总结学过的求极限的方法并能灵活应用这些方法求极限.

内容提要

一、极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$;$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. 将数列$\{x_n\}$看作整标函数$x_n=f(n)$,即定义域为正整数集的函数,以上七种形式的极限有如下的统一定义:

$\forall\varepsilon>0$,∃时刻,在此时刻之后,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 见下表:

过程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
∃时刻	$X>0$				$\delta>0$		
此时刻之后	$n>X$	$\|x\|>X$	$x>X$	$x<-X$	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$						

二、有界函数、有界变量、无穷小与无穷大

1. **有界函数与无界函数**　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若

$$\exists M>0, \forall x\in I，总有 |f(x)|\leqslant M(或 |f(x)|<M),$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是**有界函数**，或称函数 $f(x)$**在区间 I 上有界**；否则若对

$$\forall M>0, \exists x_0\in I，使得 |f(x_0)|>M,$$

则称 $f(x)$**在区间 I 上是无界函数**，或称**函数 $f(x)$在区间 I 上无界**.

2. **有界变量**　指在自变量的某一变化过程中变量有界，即 $\exists M>0$，$\exists$时刻，在此时刻之后，恒有$|f(x)|<M$. 见下表：

过程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
$\exists$时刻	$X>0$				$\delta>0$		
此时刻之后	$n>X$	$\lvert x\rvert>X$	$x>X$	$x<-X$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)\rvert<M$						

说明　由于数列作为整标函数其定义域为正整数集，比 X 小的正整数只有有限个，所以若数列是有界变量，则一定是有界函数. 对于一般的函数，有界变量未必是有界函数. 例如 $y=x^2$ 在 $x\to1$ 时是有界变量但不是有界函数.

3. **无穷小**　在自变量的某一变化过程中，以零为极限的变量称为无穷小.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$时刻，在此时刻之后，恒有$|f(x)|<\varepsilon$. 见下表：

过程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
$\exists$时刻	$X>0$				$\delta>0$		
此时刻之后	$n>X$	$\lvert x\rvert>X$	$x>X$	$x<-X$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)\rvert<\varepsilon$						

4. **无穷大**　在自变量的某一变化过程中，绝对值无限增大的变量称为无穷大.

$\forall M>0$，$\exists$时刻，在此时刻之后，恒有$|f(x)|>M$. 见下表：

过程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
$\exists$时刻	$X>0$				$\delta>0$		
此时刻之后	$n>X$	$\lvert x\rvert>X$	$x>X$	$x<-X$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)\rvert>M$						

三、函数的连续性与间断点

1. **连续点**　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0 \text{ 或 } \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

就称函数 $y=f(x)$**在点** x_0 **处连续**.

2. **区间上连续** 若函数 $y=f(x)$在区间 I 上每一点都连续，则称 $f(x)$**在区间** $\boldsymbol{I}$ **上连续**，或称函数 $f(x)$**为区间** $\boldsymbol{I}$ **上的连续函数**. 若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在右端点 b 处左连续，左端点 a 处右连续，则称 $f(x)$**在闭区间**$[a,b]$**上连续**.

3. **间断点** 若点 x_0 不是 $y=f(x)$的连续点则称其为 $y=f(x)$的间断点.

间断点的类型：

第一类间断点 在 x_0 点左、右极限都存在，其中

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在但不等于 $f(x_0)$，称 $x=x_0$ 为**可去间断点**.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，称 $x=x_0$ 为**跳跃间断点**.

第二类间断点 不是第一类间断点的间断点. 无穷间断点和振荡间断点是第二类间断点.

四、重要的定理与公式

1. **极限的性质** 唯一性、局部有界性、局部保号性、函数极限与数列极限的关系、极限与无穷小的关系.

2. **极限的运算** 极限的四则运算法则中参加运算的函数（或数列）的极限必须都存在且分母的极限不为 0.

3. **夹逼准则.**

4. **单调有界原理** 单调有界数列极限必存在.

5. **等价无穷小的替换** 求极限时，对函数的因子作等价无穷小替换，可简化计算过程，极限值不变. 但对因子中的某个代数和中的项作等价无穷小的代换，则可能出错. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0,$$

正确的方法是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

常用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim(\mathrm{e}^x-1)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x},$$

$$a^x-1\sim x\ln a,(1+x)^a-1\sim ax\,(a\neq 0),1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.$$

6. **初等函数的连续性** 初等函数在其定义域的区间内连续.

7. **闭区间上连续函数的性质** 最值定理、零点定理、介值定理.