第 1 章　函　数

一、主要内容

函数的概念及表示法, 函数的性质, 复合函数与反函数, 基本初等函数的性质与初等函数, 经济学中常用的函数, 简单应用问题中函数关系的建立.

二、教学要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会建立简单应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数和反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 理解初等函数的概念.

5. 了解需求函数、供给函数、成本函数、收益函数、利润函数和库存函数的概念.

三、例题选讲

例 1.1　下列表达式是否确定了 y 是 x 的函数, 为什么?

(1) $y=\sqrt{\sin 3x-1}+3$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 3x-1}}$;

(3) $y=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

分析　函数是指两个实数集合之间的映射, 要构成函数, 首先要存在两个非空的实数集合, 分别作为函数的定义域 D_f 和函数的值域 R_f; 其次对任一 $x\in D_f$, 必须唯一存在确定的 $y\in R_f$ 与 x 对应. 通常函数的定义域是某个区间, 也可以是一些离散点构成的集合, 但不能是空集.

解　(1) 是. 因为对任一 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$, 均有唯一确定值 $y=3$ 与之对应. 故 $y=\sqrt{\sin 3x-1}+3$ 确定了 y 是 x 的函数.

(2) 不是. 因为在实数范围内, 不等式 $\sin 3x-1>0$ 无解, 故不存在某个数集能作为 y 的定义域, 或者说函数定义域不能是空集, 所以 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 3x-1}}$ 不能构成函数.

(3) 是. 因为对于实数集 $\mathbb{R}$ 内任一有理数 x_1, 均有唯一确定值 $y=1$ 与之对应; 对于 $\mathbb{R}$ 内任一无理数 x_2, 均有唯一确定值 $y=0$ 与之对应, 即对 $\mathbb{R}$ 内任一 x, 均有唯一确定值 y 与之对应, 故

$$y=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

确定了 y 是 x 的函数.

例 1.2 判断下列各对函数是否相同, 并说明理由:

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$, $g(x)=\sin x$;

(3) $f(x)=2x^2-3$, $g(t)=2t^2-3$.

分析 确定函数的两个要素是其定义域及对应法则, 因此, 要判断两个函数是否相同, 只要比较它们的定义域及对应法则是否相同. 即使表示自变量、因变量的符号不同, 也并不妨碍函数的等同性.

解 (1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, 它们的定义域不同.

(2) 不相同.$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$, 但是 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ 与 $g(x)=\sin x$ 两者的对应法则不同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同.

(3) 相同. 因为 $f(x)$ 与 $g(t)$ 的区别只是表示变量的符号不同, 它们的定义域及对应法则都相同, 因此, $f(x)$ 与 $g(t)$ 表示同一个函数.

例 1.3 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\log_2\sin x$ 的定义域.

解 要使函数有定义, 必须使

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z},\end{cases}$$

解不等式组, 得

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 0<x<\pi,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ -2\pi<x<-\pi.\end{cases}$$

故函数的定义域为 $[-4,-\pi)\bigcup(0,\pi)$.

例 1.4　设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$, 求 $f(x)$ 的定义域及 $f[f(-7)]$.

解　要使 $f(x)$ 有定义, 必须使

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ 49-x^2\geqslant 0, \\ \lg(3-x)\neq 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x<3, \\ -7\leqslant x\leqslant 7, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

因此 $f(x)$ 的定义域为 $[-7,2)\bigcup(2,3)$.

由 $f(-7)=1$, 故

$$f[f(-7)]=f(1)=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}.$$

小结　函数的定义域是函数的重要因素, 它是使函数 $y=f(x)$ 有意义的自变量 x 取值的全体, 通常可用不等式或区间来表示. 函数定义域确定的一般依据是: 若是有实际意义的函数, 要使实际问题有意义. 若是一般用解析式表示的函数, 要注意某些运算对自变量的限制:

(1) 分式的分母不能是零;

(2) 在根式中, 负数不能开偶次方;

(3) 在对数中, 真数不能为负数和零;

(4) 在反三角函数中, 要符合反三角函数的定义域.

例 1.5　设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, 求 $f(\sqrt{3}\sin x)$ 及 $f[f(x)]$.

解　由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

因此,

$$f(x)=x^2-2.$$

故

$$f(\sqrt{3}\sin x)=3\sin^2 x-2.$$

$$f[f(x)]=f(x^2-2)=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2+2.$$

例 1.6 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$.

解

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

因为当 $x<-1$ 时,

$$f(x)=1+x<0;$$

当 $x\geqslant -1$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

即 $f(x)\geqslant 0$, 故

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

注 求分段函数的复合函数, 应注意自变量与中间变量的取值范围, 这是保证正确运算的一个重要环节. 如在例 1.6 中, 将 $f(x)$ 中的 x 换成 $f(x)$ 后, 应讨论 $f(x)<0$ 和 $f(x)\geqslant 0$ 时自变量 x 的取值范围. 得到 $x<-1$ 和 $x\geqslant -1$ 后, 分段函数的复合函数就可以写出来了.

例 1.7 求下列函数的反函数:

(1) $y=f(x)=\mathrm{e}^x-1$; (2) $y=f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ 2^x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

解 (1) 由 $y=f(x)$ 解出 x , 得

$$x=\ln(1+y),\quad y\in(-1,+\infty).$$

互换 x 与 y 的位置, 得反函数

$$y=f^{-1}(x)=\ln(1+x),\quad x\in(-1,+\infty).$$

(2) 由 $y=f(x)$ 解得

$$x=\begin{cases}y, & y<1,\\ \log_2 y, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

将式中的 y 与 x 对换, 得原函数的反函数

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \log_2 x, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

小结　求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤如下:

(1) 由 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$;

(2) 对换自变量 x 与因变量 y 的记号, 即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 1.8　证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调的.

证明　任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, 当 $x_1<x_2$ 时,

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\frac{1}{\sqrt{x_2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}\\&=\frac{x_1-x_2}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}<0,\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的.　□

例 1.9　设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调减少, 证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调减少.

证明　任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$, 并设 $x_1<x_2$, 则 $-x_1,-x_2$ 为 $(0,l)$ 内的两点, 且 $-x_1>-x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调减少, 故

$$f(-x_1)<f(-x_2).$$

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故

$$f(-x_1)=-f(x_1),\quad f(-x_2)=-f(x_2),$$

从而

$$-f(x_1)<-f(x_2),$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$, 因此, $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调减少.　□

例 1.10　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$;　　(2) $f(x)=\sin x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

(3) $f(x)=x^k-x^{-k}$ $(k\in\mathbb{Z},k\neq 0)$.

分析　利用函数的奇偶性定义来判断.

解 (1) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$, 所以 $f(x)=\sin x-\cos x$ 是非奇非偶函数.

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\sin(-x)\cdot\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-\sin x\cdot\frac{\dfrac{1}{a^x}-1}{\dfrac{1}{a^x}+1}\\
&=-\sin x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}=\sin x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 当 k 为奇数时,

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=(-x)^k-(-x)^{-k}=-x^k+x^{-k}\\
&=-f(x),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 是奇函数;

当 k 为偶数时,

$$
f(-x)=(-x)^k-(-x)^{-k}=f(x),
$$

因此 $f(x)$ 是偶函数.

例 1.11 证明: 定义在对称区间 $(-l,l)$ 内的任意函数 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

分析 若函数 $f(x)$ 可表示为奇函数 $g(x)$ 与偶函数 $h(x)$ 之和, 即

$$
f(x)=g(x)+h(x), \tag{1}
$$

则

$$
f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x), \tag{2}
$$

联立式 (1) 和式 (2), 可解得

$$
g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\qquad h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.
$$

由此可得下面的证明过程.

证明 引进函数 $\phi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2},\psi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, 则有

$$
\phi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\phi(x),
$$

$$\psi(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\psi(x),$$

即 $\phi(x)$ 为奇函数,$\psi(x)$ 为偶函数. 而 $f(x)=\phi(x)+\psi(x)$, 故 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和. □

例 1.12　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$ 内有定义, 且满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},\tag{3}$$

其中 a, b, c 均为常数, $|a|\neq|b|$, 证明 $f(x)$ 为奇函数.

分析　利用已知条件, 可求出 $f(x)$ 的表达式, 然后再证明它是奇函数.

证明　在 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$ 中, 将 x 换成 $\dfrac{1}{x}$, 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.\tag{4}$$

联立方程式 (3) 和式 (4), 解得

$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right).$$

显然, $f(x)$ 是奇函数. □

例 1.13　判断下列函数在其定义域内是否有界:

(1) $f(x)=1+\cos 2x$;　　(2) $f(x)=x\sin x$.

分析　利用有界性的定义来判断. $f(x)$ 在区间 I 上有界是指: 对于任意 $x\in I$, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$. $f(x)$ 在 I 上无界是指: 对于任意的 $M>0$, 总存在 $x_0\in I$, 使得 $|f(x_0)|>M$.

解　(1) 由于 $|f(x)|=|1+\cos 2x|\leqslant 1+|\cos 2x|\leqslant 2$, 只需取 $M=2$, 则对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

故 $f(x)=1+\cos 2x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(2) 因为对于任意 $M>0$, 总可以找到 $x_0=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$($n$ 为正整数), 使

$$|f(x_0)|=|x_0\sin x_0|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M.$$

故 $f(x)=x\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

例 1.14 下列函数是否是周期函数? 若是周期函数, 周期是什么?

(1) $f(x)=|\sin x|+\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$; (2) $f(x)=\sin x\cos\dfrac{\pi x}{2}$;

(3) $f(x)=\cos(\sqrt{x})^2$.

分析 两个周期函数的和或积是不是周期函数主要看这两个周期函数的周期是否有公倍数 (即两周期之比是否为有理数).

解 (1) 由于 $|\sin x|$ 的周期 $T_1=\pi$, $\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$ 的周期 $T_2=2\pi$, 它们的最小公倍数是 2π, 故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

(2) 由于 $\sin x$ 的周期 $T_1=2\pi$, $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 的周期 $T_2=4$, 而

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{2}$$

为无理数, 故 $f(x)=\sin x\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 不是周期函数.

(3) 周期函数的定义域 D_f 应有下述特征:

若 $x\in D_f$, 则 $x\pm T\in D_f$, 从而 $x\pm nT\in D_f$, 故 D_f 必定既无上界又无下界. 而 $f(x)=\cos(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$, 故 $f(x)$ 不是周期函数.

例 1.15 欲建一个容积为 V 的长方体游泳池, 它的底面为正方形. 如果所用材料单位面积的造价池底是池壁的 3 倍, 试将总造价表示成底面边长的函数, 并确定其定义域.

解 设底面边长为 x, 总造价为 y, 池壁单位面积的造价为 P, 则游泳池的高 $h=\dfrac{V}{x^2}$, 底面单位造价为 $3P$, 侧面积为 $4\dfrac{V}{x^2}x=\dfrac{4V}{x}$, 故总造价

$$y=3Px^2+P\frac{4V}{x}.$$

其定义域为 $x\in(0,+\infty)$.

例 1.16 某工厂生产某种产品, 年产量为 Q 台, 每台定价为 100 元, 当年产品超过 800 台时, 超过的部分只能打九折销售, 这样可以多售出 200 台, 如果再多生产, 本年内就销售不出去了, 试写出销售总收益 R 与总产量 Q 的函数关系.

解 由题意, 可分三种情况讨论:

(1) 当 $0\leqslant Q\leqslant 800$ 时, 有 $R=100Q$;

(2) 当 $800<Q\leqslant 1000$ 时, 有

$$R=100\times 800+0.9\times 100\times(Q-800)$$

$$= 80000 + 90(Q - 800);$$

(3) 当 $Q > 1000$ 时, 有

$$\begin{aligned} R &= 100 \times 800 + 0.9 \times 100 \times (1000 - 800) \\ &= 98000. \end{aligned}$$

综上所述, 可得收益与产量的函数关系为

$$R = \begin{cases} 100Q, & 0 \leqslant Q \leqslant 800, \\ 80000 + 90(Q - 800), & 800 < Q \leqslant 1000, \\ 98000, & Q > 1000. \end{cases}$$

例 1.17 某工厂在一个月生产某产品 Q 件时, 总成本费用为 $C(Q) = 5Q + 200$(万元), 得到的总收益 $R(Q) = 10Q - 0.01Q^2$(万元), 问一个月生产多少件产品时, 所获利润最大?

解 由题意, 利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q) = R(Q) - C(Q) &= 10Q - 0.01Q^2 - (5Q + 200) \\ &= -0.01Q^2 + 5Q - 200 \\ &= -0.01(Q - 250)^2 + 425. \end{aligned}$$

所以, 当 $Q = 250$ 时, $L(Q)$ 取值最大, 即一个月生产 250 件产品时, 获得最大利润 425 万元.

小结 建立函数关系式是利用数学工具解决实际问题的首要步骤. 建立函数关系式的一般步骤是:

(1) 分析实际问题中所涉及的各个量, 分清哪些是常量, 哪些是变量; 哪个变量应为自变量, 哪个变量应为因变量, 哪些变量应该作为中间变量. 用适当的符号将它们表示出来.

(2) 根据问题的要求和条件, 分析各变量之间的内部关系, 利用有关知识和公式, 用数学式子将这些关系表示出来, 化简整理后, 可得到函数关系式.

(3) 根据问题的条件, 确定自变量的变化范围, 给出函数的定义域.

四、疑难问题解答

1. 单调函数必有反函数, 非单调的函数是不是一定没有反函数?

答 不是的. 一个函数是否存在反函数, 取决于它的对应规则 f 在定义域 D_f 与值域 W_f 之间是否构成一一对应关系. 如果是一一对应, 那么必有反函数; 否则就没有反函数. 因此单调仅是存在反函数的充分条件, 而不是必要条件.

例如: 函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上不单调 (图 1.1(a)), 但它存在反函数 (图 1.1(b))

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

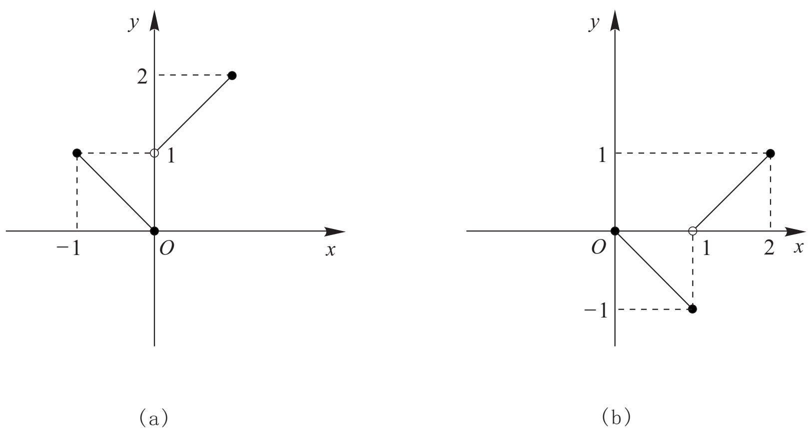

图 1.1

又如函数

$$\phi(x)=\begin{cases}-x, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ x, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调, 但却有反函数

$$\phi^{-1}(x)=\phi(x).$$

2. 分段函数一定不是初等函数吗?

答 初等函数是指由基本初等函数经有限次四则运算及复合运算所得到的, 并能用一个式子表示的函数. 分段函数虽然用几个表示式表示, 但并不能肯定说它不能用一个表达式表示, 因此, 不能说分段函数一定不是初等函数.

例如:$f(x)=|x|$, 通常可写成分段函数的形式

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$$

但是也可以写成一个表达式 $|x|=\sqrt{x^2}$, 因此, $f(x)=|x|$ 是初等函数.

虽然有些分段函数是初等函数, 但把它写成一个表达式时, 无助于我们讨论它的性质, 相反, 常会给我们带来麻烦. 因此, 对于分段函数, 除特殊需要外, 通常我们没有必要研究它能否用一个式子表示, 没有必要鉴别它究竟是不是初等函数, 而把它当作非初等函数对待即可.

练习 1

1. 函数 $y=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{|x|-1}}$ 的定义域是 ________.

2. 在下列各项中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是 (　　).

(A) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x^2}$

(B) $f(x)=\sqrt{x(x-1)},\ g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(C) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},\ g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

(D) $f(x)=2\ln x,\ g(x)=\ln x^2$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________.

4. 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$, 则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=$ ________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 则 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$(　　).

(A) 无定义　　(B) 在 $[0,2]$ 上有定义

(C) 在 $[0,4]$ 上有定义　　(D) 在 $[2,4]$ 上有定义

6. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数, 指出下列函数的奇偶性:

(1) $xf(x)$;　(2) $(x^4+1)f(x)$;　(3) $x+f(x)$;　(4) $x^2-f(x)$.

7. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　(2) $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\quad(|x|\geqslant 1)$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义, $a>0,b>0$. 证明: 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少, 则

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

9. 在半径为 r 的球体内嵌入一内接圆柱体, 试将圆柱的体积表示为其高的函数, 并写出函数的定义域.

10. 某企业每天的总成本 C 是产量 Q 的函数

$$C = 150 + 7Q,$$

企业每天的最大生产能力是 100 个单位, 求成本函数的定义域及值域.

11. 已知某产品价格 P 和需求量 Q 有关系式 $3P + Q = 60$, 求:

(1) 需求函数 $Q = Q(P)$ 并作图; (2) 总收益函数 $R = R(Q)$ 并作图;

(3) 需求量为多少时总收益最大?

练习 1 参考答案与提示

1. $(-\infty, -1)\bigcup(1, 2)$. 2. (C). 3. 1. 4. $1 - \cos x$. 5. (A).

6. (1) 奇函数;(2) 偶函数;(3) 非奇非偶函数;(4) 偶函数.

7. (1) $y = x^3 - 1$; (2) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

8. 略.

9. $V = \pi\left[r^2 - \left(\dfrac{h}{2}\right)^2\right]h,\ h \in (0, 2r)$.

10. $D = [0, 100],\ R = [150, 850]$.

11. (1) $Q = 60 - 3P,\ P \in [0, 20]$; (2) $R = \dfrac{1}{3}(60 - Q)Q$;

(3) $Q = 30$ 时, 收益 R 最大.

综合练习 1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x + 2}$; (2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}} + \ln\sin x$.

2. 设 $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}}\ \ (a > 0)$, 且 $f(\lg a) = \sqrt{10}$, 求 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1, \\ \ln x, & 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}, \end{cases}$ 指出 $f(x)$ 的定义域, 并求 $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$.

4. 设 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geqslant 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

5. 若已知 $2f(x) + f(1 - x) = x^2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

6. 设 $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, 求 $f\left[\dfrac{1}{f(x) - 1}\right]$ 的表达式及定义域.

7. 设 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内有定义, 证明 $F(x) = x^2[f(x) - f(-x)]$ 是奇函数.

8. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 其中 $f(x)$ 是单调增加的函数, 且 $f(x)\leqslant g(x)$, 证明:

$$f(f(x))\leqslant g(g(x)).$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是区间 (a,b) 内的有界函数, 证明它们的乘积 $f(x)g(x)$ 也是 (a,b) 内的有界函数.

10. 某货运公司规定货物的每吨公里运价: 在 100km 以内为 a 元, 超过 100km 时, 超过部分为 $\dfrac{4}{5}a$ 元. 试写出每吨货物运价 P 与里程 x (单位: km) 之间的函数关系式.

综合练习 1 参考答案与提示

1. (1) $[-2,-1)\bigcup(-1,1)\bigcup(1,+\infty)$; (2) $(-4,-\pi)\bigcup(0,\pi)$.

2. $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=10$ 或 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

3. 定义域为 $(-\infty,\mathrm{e}]$, $f(-2)=-3$, $f(1)=0$, $f(2)=\ln 2$.

4. $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\ x\leqslant 0$.

5. $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$.

6. $\dfrac{x-1}{x-2}$. 定义域为 $(-\infty,1)\bigcup(1,2)\bigcup(2,+\infty)$.

7. $\sim$ 9. 略.

10. $P=\begin{cases} ax, & 0<x\leqslant 100, \\ 100a+\dfrac{4}{5}(x-100), & x>100. \end{cases}$

第 2 章　极限与连续

2.1　极　限

一、主要内容

数列极限与函数极限的概念, 极限的性质, 极限的运算法则, 数列收敛的判别法及函数极限存在的判别法, 两个重要极限, 无穷小、无穷大的概念及性质.

二、教学要求

1. 理解数列与函数极限的概念.
2. 理解左极限与右极限的概念.
3. 熟练掌握极限的性质及四则运算法则.
4. 掌握数列收敛的判别法及函数极限存在的判别法, 并会利用它求极限.
5. 掌握利用两个重要极限求极限的方法.
6. 理解无穷小、无穷大的概念, 掌握无穷小的比较方法, 掌握用等价无穷小代换求极限的方法.

三、例题选讲

例 2.1　利用数列极限的定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+1}=\frac{1}{2}.$$

分析　根据数列极限的定义, 做此类题目, 就是要对于任意给定的正数 ε, 找到正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n+1}{4n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

成立. 关键是如何找到正整数 N. 我们注意到

$$\left|\frac{2n+1}{4n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2(4n+1)}<\frac{1}{8n},$$

只需 $\dfrac{1}{8n} < \varepsilon$ 就可以, 即 $n > \dfrac{1}{8\varepsilon}$, 就有

$$\left|\frac{2n+1}{4n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

成立. 因此, 可取 $N = \left[\dfrac{1}{8\varepsilon}\right] + 1$, 这里用取整记号 $[\cdot]$ 是为了保证 N 是整数, 加 1 是为了保证 $N > 0$. 选取 n 时, 不拘一定形式, 这里也可以简单地说取正整数 $N \geqslant \dfrac{1}{8\varepsilon}$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left|\frac{2n+1}{4n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

成立.

证明　对于任意给定的正数 ε, 取 $N = \left[\dfrac{1}{8\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n+1}{4n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(4n+1)} < \frac{1}{8n} < \frac{1}{8N} < \frac{1}{8 \cdot \dfrac{1}{8\varepsilon}} = \varepsilon$$

成立, 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n+1} = \frac{1}{2}.$$

□

例 2.2　用函数极限定义证明

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2.$$

分析　根据函数极限的定义, 要证明该结论, 就是要对于任意给定的正数 ε, 找到正数 δ, 使得当 $0 < |x-(-1)| < \delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-1}{x+1} - (-2)\right| < \varepsilon$$

成立. 如何找到这样的 δ 是关键. 由于当 $x \neq -1$ 时,

$$\left|\frac{x^2-1}{x+1} - (-2)\right| = |x+1|,$$

因此, 只需取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x-(-1)| < \delta$ 时,

$$\left|\frac{x^2-1}{x+1} - (-2)\right| = |x+1| < \varepsilon$$

成立, 结论即可得证.

证明 对于任意给定的正数 ε, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-(-1)|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-1}{x+1}-(-2)\right|=|x+1|<\delta=\varepsilon$$

成立, 所以

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2.$$

□

例 2.3 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明 对于任意给定的正数 ε, 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$, 根据数列极限的定义, 总存在正整数 N_1, 使得当 $k>N_1$ 时,

$$|x_{2k}-a|<\varepsilon \tag{1}$$

成立, 又由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$, 则对于上述正数 ε, 总存在正整数 N_2, 使得当 $k>N_2$ 时, 有

$$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon \tag{2}$$

成立.

现取 $N=\max\{2N_1,2N_2+1\}$, 则当 $n>N$ 时, 式 (1) 和式 (2) 同时成立, 即

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立, 因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

□

例 2.4 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

分析 此题应该利用极限、左极限、右极限的定义.

证明 必要性. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 故对于任意给定的正数 ε, 总存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立.

因此, 当 $0<x_0-x<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立, 即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

当 $0<x-x_0<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

必要性得证.

充分性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$, 根据左、右极限的定义, 对于任意给定的正数 ε, 总存在 $\delta_1>0$, 当 $0<x_0-x<\delta_1$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{3}$$

成立; 总存在 $\delta_2>0$, 当 $0<x-x_0<\delta_2$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{4}$$

成立. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $0<x_0-x<\delta\leqslant\delta_1$ 且 $0<x-x_0<\delta\leqslant\delta_2$, 式 (3) 和式 (4) 同时成立. 故

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立, 因此

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

□

例 2.5　设 $x_n=\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+(n+1)}\quad(n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　先将 x_n 化简整理, 然后再求极限.

解　由于

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{(n+1)(n+2)}\\&=2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\&=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=1-\frac{2}{n+2}\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)=1.$$

例 2.6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n}{n^3}\right)$.

分析 此题中的数列不是有限项的和的形式, 因此, 不能用有限项和求极限的法则, 可先将数列变形化简, 变为可以利用求极限运算法则的形式, 然后求极限.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)\\=&\,0.\end{aligned}$$

例 2.7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+3}{3x^3-4x^2+x}$.

分析 当 $x\to\infty$ 时, 分子和分母都趋于 ∞, 不能直接用商的极限运算法则.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+3}{3x^3-4x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\\=&\frac{1-0+0}{3-0+0}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

小结 例 2.6 和例 2.7 是 $x\to\infty$(或 $n\to\infty$, 下面仅以 $x\to\infty$ 为例) 时, 求形如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

的极限, 其中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$, m 和 n 均为正整数. 这样的问题通常是将分子和分母同除以 x 的最高次幂 $x^k(k=\max\{m,n\})$, 然后再用求极限的四则运算法则, 得到的结果是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

对于下面无理函数的极限问题, 也可以用类似的方法来处理.

例 2.8　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}-x-2}{\sqrt{x^2+3x}}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}-x-2}{\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}}=1.$$

读者不妨试一下, 计算当 $x\to-\infty$ 时该函数的极限, 并判断 $x\to\infty$ 时, 该函数极限是否存在.

例 2.9　求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

分析　当 $x\to2$ 时, 上式中的两项均无极限, 因此, 不能用求极限的四则运算法则, 应该将其通分整理后, 再求极限.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)&=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 2.10　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

分析　与例 2.9 一样, 不能直接用求极限的四则运算法则. 考虑其是根式的形式, 可以用有理化的方法将其变形整理, 然后再求其极限.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}+1}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 2.11 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}\quad(m,n$均为正整数$)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{x^2-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

分析 这 3 个题目在各自的自变量变化过程中, 分子、分母的极限都是零, 不能直接用求极限的四则运算法则. 它们都可以用初等数学的方法, 经过变形整理后, 消去致零因子, 然后再用四则运算法则求其极限.

解

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}\\&=\frac{m}{n}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{2})}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}&=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}\\&=\lim_{x\to-8}\frac{-(8+x)[(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})]}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)}\\&=\lim_{x\to-8}-\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}\\&=-2.\end{aligned}$$

注 对于上题中的 (3) 题, 也可以用下面的变量替换的方法来求解, 其过程会简便一些.

(3) 令 $\sqrt[3]{x}=t$, 则 $x=t^3$, 且当 $x\to-8$ 时, $t\to-2$.

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to-2}\frac{\sqrt{1-t^3}-3}{2+t}$$