第 1 章　向量代数与空间解析几何

1.1　向量代数

一、主要内容

空间直角坐标系, 向量的概念, 向量的运算, 向量的积.

二、教学要求

1. 理解空间直角坐标系的概念, 理解向量的概念及其表示;

2. 掌握向量的运算 (线性运算、数量积、向量积), 了解两个向量垂直、平行的条件;

3. 理解单位向量、方向角与方向余弦, 向量的坐标表示式, 掌握用坐标表示式进行向量运算的方法;

4. 掌握向量的数量积、向量积的运算, 了解混合积.

三、例题选讲

例 1.1　*在 x 轴上求出一点 M, 使它与点 $M_1(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.*

解　设在 x 轴上所求点 M 的坐标为 $(x,0,0)$, 下面求出 x.
由条件 $|M_1M|=\sqrt{30}$, 即

$$\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{30},$$

$$(x-4)^2=25,$$

得

$$x=9 \quad 或 \quad x=-1.$$

故所求点 M 为 $(9,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

例 1.2　*已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,-4,7)$, 其终点坐标为 $(2,-1,7)$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标及模 $|\boldsymbol{a}|$.*

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标为 (x, y, z), 因为向量的坐标是其终点坐标与始点坐标之差, 所以有

$$2-x=4, \quad -1-y=-4, \quad 7-z=7,$$

由此解得

$$x=-2, \quad y=3, \quad z=0.$$

而

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=\sqrt{81}=9.$$

故向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标为 $(-2,3,0)$, $|\boldsymbol{a}|=9$.

例 1.3 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的负向及 y 轴、z 轴的正向构成相等的锐角, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解 依题意知

$$\alpha=\pi-\theta, \quad \beta=\theta, \quad \gamma=\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$

因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 即

$$\cos^2(\pi-\theta)+\cos^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

所以

$$3\cos^2\theta=1 \quad 或 \quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例 1.4 模长为 2 的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角是 $\dfrac{\pi}{4}$, 与 y 轴的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的夹角是 γ, 则

$$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\gamma=1,$$

即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cos^2\gamma=1.$$

由此解得

$$\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

因为

$$\boldsymbol{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right),$$

而 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a$, 所以

$$\boldsymbol{a} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 1, \pm 1\right).$$

例 1.5　已知 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2$, 求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解　因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}), |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2$, 即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = 8 - 4 = 4, \quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 2 \quad (\text{由 } |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \geqslant 0, \text{故舍去} -2).$$

或由给定条件知

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$, 于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

例 1.6　设 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 5, (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{2}{3}\pi$, 若向量 $\boldsymbol{m} = \lambda\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 互相垂直, 求常数 λ.

分析　两个向量互相垂直的充分必要条件是其数量积为零, 由此入手求出常数 λ.

解

$$\begin{aligned} 0 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} &= (\lambda\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ &= 3\lambda\boldsymbol{a}^2 + (51-\lambda)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 17\boldsymbol{b}^2 \\ &= 12\lambda + (51-\lambda)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 425 \\ &= 12\lambda + (51-\lambda)\times 2\times 5\times\cos\frac{2}{3}\pi - 425 \\ &= 17\lambda - 680. \end{aligned}$$

即 $\lambda = 40$.

例 1.7　设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 均为单位向量, 且有 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

分析　利用数量积的运算律和单位向量的概念求解.

解　因为

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\right)\\&=3+2\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

例 1.8　求垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(4,5,3)$ 的单位向量 $\boldsymbol{e_c}$.

解　因为向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 所以所求的单位向量 $\boldsymbol{e_c}$ 必与向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共线. 而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&1\\4&5&3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3,$$

于是, 所求的单位向量 $\boldsymbol{e_c}$ 为

$$\boldsymbol{e_c}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k},$$

或 $-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{i}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{j}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{k}$ 也是所求的单位向量.

例 1.9　已知向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)\,,\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, 且与向量 $\boldsymbol{c}=(1,2,-7)$ 的数量积为 10, 求向量 $\boldsymbol{x}$.

分析　利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即可.

解　设 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$, 则依题意得

$$\begin{cases}2x-3y+z=0,\\x-2y+3z=0,\\x+2y-7z=10.\end{cases}$$

由上面方程组解得

$$x=7,\quad y=5,\quad z=1,$$

故所求向量为 $\boldsymbol{x}=(7,5,1)$.

四、疑难问题解答

1. 从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是否可以推出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$? 反过来, 从 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是否可以推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, 为什么?

答　从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 可知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小必相等, 所以必有 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 反过来, 由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 只知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等, 二向量的方向未必相同, 所以由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 不能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量, 下列各式在什么条件下才能成立?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

答　当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时, 式 (1) 成立 (图 1.1); 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})>\dfrac{\pi}{2}$ 时, 式 (2) 成立 (图 1.2); $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向时, 式 (3) 成立; $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向, 即当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$ 时, 式 (4) 成立 (图 1.3).

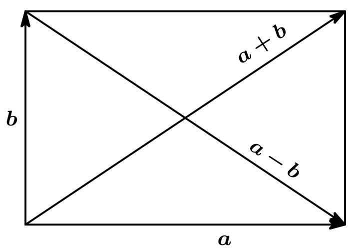

图　1.1

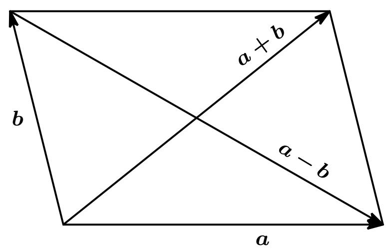

图　1.2

3. 下列说法是否正确, 为什么?

(1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 是单位向量;

(2) $2\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$;

(3) 与 x,y,z 三坐标轴的正向夹角相等的向量, 其方向角为 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

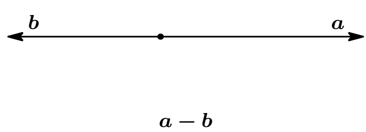

图　1.3

答　(1) 不正确. 由单位向量的定义知, 模为 1 的向量称为单位向量. 因为向量 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的模 $|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\neq 1$, 故 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 不是单位向量.

(2) 不正确. 由于向量是既有大小又有方向的量, 所以 $2\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 没有大小可言, 不能比较. 当然向量的模是可以比较大小的, 如 $|2\boldsymbol{i}|=2>|\boldsymbol{j}|=1$.

(3) 不正确. 与三坐标轴正向夹角相等的向量, 其方向角不是 $\frac{\pi}{3}$. 因为任一向量的三个方向角 α,β,γ 应满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时, 有 $3\cos^2\alpha=1$, 即 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\alpha=\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\neq\frac{\pi}{3}$. 又因为

$$\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\neq 1,$$

所以三个方向角均为 $\frac{\pi}{3}$ 的向量是不存在的.

练习 1.1

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(4,-1,3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(5,2,-2)$, 求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角相等, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点坐标为 $A(1,0,-1)$, 终点坐标为 $B(4,-4,11)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向角.

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦满足下列条件:

(1) $\cos\beta=0$; (2) $\cos\beta=1$; (3) $\cos\beta=\cos\gamma=0$. 说明这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的特点.

5. 设 $A(1,-1,3),B(-1,1,4)$, 求 z 轴上的点 C 坐标, 使 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

6. 设点 M 的向径与 x 轴,y 轴正向分别成 60°, 45° 的角, 向量的模为 8, 求点 M 的坐标.

7. 若向量 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$ 和 $\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$ 的和与差相等, 求 z.

8. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 同时垂直于向量 $\boldsymbol{b}=(3,6,8)$ 和 x 轴, 且 $|\boldsymbol{a}|=2$, 求 $\boldsymbol{a}$.

练习 1.1 参考答案与提示

1. $(23,4,0)$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角分别为 α,β,γ, $\alpha=\beta=\gamma$. 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 可得 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. 13; $\alpha=\arccos\frac{3}{13},\beta=\arccos\left(-\frac{4}{13}\right),\gamma=\arccos\frac{12}{13}$.

4. (1) $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴垂直或 $\boldsymbol{a}$ 与 Oxz 面平行;(2) $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴平行或 $\boldsymbol{a}$ 与 Ozx 面垂直;(3) $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴平行或 $\boldsymbol{a}$ 与 Oyz 面垂直.

5. $\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$.

6. $\left(4, 4\sqrt{2}, \pm 4\right)$.

7. $z = 1$.

8. $\boldsymbol{a} = \pm\left(0, \dfrac{8}{5}, -\dfrac{6}{5}\right)$.

1.2　平面与直线

一、主要内容

平面的方程, 空间直线及其方程.

二、教学要求

1. 掌握平面方程与直线方程及其求法;

2. 了解平面、直线的相互关系, 会求平面与平面, 直线与直线, 平面与直线之间的夹角;

3. 会求点到直线和点到平面的距离.

三、例题选讲

例 1.10　*已知一个平面通过 x 轴和点 $M_0(4, -3, -1)$, 求这个平面的方程.*

分析　由题设的条件知, 所求平面通过 x 轴, 那么平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 应垂直于 x 轴, 同时也垂直于 $\overrightarrow{OM_0}$. 这样可以取法向量 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{i}\times\overrightarrow{OM_0}$, 再由平面过原点 O, 用点法式可以写出所求平面的方程. 另外, 还可以利用此平面方程的特殊性求出此方程.

解法1　依题设条件知

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\times\overrightarrow{OM_0} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k},$$

又平面过点 $O(0, 0, 0)$. 因此所求平面方程为

$$0(x-0) + 1\cdot(y-0) - 3(z-0) = 0,$$

即

$$y - 3z = 0.$$

解法2　依题设条件知, 所求平面方程应为

$$By + Cz = 0,$$

又所求平面过已知点 $M_0(4,-3,-1)$, 将点 M_0 代入上面方程得

$$-3B-C=0 \quad \text{或} \quad C=-3B.$$

即

$$By-3Bz=0,$$

由于 $B\neq 0$, 所以在上式两边同时消去 B, 得所求方程为

$$y-3z=0.$$

例 1.11 求过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

分析 由于所求的平面与已知直线垂直, 所以可取直线的方向向量作为平面的法向量, 由平面的点法式方程即可得所求的平面方程. 应当注意已知直线是参数式方程.

解 已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(-1,3,1)$, 取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1$, 因平面过点 $M(1,2,-1)$, 故所求平面的方程为

$$-(x-1)+3(y-2)+1\cdot(z+1)=0,$$

即

$$x-3y-z+4=0.$$

例 1.12 求两个平面 $2x-y+z-6=0$ 和 $x+y+2z-5=0$ 的夹角.

解 已知两个平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(2,-1,1), \quad \boldsymbol{n}_2=(1,1,2),$$

所以

$$\cos\theta=\frac{|2\times 1+(-1)\times 1+1\times 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

因此, 所求夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 1.13　确定下列各组中平面与平面间的关系:

(1) $x+y-z-1=0$ 与 $2x+2y-2z+3=0$;

(2) $x+y+z=0$ 与 $x+y-2z+3=0$.

解　(1) 两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{n}_2=(2,2,-2)$, 满足条件

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2},$$

故这两个平面平行.

(2) 两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{n}_2=(1,1,-2)$, 满足条件

$$1\times1+1\times1+1\times(-2)=0,$$

故这两个平面垂直.

例 1.14　设有直线

$$L_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1} \text{ 与 } L_2:\ \begin{cases} x-y=6,\\ 2y+z=3,\end{cases}$$

求直线 L_1 与 L_2 的夹角.

解　L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,-2,1)$, L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2$ 为

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

所以 L_1 与 L_2 之间的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 1.15　已知直线

$$L_1:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2} \text{ 和 } L_2:\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1},$$

求过两直线 L_1 和 L_2 的平面方程.

分析　所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 L_1 和 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$, 即 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$, 所以可以取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$. 解此题的关键是求出平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 下一

步是求出平面上的一个点. 因为直线 L_1 上的点 $M_1(2,-2,3)$ 在所求平面上, 再用平面的点法式方程即可.

解 因为 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$, 所以取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$, 即

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\-1&2&1\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

又点 $M_1(2,-2,3)$ 在所求平面上, 从而所求平面方程为

$$-5(x-2)-3(y+2)+(z-3)=0,$$

即

$$5x+3y-z-1=0.$$

例 1.16 求过点 $M(-1,2,3)$, 垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$, 且平行平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

分析 关键是求出直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$. 所求直线垂直于已知直线, 即 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1$. 所求直线平行于已知平面, 即 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{n}_1=(7,8,9))$. 因此取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}_1$.

解 依题意知

$$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1,\quad \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1,$$

取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}_1$, 有

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

又直线过点 $M(-1,2,3)$, 从而所求直线方程为

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-3},$$

或

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}.$$

例 1.17 确定直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 与平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$ 的位置关系.

解　直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-28\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},$$

即 $\boldsymbol{s}=-7(4,-2,1)$. 平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(4,-2,1)$, 从而 $\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}$, 故直线 L 垂直于平面 π.

例 1.18　一平面过点 $(1,1,-1)$, 并通过两个平面 $x+y-z=0$ 和 $x-y+z-1=0$ 的交线, 求这个平面方程.

解　通过两个平面交线的任意一个平面的方程为

$$x+y-z+\lambda(x-y+z-1)=0, \tag{1}$$

因所求平面过点 $(1,1,-1)$, 则有

$$3+\lambda(-2)=0,\ \text{或}\ \lambda=\frac{3}{2},$$

将 $\lambda=\dfrac{3}{2}$ 代入式 (1) 中, 得所求的平面方程为

$$x+y-z+\frac{3}{2}(x-y+z-1)=0,$$

即

$$5x-y+z-3=0.$$

例 1.19　求直线 $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $x+y+z-4=0$ 的交点.

解　所给直线的参数方程为

$$x=-t-1,\quad y=2t+1,\quad z=3t,$$

代入平面方程中, 得

$$(-t-1)+(2t+1)+3t-4=0.$$

解得 $t=1$. 将 t 的值代入直线的参数方程中, 即得所求的交点 $(-2,3,3)$.

例 1.20　求过点 $M(-1,0,4)$, 且垂直于直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{1}$, 又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

分析　首先过点 $M(-1,0,4)$, 以直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{1}$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1$

作为法向量 $\boldsymbol{n}_1=(3,-4,1)$, 作平面 π. 再求直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 与平面 π 的交点 M_0. 可将直线化为参数方程代入平面 π 的方程中, 求出参数 t 后即可得交点 M_0. 最后连接 M, M_0 两点的直线方程即为所求.

解 过点 $M(-1,0,4)$, 以 $\boldsymbol{n}_1=(3,-4,1)$ 为法向量的平面 π 方程为

$$3x-4y+z-1=0, \tag{2}$$

将已知直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 写成参数方程

$$x=t-1,\quad y=t+3,\quad z=2t,$$

代入式 (2), 解得

$$t=16,$$

故直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 与平面 π 的交点为 $M_0(15,19,32)$. 因而 $\overrightarrow{MM_0}=(16,19,28)$, 则所求的直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

例 1.21 *求直线* $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ *在平面* $4x-y+z=1$ *上的投影直线的方程.*

解 设过已知直线的平面束方程为

$$(3x-y-2z-9)+\lambda(2x-4y+z)=0,$$

即

$$(3+2\lambda)x-(1+4\lambda)y-(2-\lambda)z-9=0, \tag{3}$$

其中 λ 为待定常数. 此平面与已知平面垂直, 故

$$4(3+2\lambda)+(1+4\lambda)+(-2+\lambda)=0,$$

即

$$\lambda=-\frac{11}{13}.$$

将 $\lambda=-\dfrac{11}{13}$ 代入式 (3), 得投影平面的方程为

$$17x+31y-37z-117=0.$$

故所求的投影直线方程为

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0, \\ 4x-y+z-1=0. \end{cases}$$

练习 1.2

1. 求满足下列条件的平面方程：

(1) 过两点 $A(2,0,-1)$，$B(1,2,4)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 平行;

(2) 过点 $M_0(1,-2,3)$ 且过直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{-3}$;

(3) 含两条平行直线 L_1：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$，$L_2$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{3}$;

(4) 过点 $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ 且与平面 $x+y-z=0$ 垂直;

(5) 过点 $M(1,2,0)$ 且与直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ 垂直;

(6) 过直线 L_1：$\begin{cases} x+2z-4=0, \\ 3y-z+8=0 \end{cases}$ 且与直线 L_2：$\begin{cases} x-y-4=0, \\ y-z-6=0 \end{cases}$ 平行.

2. 求含直线 L_1：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ 且与平面 $x+y-2z+3=0$ 垂直的平面方程.

3. 求过两平面 $3x-y+2z-2=0, x+y-4z-3=0$ 的交线且与平面 $x+y+2z-1=0$ 垂直的平面方程.

4. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 过点 $M(0,4,-2)$ 且与直线 L_1：$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases}$ 平行;

(2) 过点 $M_0(1,2,3)$ 且与一个方向角分别为 $60^\circ, 45^\circ, 120^\circ$ 的向量平行.

5. 求过点 $M_0(0,1,2)$ 且与平面 $x+2y-z+1=0$ 和 $2x-y+3z-2=0$ 都平行的直线方程.

6. 确定下列各组中二平面间的位置关系:

(1) $2x+3y+3z-5=0$ 与 $2x+3y+3z+1=0$;

(2) $7x-2y-z=0$ 与 $x-7y+21z+7=0$.

7. 确定下列各组中的直线和平面的关系:

(1) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}$ 和 $x-y+3z-2=0$;

(2) $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{x+4}{7}=\dfrac{z}{-3}$ 和 $4x-2y-2z-3=0$;

(3) $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{4}$ 和 $x+y+z+4=0$.

练习 1.2 参考答案与提示

1. (1) 因为 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1$, 所以取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}_1$. $7x-4y+3z-11=0$.

(2) 已知直线上的点 $M_1(2,-3,0)$ 在所求平面上,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{s}_1=(1,4,-3))$, $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M_1}$. 取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{M_0M_1}$. $3x+z-6=0$.

(3) 平面过点 $M_0(1,-2,4)$ (M_0在L_2上), 关键是求所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1$ (其中$\boldsymbol{s}_1=(1,2,3)$),$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M_1}$ (M_1 在直线 L_1 上,$M_1(-1,1,2)$) 取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{M_0M_1}$; $13x+4y-7z+23=0$.

(4) 因为所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$ 其中 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)$, 取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\overrightarrow{AB}$, $x-y=0$.

(5) $x+z-1=0$.

(6) 将 L_1,L_2 化为对称式方程, 所求平面过点 $M_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1$, 又 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$, 取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times s_2$. $2x-9y+7z-32=0$.

2. L_1 上的点 $M_1(-1,2,3)$ 在所求平面上,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$, 其中 $\boldsymbol{s}_1=(3,1,-2)$, $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-2)$, 取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_1$. $2y+z-7=0$.

3. 平面束方程为

$$(3x-y+2z-2)+\lambda(x+y-4z-3)=0, \tag{1}$$

$$(3+\lambda)x+(-1+\lambda)y+(2-4\lambda)z+(-2-3\lambda)=0.$$

因为 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$, 其中 $\boldsymbol{n}=(3+\lambda,-1+\lambda,2-4\lambda),\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$. 有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$, 解出 $\lambda=1$ 代入式 (1), 即为所求. 得 $4x-2z-5=0$.

4. (1) 取已知直线 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1$ 作为所求直线的方向向量, $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z+2}{4}$;

(2) 已知向量 $\boldsymbol{e}_a=(\cos 60°,\cos 45°,\cos 120°)$, 所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{2}\left(1,\sqrt{2},-1\right)$. 得 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{-1}$.

5. $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_2$, 其中 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,-1),\boldsymbol{n}_2=(2,-1,3)$. 取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$. 得 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

6. (1) 平行; (2) 垂直.

7. (1) 垂直; (2) 平行; (3) 直线在平面上.

1.3　曲面与曲线

一、主要内容

曲面及其方程, 曲线及其方程, 常见的二次曲面.

二、教学要求

1. 理解曲面方程的概念，了解常用的二次曲面的方程及其图形, 会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程;

2. 了解空间曲线在坐标面上的投影曲线.

三、例题选讲

例 1.22　说明方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=4z, \\ y=4 \end{cases}$ 表示的是怎样的曲线.

答　$x^2+y^2=4z$ 表示一个开口向上的旋转抛物面;$y=4$ 表示平行于 Ozx 坐标面的平面, 所以该方程组表示旋转抛物面与平面的交线, 交线是平面 $y=4$ 上的一条抛物线 (图 1.4).

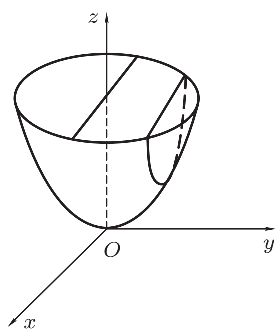

图　1.4

例 1.23　球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 相交于一个圆, 写出这个圆的方程.

解　所求的圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

上面式 (1) 和 (2) 表示同一个圆. 但是从两个方程组可以看到, 通过圆的曲面是不同的. 式 (1) 表示的圆是球面与一个平行于 Oxy 面的平面的交线; 式 (2) 表示的圆是圆柱面和一个平行于 Oxy 面的平面的交线.

例 1.24 已知在 Oxy 平面上的下列曲线, 在空间直角坐标系中, 它们表示什么图形?

(1) $x^2+y^2=1$; (2) $x^2=2y$; (3) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$;

(4) $3x^2+y^2=1$; (5) $x=1$; (6) $z=0$.

解 在空间直角坐标系中,(1) 表示准线为 $x^2+y^2=1$, 母线平行于 z 轴的圆柱面;(2) 表示准线为 $x^2=2y$, 母线平行于 z 轴的抛物柱面;(3) 表示准线为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$, 母线平行于 z 轴的双曲柱面;(4) 表示准线为椭圆 $3x^2+y^2=1$, 母线平行于 z 轴的椭圆柱面; (5) 表示平行于 Oyz 面的平面;(6) 表示 Oxy 面.

例 1.25 求曲面 $x^2+y^2-z=0$ 与平面 $x-z+1=0$ 的交线在 Oxy 平面上的投影曲线.

分析 因为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ x-z+1=0 \end{cases}$ 在 Oxy 平面上的投影就是通过曲线且垂直于 Oxy 平面的柱面与 Oxy 平面的交线, 所以, 只要从曲线的两个曲面方程中消去含有 z 的项, 则可得到垂直于 Oxy 平面的柱面方程.

解 由 $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ x-z+1=0 \end{cases}$ 消去 z, 得到关于 Oxy 平面的投影柱面

$$x^2+y^2-x-1=0,$$

于是得到在 Oxy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-1=0, \\ z=0. \end{cases}$$

例 1.26 求下列柱面方程:

(1) 准线为 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0, \end{cases}$ 母线平行于 x 轴;

(2) 准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ z=2, \end{cases}$ 母线平行于 z 轴.

解 (1) 因为准线为 Oyz 平面上的抛物线, 母线平行 x 轴, 所以是抛物面, 其方程为

$$y^2=2z.$$

(2) 将 $z=2$ 代入方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$$

中, 得

$$9x^2+4y^2=20,$$

则所求的柱面方程为

$$9x^2+4y^2=20.$$

例 1.27　求由上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$、柱面 $x^2+y^2-ax=0$ 及平面 $z=0$ 所围成的立体在 Oxy 平面上的投影区域.

解　首先由空间曲线方程

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

得投影柱面方程 $x^2+y^2-ax=0$, 故在 Oxy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2-ax=0, \\ z=0. \end{cases}$$

从而立体在 Oxy 平面上的投影区域为

$$x^2+y^2\leqslant ax.$$

例 1.28　求直线 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程.

分析　过直线 L 作一垂直于平面 π 的平面 π_1, π_1 与 π 的交线即为 L_0 的方程, 因此问题的关键是求平面 π_1 的方程, 求出 L_0 后再求出所求的旋转曲面的方程.

解　因为点 $M(1,0,1)$ 在直线 L 上, 所以也在平面 π_1 上, 设 $\boldsymbol{n}_1=(A,B,C)$, 于是 π_1 的方程可写成

$$A(x-1)+By+C(z-1)=0.$$

又 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{s}=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n}=(1,-1,2))$, 故有

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{s}=0, \\ \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B-C=0, \\ A-B+2C=0. \end{cases}$$

解得 $A:B:C=-1:3:2$, 于是 π_1 的方程为

$$x-3y-2z+1=0.$$

从而 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$$

改写为
$$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

设 L_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面为 Σ, 点 $M_1(x_1,y_1,z_1)\in\Sigma$. 对固定的 $y_1=y$, 于是

$$\begin{aligned} x_1^2+z_1^2=x^2+z^2&=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2 \\ &=(2y_1)^2+\left[-\frac{1}{2}(y_1-1)\right]^2 \\ &=\frac{17}{4}y_1^2-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故 Σ 的方程为

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

四、疑难问题解答

1. “凡三元方程都表示空间一曲面” 这一说法是否正确? 为什么?

答 不正确. 例如 $x^2+y^2+z^2=-1$ 是一个三元方程, 但不表示任何曲面. 事实上, 曲面方程不一定都是三元函数. 曲面方程 $F(x,y,z)=0$, 实际上包含了一元、二元和三元方程.

2. 如何将曲线的一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 化为参数方程?

答 并不是所有曲线的一般方程都可以化为参数方程. 但我们遇到的方程, 通常是比较简单的, 如果能从一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中解出其中两个变量为第三个变量的函数, 如: 解出 $y=y(x),z=z(x)$, 则参数方程为 $\begin{cases} x=t, \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$

练习 1.3

1. 选择题

(1) Oxy 平面上曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面方程是 (　　).

(A) $4\left(x^2+z^2\right)-9y^2=36$　　(B) $4\left(x^2+z^2\right)-9\left(y^2+z^2\right)=36$

(C) $4x^2-9\left(y^2+z^2\right)=36$　　(D) $4x^2-9y^2=36$

(2) 旋转曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{9}=1$ 是 (　　).

(A) Oxy 平面上椭圆绕 y 轴旋转成的椭球面

(B) Oxy 平面上椭圆绕 x 轴旋转成的椭球面

(C) Ozx 平面上椭圆绕 y 轴旋转成的椭球面

(D) Ozx 平面上椭圆绕 z 轴旋转成的椭球面

(3) 母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程是 (　　).

(A) 椭圆柱面 $3x^2+2z^2=16$　　(B) 椭圆柱面 $x^2+2y^2=16$

(C) 双曲柱面 $3y^2-z^2=16$　　(D) 抛物柱面 $3y^2-z=16$

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+z=a$ 的交线在 Oxy 平面上的投影的曲线方程是 (　　).

(A) $(a-z)^2+y^2+z^2=R^2$

(B) $\begin{cases} (a-z)^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=0 \end{cases}$

(C) $x^2+y^2+(a-x)^2=R^2$

(D) $\begin{cases} x^2+y^2+(a-x)^2=R^2, \\ z=0 \end{cases}$

(5) 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 Oyz 平面上的投影方程是 (　　).

(A) $\begin{cases} (a-z)^2+4y^2+z^2=4, \\ x=0 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=4, \\ z=0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=4, \\ x=0 \end{cases}$　　(D) $(a-z)^2+4y^2+z^2=4$

(6) 直线 L ：$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x+cy=b \end{cases}$ 在 Oyz 面上的投影方程是 (　　).

(A) $(b-cy)+y+z=a$　　(B) $x+\dfrac{b-x}{c}+z=a$

(C) $\begin{cases} (1-c)\,y+z=a-b, \\ x=0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x+\dfrac{b-x}{c}+z=a, \\ y=0 \end{cases}$

(7) 方程 $\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=36, \\ y=1 \end{cases}$ 表示 ( ).

(A) 椭球面 (B) $y=1$ 平面上的椭圆

(C) 椭圆柱面 (D) 椭圆柱面在平面 $y=0$ 上的投影曲线

(8) 方程 $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示 ( ).

(A) 锥面 (B) 双曲柱面 (C) 旋转双曲面 (D) 双叶双曲面

(9) 方程 $y^2-z=0$ 表示 ( ).

(A) 母线平行于 z 轴的柱面

(B) 母线平行于 x 轴, 准线在 Oxy 平面上的柱面

(C) 母线平行于 x 轴, 准线在 Oyz 平面上的柱面

(D) 旋转抛物面

(10) 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2az(a>0)$ 的交线是 ( ).

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 双曲线

2. 求与三个坐标面相切, 且通过点 $M\,(1,2,-5)$ 的球面方程.

3. 下列曲面方程, 哪些是旋转曲面方程? 它们是怎样产生的?

(1) $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$; (2) $x^2+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$;

(3) $x^2+2y^2+3z^2=1$; (4) $x^2-y^2-z^2=1$.

4. 求曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2, \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 在 Oxy 平面的投影柱面和在 Oxy 平面上的投影曲线.

5. 画出下列曲面的简图:

(1) $x^2+y^2+z^2=1$; (2) $x^2+y^2=4$;

(3) $z=2x^2+y^2$; (4) $z=2\left(x^2+y^2\right)$;

(5) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; (6) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

练习 1.3 参考答案与提示

1. (1) (C); (2) (B); (3) (C); (4) (D); (5) (A); (6) (C); (7) (B); (8) (C); (9) (C); (10) (A).

2. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=9$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2+(z+5)^2=25$.

设球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$