第3章

动量与角动量

牛顿第二定律描述力对物体的瞬时作用规律，但是日常生活中，力对物体的作用往往是持续的，这个持续的作用效果可能更有意义。当一个物体发生转动时，用力矩和角动量等概念来描述物体的运动则更为方便。本章我们将学习力和力矩对时间的累积效应，对质点和质点系的动量定理和角动量定理进行研究和讨论，并得到相应的动量守恒定律和角动量守恒定律。

3.1 力的冲量与质点的动量定理

由牛顿第二定律的微分形式$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$，可得

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p} \tag{3.1}$$

从 t_1 到 t_2 积分可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1 \tag{3.2}$$

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$ 表示合力$\vec{F}$(此处一般称为冲力)在 t_1 到 t_2 这段时间内的累积，称为合力的冲量，通常记作$\vec{I}$，即

$$\vec{I}=\vec{p}_2-\vec{p}_1 \tag{3.3}$$

其中，$\vec{p}_1$ 和$\vec{p}_2$ 分别代表质点在 t_1 和 t_2 时刻的动量。式(3.3)表明，质点在 t_1 至 t_2 时间间隔内所受合力的冲量等于在这段时间间隔内该质点动量的增量。这一结论称作质点的动量定理。式(3.1)和式(3.2)分别为动量定理的微分形式和积分形式。动量定理是矢量式，可写成如下分量式形式：

$$\begin{cases}I_x=p_{2x}-p_{1x}\\I_y=p_{2y}-p_{1y}\\I_z=p_{2z}-p_{1z}\end{cases} \tag{3.4}$$

动量定理是由牛顿第二定律导出的，其适用范围也仅限于惯性系。

用动量定理解决问题的优越性在于，我们不必关注质点在整个过程中所受合力的变化细节，只要力的冲量相同就会产生相同的动量的增量。这在解决合力随时间剧烈变化的问

题，如碰撞问题时非常方便。此时，常引入平均力的概念

$$\bar{\vec{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{t_2-t_1} \tag{3.5}$$

$\bar{\vec{F}}$即平均力。式(3.5)表明，作用在质点上的平均力等于质点动量的增量与力的作用时间之比。

例 3.1　铁匠打铁时将铁锤抬起到 $h_1=1.0\mathrm{m}$ 的高度后让其自由落下，铁锤与铁砧上的工件碰撞后弹起到 $h_2=5.0\mathrm{cm}$ 高度处。铁锤质量 $m=5.0\mathrm{kg}$，作用时间为 $\Delta t=0.02\mathrm{s}$，求重锤对工件的平均作用力。

解　设竖直向上为正方向，此问题为一维问题，可简单地用正、负号表示其方向。根据式(3.5)知道，欲求平均作用力，必须先求得始、末状态的动量差，碰撞过程初始时刻的动量即铁锤质量与其从高度 h_1 处自由下落的末速度的乘积

$$p_1=-m\sqrt{2gh_1}$$

碰撞后的动量即铁锤质量与铁锤弹起到 h_2 高度的初速度的乘积

$$p_2=m\sqrt{2gh_2}$$

铁锤对工件的平均冲力与工件对铁锤的作用力是一对作用、反作用力，用$\bar{f}'$表示工件对铁锤的平均作用力，有

$$\bar{f}'=\frac{p_2-p_1}{\Delta t}=\frac{m\sqrt{2g}(\sqrt{h_2}+\sqrt{h_1})}{\Delta t}=\frac{5.0\times\sqrt{2\times9.8}\times(\sqrt{0.05}+\sqrt{1.0})}{0.02}=1.35\times10^3\mathrm{N}$$

则铁锤对工件的平均冲力$\bar{f}$为

$$\bar{f}=-\bar{f}'=-1.35\times10^3\mathrm{N}$$

其中包括铁锤重力 $mg=-49\mathrm{N}$，与冲力相比，重力为一可忽略的小量。通常在处理这类碰撞问题时，往往忽略重力的作用。

例 3.2　力$\vec{F}=12t^2\vec{i}$作用在质量 $m=1.0\mathrm{kg}$ 的物体上，使之从静止开始运动，求物体在 2s 末的动量。

解　由动量定理，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\vec{p}_2$$

代入力的表达式有

$$\vec{p}_2=\int_0^2 12t^2\vec{i}\mathrm{d}t=4t^3\Big|_0^2\vec{i}=32\vec{i}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

例 3.3　一人用力$\vec{F}=12\vec{i}\,\mathrm{N}$持续推一放置在水平面上的木箱 2s，但木箱没被推动，请问此力的冲量是多少？既然作用到木箱上的力的冲量不为零，为什么木箱的动量没有变化呢？

解　力的冲量为

$$\vec{I}=\vec{F}\times\Delta t=24\vec{i}\,\mathrm{N\cdot s}$$

质点的动量定理是对质点所受合力而言的，这里作用到木箱上的力$\vec{F}=12\vec{i}\,\mathrm{N}$不是合力，其与地面作用到木箱上的摩擦力大小相等而方向相反，故木箱所受合力为零，所以动量不会改变。

3.2　质点系的动量定理与动量守恒定律

在一个问题中，如果我们的研究对象包含 N 个相互作用的质点，则这 N 个质点所组成的系统称为质点系。质点系内质点之间的相互作用叫做内力，质点系外物体对系统内质点

的作用力称为外力。现在我们就来讨论质点系的动量定理。

3.2.1 质点系的动量定理

N 个质点组成的质点系如图 3.1 所示,其中 m_i、m_j 分别为第 i、j 两个质点的质量,$\vec{F}_i$、$\vec{F}_j$ 分别为第 i、j 两个质点所受的合外力,$\vec{f}_{ij}$、$\vec{f}_{ji}$ 分别为第 i、j 两个质点之间相互作用的内力,它们互为作用力反作用力,是一对力,$\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$。

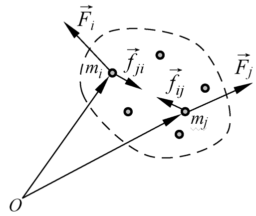

图 3.1 质点系

对第 i 个质点应用动量定理有

$$\vec{F}_i+\sum_{j(j\neq i)}\vec{f}_{ji}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \tag{3.6}$$

其中 $\sum\limits_{j(j\neq i)}\vec{f}_{ji}$ 是质点系中其他质点作用到第 i 个质点上的合内力。对式(3.6)中的下标 i 求和,就可以得到质点系的动量定理,即

$$\sum_i\vec{F}_i+\sum_{i,j(j\neq i)}\vec{f}_{ji}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\vec{p}_i \tag{3.7}$$

在质点系中内力总是成对出现的,因此

$$\sum_{i,j(j\neq i)}\vec{f}_{ji}=\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}+\vec{f}_{13}+\vec{f}_{31}+\cdots=0$$

$\vec{F}_{\text{ext}}=\sum\limits_i\vec{F}_i$ 为质点系所受合外力,$\vec{p}_{\text{total}}=\sum\limits_i\vec{p}_i$ 为质点系的总动量,则式(3.7)可表示为

$$\vec{F}_{\text{ext}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,\vec{p}_{\text{total}} \tag{3.8}$$

上式表明,在惯性系中,质点系所受的合外力$\vec{F}_{\text{ext}}$在 $\mathrm{d}t$ 时间内的积累等于该系统的总动量的增量 $\mathrm{d}\,\vec{p}_{\text{total}}$,该式是质点系动量定理的微分形式。若求质点系所受的合外力在一段时间($t_1\sim t_2$)内积累所引起的系统总动量的变化,只需对式(3.8)积分,即可得质点系动量定理的积分形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{\text{ext}}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1 \tag{3.9}$$

需要注意的是对于质点来说,$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{\text{ext}}\mathrm{d}t$ 表示合力的冲量。内力不改变系统的总动量。

3.2.2 质点系的动量守恒定律

如果式(3.8)中的合外力$\vec{F}_{\text{ext}}$为零,则

$$\mathrm{d}\,\vec{p}_{\text{total}}=0,\quad \vec{p}=\text{常矢量} \tag{3.10}$$

上式表明,当一个质点系所受合外力为零时,其总动量保持不变。这一结论称作动量守恒定律。它只适用于惯性系。如果作用于质点系的合外力不为零,但沿某一方向的分量为零,则质点系在该方向的动量守恒。

要特别注意：动量守恒定律是由牛顿第二定律推导出来的，但不能认为它就是牛顿定律的推论。实际上动量守恒定律是自然界普适的定律之一。

动量守恒定律满足的条件是质点系所受合外力为零，但当外力远远小于内力的情况下，且经历时间很短时，外力对系统的冲量很小，引起的动量变化也很小，这时可以认为近似满足动量守恒条件。我们常见的烟花在空中炸开时呈现球形就是动量近似守恒的实例。烟花升到空中，速度越来越小，达到最高点时速度为零。此时烟花只受重力作用，若此时发生爆炸，由于爆炸时间很短，且爆炸的内力远远大于其所受的外力，即重力，所以近似满足动量守恒条件。其初动量为零，则炸开的烟花必须成辐射状散开才满足动量之和为零，所以烟花呈球形。

一个不受外界影响的孤立系统的总动量一定守恒。

例 3.4　如图 3.2 所示，一火箭在外层高空水平飞行，开始时质量为 m_1，速度为 v_1。由于火箭不断地向外喷射气体而加速，到燃料烧尽时其质量为 m_2，速度为 v_2。试求速度与质量的关系。

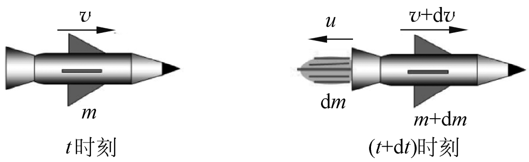

图 3.2　例 3.4 用图

解　因为火箭在外层高空水平飞行，其所受空气阻力和重力都可忽略不计。设 t 时刻火箭的质量为 m，速度为 v，在 $\mathrm{d}t$ 时间内火箭喷出的气体质量为 $\mathrm{d}m$，设燃气相对于火箭的喷射速度 u 为一常矢量，则根据动量守恒，有

$$\mathrm{d}m(-u+v+\mathrm{d}v)+(m-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)=mv$$

整理上式且忽略二阶小量 $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$，可得

$$\mathrm{d}v=-u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

对上式积分可得

$$\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}v=-u\int_{m_1}^{m_2}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

即

$$v_2-v_1=-u\ln\frac{m_2}{m_1}=u\ln\frac{m_1}{m_2}$$

此式表示火箭的质量由 m_1 减小至 m_2 时，其速度由 v_1 增加至 v_2。上式表明要想提高火箭的飞行速度，一种方法是提高燃气相对于火箭的喷射速度，另一种方法是提高火箭携带燃料与自身的质量比。

3.3　质心与质心运动定理

一位跳水运动员从跳台起跳后，身体在空中将不断作出复杂的屈体旋转的动作，如图 3.3 所示。但仔细观察，我们会发现，运动员身上有一个特殊点，它的运动轨迹是一条抛物线。这个特殊点就是运动员的质量中心，简称质心。长柄手榴弹在士兵投掷后，弹体绕质心作旋转运动，而质心作的是抛体运动。在研究多个质点组成的系统时，质心是个很重要的概念。

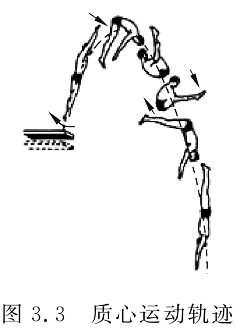

图 3.3　质心运动轨迹

3.3.1 质心

设一个质点系由 N 个质点组成,各质点的质量分别为 m_1、m_2、…、m_N,相对坐标原点的位矢分别为 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、…、$\vec{r}_N$,如图 3.4 所示,则质心位矢的定义为

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{3.11}$$

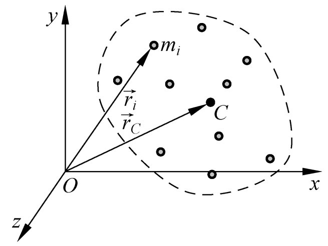

图 3.4 质心的位置矢量

其中 $m = \sum_i m_i$ 为质点系的总质量。将质心位矢在直角坐标系中写成分量形式为

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \tag{3.12}$$

由此可以看出,质心坐标是对系统内质点坐标以质量为权重取平均的结果。

对于一个质量连续分布的物体,求质心位置时,只需将上式求和改成积分运算即可,即

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m} \tag{3.13}$$

其在直角坐标系中的分量形式为

$$x_C = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{m}, \quad y_C = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m}, \quad z_C = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{m} \tag{3.14}$$

对于质心需要注意以下两点:

(1) 质心的位置不依赖于坐标系的选取。

(2) 质心不同于重心,不能把二者混为一谈。如果一个物体初速度为零,一个通过质心的力作用到该物体上,则该物体只作平动,不会发生转动,就好像物体的质量全部集中在质心上一样。一个物体的重心是地球对物体各部分引力的合力的作用点。两者定义不同,物体的重心和质心的位置也不一定重合。

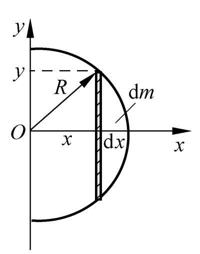

图 3.5 例 3.5 用图

例 3.5 求半圆形均匀薄板的质心。

解 因为薄板均匀,由对称性分析可知质心一定在 x 轴上,设薄板质量为 m,半径为 R,如图 3.5 所示,则质心坐标 x_C 为

$$x_C = \frac{1}{m}\int x\,\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int_0^R x \cdot \frac{m}{\pi R^2/2} \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4R}{3\pi}$$

即质心在 $\left(\frac{4R}{3\pi}, 0\right)$ 点处。

3.3.2 质心运动定理

将式(3.11)对时间求导数可得质心的运动速度

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} \tag{3.15}$$

则

$$\vec{p} = m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{3.16}$$

其中$\vec{p}$为质点系的总动量，它等于质点系的总质量与其质心速度的乘积。将上式再对时间求导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_C$$

上式中$\vec{a}_C$即质点系质心的加速度。根据牛顿第二定律，可得

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_C \tag{3.17}$$

该式称为质心运动定理。它表明，一个质点系质心的运动相当于一个质点的运动，该质点的质量等于质点系的总质量，所受的力是作用于质点系的合外力，内力不影响质心的运动。

例 3.6　一滑块置于光滑水平面上，滑块质量为 M，其上有一半径为 R 的$\frac{1}{4}$圆弧，如图 3.6 所示。t_1 时刻质量为 m 的小球静止于圆弧的最高点，之后开始下滑，t_2 时刻滑到圆弧的最低点，求 t_1 到 t_2 这段时间内滑块移动的距离 S。

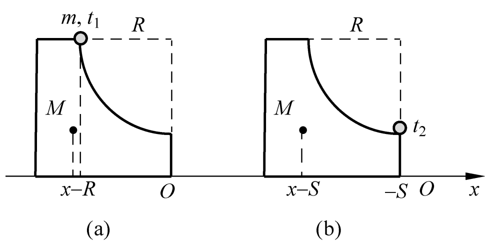

图 3.6　例 3.6 用图

解　建立坐标系如图 3.6 所示，选 M 和 m 组成的系统为研究对象，系统在水平方向的合外力为零，则质心在 x 轴方向静止不动。设 t_1 时刻滑块和小球的质心在水平方向的坐标分别为 x 和 $-R$，t_2 时刻两坐标分别为 $x-S$ 和 $-S$，则 t_1 时刻系统的质心在水平方向的坐标为

$$x_1 = \frac{Mx - mR}{M + m}$$

t_1 时刻系统的质心在水平方向的坐标为

$$x_2 = \frac{M(x - S) - mS}{M + m}$$

因为水平方向上系统的质心静止不动，所以一定有 $x_1 = x_2$，解出滑块移动的距离 S 为

$$S = \frac{m}{M + m}R$$

由本题的解题过程可以看出，系统内各质点的运动可能很复杂，但是质心的运动相对简单，只由作用在系统上的合外力决定。质心在系统中处于重要地位，它的运动描述了系统整体的运动趋势。质心是质点系平动特征的代表点。

3.4 质点的角动量与角动量定理

前面我们用动量来描述质点的运动,但有些时候用动量描述质点的运动并不方便,例如作匀速圆周运动的小球,由于其速度方向时刻在改变,其动量也时刻在改变,但其相对于圆心的运动方式却是恒定不变的,这里引入一个新的物理量——角动量来描述小球的运动。

3.4.1 质点的角动量

如图 3.7 所示,一个动量为$\vec{p}=m\vec{v}$的质点相对于惯性参照系中某一固定点 O 的角动量定义为

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v} \tag{3.18}$$

式中,$\vec{r}$是质点相对于固定点的位矢。根据矢积的定义,角动量的大小可表示为

$$L=rp\sin\theta=rmv\sin\theta$$

θ 为位矢$\vec{r}$与质点动量$\vec{p}$之间小于 180°的夹角。角动量矢量垂直于由$\vec{r}$和$\vec{p}$确定的平面,方向可由右手螺旋定则确定:右手四指由$\vec{r}$经小于 180°的角转向$\vec{p}$,则与四指垂直的拇指的指向即是角动量$\vec{L}$的方向。

式(3.16)说明,质点的角动量是跟其相对于某点的位矢有关的,因而取决于固定点位置的选择。因此,在说明一个质点的角动量时,必须指明是对哪一个固定点而说的。

图 3.8 所示为一绕固定点 O 作圆周运动的质点。质点相对于 O 点的角动量大小为

$$L=rmv=mr^2\omega \tag{3.19}$$

$\vec{L}$垂直于圆周平面向上。式中 ω 为质点作圆周运动的角速度。如果 ω 为常量,则$\vec{L}$为常矢量,即作匀速率圆周运动的质点相对于圆心的角动量不变。相比之下,用角动量描述圆周运动比用动量要简单得多。

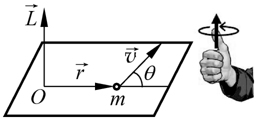

图 3.7 质点相对于固定点的角动量

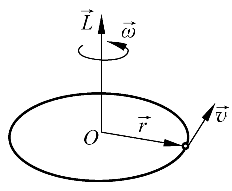

图 3.8 作圆周运动的质点相对于圆心的角动量

例 3.7 一动量为$\vec{p}=m\vec{v}$的质点作匀速直线运动,如图 3.9 所示,请给出质点相对于 O 点和 O'点的角动量。

解 相对于 O 点,质点的位矢$\vec{r}$与质点动量$\vec{P}$之间的夹角为零,所以角动量也为零。

相对于 O'点,质点角动量的大小为

$$L=rmv\sin\theta=mvd$$

方向垂直于纸面向里,即⊗。

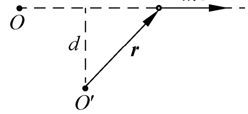

图 3.9 例 3.7 用图

3.4.2　力矩　角冲量和质点的角动量定理

在惯性系中，质点的动量定理给出质点动量对时间的变化率是由质点所受合外力决定的，那么，导致角动量的变化将会是什么因素呢？我们将质点角动量对时间求导数后，可得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

式中$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\vec{v}\times m\vec{v}=0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}\tag{3.20}$$

上式中$\vec{r}\times\vec{F}$为合外力对固定点的力矩，以$\vec{M}$表示，即

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}\tag{3.21}$$

因此，式(3.20)可以写成

$$\vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}\tag{3.22}$$

这是质点角动量定理的微分形式。其物理意义是：作用于质点上的力矩对时间的积累，一般称为角冲量或冲量矩，等于这段时间内质点角动量的增量；式(3.22)还可以写为$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$，其意义还可理解为质点对任一固定点的角动量随时间的变化率，等于该质点所受合力对该固定点的力矩。

图 3.10 为力矩示意图。力矩的方向依然可以用右手螺旋定则确定，力矩的大小可表示为

$$M=rF\sin\theta=r_{\perp}F\tag{3.23}$$

其中，$r\sin\theta=r_{\perp}$即中学所学的力臂。因为力矩与位置矢量$\vec{r}$有关，所以力矩也是对某一固定点而言的。在同一问题中，力矩$\vec{M}$和角动量$\vec{L}$是对惯性系中同一固定点定义的。

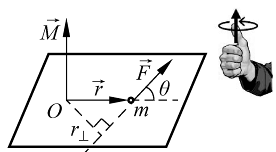

图 3.10　质点相对于固定点的力矩

例 3.8　如图 3.11 所示，$t=0$ 时刻质量为 m 的小球以初速度 $v_0\vec{i}$ 由图中 A 点水平抛出，不考虑空气阻力，求任意时刻 t 小球所受的对原点 O 的力矩和角动量。

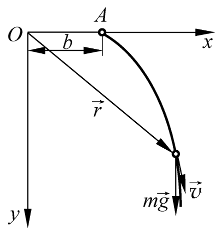

图 3.11　例 3.8 用图

解　小球在任意时刻 t 的位置矢量$\vec{r}$为

$$\vec{r}=(b+v_0t)\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$

小球只受重力 $mg\vec{j}$ 的作用，则任意时刻 t 小球所受的对原点 O 的力矩$\vec{M}$为

$$\begin{aligned}\vec{M}&=\vec{r}\times m\vec{g}\\&=\left[(b+v_0t)\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}\right]\times mg\vec{j}\\&=(b+v_0t)mg\vec{k}\end{aligned}$$

则任意时刻 t 小球对原点 O 的角动量$\vec{L}$为

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int_0^t \vec{M}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^t (b+v_0t)mg\,\vec{k}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(mgbt+\frac{1}{2}mgv_0t^2\right)\vec{k}\end{aligned}$$

我们也可以根据定义直接求出小球对原点 O 的角动量

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r}\times m\vec{v} \\ &= \left[(b+v_0t)\,\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\,\vec{j}\right]\times m[v_0\vec{i}+gt\vec{j}] \\ &= \left(mgbt+\frac{1}{2}mgv_0t^2\right)\vec{k}\end{aligned}$$

3.5 质点的角动量守恒定律

如果式(3.22)中质点所受合力矩$\vec{M}=0$,则$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$,即

$$\vec{L} = 常矢量 \tag{3.24}$$

这就是说,如果质点对某一固定点所受合力矩等于零时,这个质点对该固定点的角动量保持不变。这一结论称作质点的角动量守恒定律。

在天文学中的关于行星运动的开普勒第二定律阐述的是行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过相等的面积。它的本质是行星相对于太阳的角动量守恒,下面我们简要证明一下。

例 3.9 证明开普勒第二定律的本质是角动量守恒定律。

证明 如图 3.12 所示,m 是行星的质量,$\vec{r}$表示行星相对太阳的径矢,S 表示径矢扫过的面积,则 $\mathrm{d}t$ 时间内径矢 $\vec{r}$ 扫过的面积 $\mathrm{d}S$ 可表示为

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r\mathrm{d}r\sin\alpha = \frac{1}{2}\,|\,\vec{r}\times\mathrm{d}\,\vec{r}\,|$$

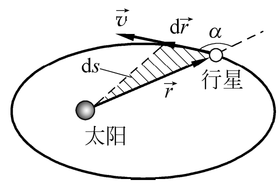

图 3.12 例 3.9 用图

根据开普勒第二定律:行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过相等的面积。有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{|\,\vec{r}\times\mathrm{d}\,\vec{r}\,|}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2m}\,|\,\vec{r}\times m\,\vec{v}\,| = 常数$$

由此可见,$L=|\vec{r}\times m\,\vec{v}\,|$为一常数,即开普勒第二定律本质上是行星相对于太阳的角动量守恒。这是因为行星所受太阳的引力始终与由太阳指向行星的径矢反平行,行星所受力矩始终为零,所以其角动量始终守恒。

3.6 质点系的角动量定理与角动量守恒定律

3.6.1 质点系的角动量定理

下面将质点的角动量定理推广到质点系。一个质点系对某一固定点的角动量定义为其

中各质点对该固定点的角动量的矢量和，即

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i \tag{3.25}$$

其中，$\vec{L}_i$ 为第 i 个质点相对于固定点的角动量，$\vec{r}_i$ 和 $\vec{p}_i$ 分别为第 i 个质点相对于该固定点的位矢和动量。假设质点系中所有质点与固定点的相对位置都不改变，即 $\vec{r}_i$ 不随时间变化，对第 i 个质点应用角动量定理有

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)}{\mathrm{d}t}=\vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i+\sum_{j(i\neq j)}\vec{f}_{ji}\right)$$

如图 3.13 所示，上式中 $\vec{F}_i$ 为第 i 个质点所受质点系以外其他物体的合力，$\vec{f}_{ji}$ 为质点系中第 j 个质点对第 i 个质点的作用力，$\sum\limits_{j(i\neq j)}\vec{f}_{ji}$ 为质点系中其他所有质点对第 i 个质点的内力之和。将上式对所有质点求和可得

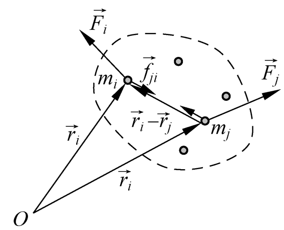

图 3.13　质点系的角动量定理

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\vec{L}_i\\&=\sum_i(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)+\sum_{i,j(i\neq j)}(\vec{r}_i\times\vec{f}_{ji})\\&=\vec{M}_{\mathrm{ext}}+\vec{M}_{\mathrm{int}}\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中，$\sum\limits_i(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)$ 为所有质点所受外力矩的矢量和，简称合外力矩，记作 $\vec{M}_{\mathrm{ext}}$；$\sum\limits_{i,j(i\neq j)}(\vec{r}_i\times\vec{f}_{ji})$ 为所有质点间内力矩的矢量和，简称合内力矩，记作 $\vec{M}_{\mathrm{int}}$。由于内力 $\vec{f}_{ij}$ 和 $\vec{f}_{ji}$ 总是成对出现，如图 3.13 所示，且 $\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$，所以与之相应的内力矩也会成对出现，对第 i 和第 j 个质点，其相互作用的力矩之和为

$$\vec{r}_i\times\vec{f}_{ji}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ij}=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{f}_{ji}=0$$

上式之所以等于零是因为 $\vec{r}_i-\vec{r}_j$ 与 $\vec{f}_{ji}$ 共线，所以任何一对内力矩的矢量和为零，即内力矩不改变系统的角动量。于是式(3.26)可写成

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}_{\mathrm{ext}} \tag{3.27}$$

这就是质点系的角动量定理，其意义为质点系对惯性系中任一固定点的角动量随时间的变化率等于这个质点系所受对该固定点的合外力矩。

3.6.2　质点系的角动量守恒定律

如果质点系所受合外力矩 $\vec{M}_{\mathrm{ext}}=0$，由式(3.27)，可得

$$\vec{L}=\text{常矢量} \tag{3.28}$$

上式即质点系的角动量守恒定律。它表明质点系相对于某一固定点所受合外力矩为零时，该质点系相对于该固定点的角动量不随时间改变。

天文学上认为星系多呈扁状盘型结构与星际物质的角动量守恒有关。1755 年，德国哲