第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件及其概率

一、主要内容

随机试验和随机事件的概念, 随机事件的关系及运算, 概率的定义和性质, 古典概型和几何概型的概率计算.

二、教学要求

1. 理解随机试验、样本空间和随机事件的概念, 掌握随机事件间的关系和运算.

2. 理解概率的定义, 掌握概率的性质.

3. 掌握古典概率及几何概率的计算, 能用概率的基本性质计算随机事件的概率.

三、例题选讲

例 1.1　写出下列随机试验的基本空间:

(1) 掷两枚骰子, 分别观察其出现的点数;

(2) 观察某昆虫的存活时间;

(3) 一人射靶三次, 观察其中靶次数;

(4) 口袋中装有 10 个球,6 个白球,4 个红球, 分别标有 $1\sim 10$ 号, 从中任取一球, 观察球的号数;

(5) 在单位圆内任取一点, 记录它的坐标.

解　(1) $\Omega=\{(1,1),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),(3,1),\cdots,(3,6),(4,1),\cdots,(4,6),(5,1),\cdots,(5,6),(6,1),\cdots,(6,6)\}$.

其中 (i,j) 表示第一枚骰子掷出 i 点, 第二枚骰子掷出 j 点 (i,j=1,2,3,4,5,6).

(2) $\Omega=(0,+\infty)$.

(3) $\Omega=\{w_{000},w_{001},w_{010},w_{011},w_{100},w_{101},w_{110},w_{111}\}$, 其中 w_{000} 表示三次均没中靶, w_{110} 表示第一次中靶, 第二次中靶, 第三次没中靶, 依次类推.

(4) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

(5) 取一直角坐标系, 则有 $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, 若取极坐标系, 则有 $\Omega = \{(\rho,\theta)\,|\rho<1, 0\leqslant\theta<2\pi\}$.

例 1.2 设 A,B,C 为三事件, 用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A 与 B 都发生, 而 C 不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生;

(4) A,B,C 都发生;

(5) A,B,C 都不发生;

(6) A,B,C 中不多于一个发生;

(7) A,B,C 中不多于两个发生;

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

解 以下分别用 $D_i(i=1,2,3,\cdots,8)$ 表示 (1), (2), $\cdots$, (8) 中所给出的事件. 注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生, 例如事件 A 不发生即 $\overline{A}$ 发生.

(1) $D_1 = A\overline{B}\,\overline{C}$ 或写成 $D_1 = A-B-C$.

(2) $D_2 = AB\overline{C}$ 或写成 $D_2 = AB-C$.

(3) $D_3 = A\cup B\cup C$ 或写成 $D_3 = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$, 或写成 $D_3 = A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

(4) $D_4 = ABC$.

(5) $D_5 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) $D_6 = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\cup A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C$ 或写成 $D_6 = \overline{AB\cup BC\cup CA} = \overline{AB}\cap\overline{BC}\cap\overline{CA}$.

(7) $D_7 = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\cup A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 或写成 $D_7 = \overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或写成 $D_7 = \overline{ABC}$.

(8) $D_8 = AB\cup BC\cup CA$ 或写成 $D_8 = ABC\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.

例 1.3 一名射手连续向某个目标射击三次, 事件 A_i 表示该射手第 i 次射击击中目标 $(i=1,2,3)$, 试用文字叙述下列事件: $A_1\cup A_2$; $\overline{A}_2$; $A_1\cup A_2\cup A_3$; $A_1A_2A_3$; A_3-A_2; $\overline{A_1\cup A_2}$; $\overline{A}_1\ \overline{A}_2$; $\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$; $\overline{A_2A_3}$; $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

解 $A_1\cup A_2$ 表示 “前两次至少有一次击中目标”;

$\overline{A}_2$ 表示 “第二次射击未击中目标”;

$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示 “三次射击中至少有一次击中目标”;

$A_1A_2A_3$ 表示 “三次射击都击中了目标”;

A_3-A_2 表示 “第三次击中但第二次未击中目标”;

$\overline{A_1\cup A_2} = \overline{A}_1\ \overline{A}_2$ 表示 “前两次射击都没有击中目标”;

$\overline{A}_2\cup\overline{A}_3 = \overline{A_2A_3}$ 表示 “后两次射击至少有一次未击中目标”;

$A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$ 表示“三次射击中至少有两次击中目标”.

例 1.4　指出下列关系中哪些成立, 哪些不成立.

(1) $\overline{A}B = A \cup \overline{B}$;　　(2) 若 $AB = \varnothing$, 且 $C \subset A$, 则 $BC = \varnothing$;

(3) $AB \cap A\overline{B} = \varnothing$;　　(4) 若 $\overline{A} \subset \overline{B}$, 则 $A \supset B$;

(5) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$;　　(6) $\overline{(A \cup B)\,C} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

解　(1) 不成立. 因为左边不含 A 而右边含 A.

(2) 成立. 因若 $BC \neq \varnothing$, 又 $C \subset A$, 则 $BA \neq \varnothing$, 此与条件矛盾.

(3) 成立. 因为 $B, \overline{B}$ 不同时发生, 从而 AB 与 $A\overline{B}$ 也不同时发生.

(4) 成立. 若 B 发生不导致 A 发生, 则导致 $\overline{A}$ 发生,$\overline{A} \subset \overline{B}$, 即导致 $\overline{B}$ 发生, 从而 $B \subset \overline{B}$, 矛盾.

(5) 不成立. 因为 $\overline{A - B} = \overline{\left(A\overline{B}\right)} = \overline{A} \cup B$, 而 $\overline{A} - \overline{B} = \overline{A} \cap B$.

(6) 不成立. 因为 $\overline{(A \cup B)\,C} = \overline{A}\ \overline{B} \cup \overline{C}$.

例 1.5　已知两事件:$A \subset B, P(A) = 0.2, P(B) = 0.3$, 求:

(1) $P\left(\overline{A}\right)$;　(2) $P\left(\overline{B}\right)$;　(3) $P(AB)$;

(4) $P(A \cup B)$;　(5) $P\left(B\overline{A}\right)$;　(6) $P(A - B)$.

解　(1) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$;

(2) $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$.

(3) $P(AB) = P(A) = 0.2$.

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3$ 或 $P(A \cup B) = P(B) = 0.3$.

(5)
$$
\begin{aligned}
P\left(B\overline{A}\right) &= P(B - A) = P(B) - P(AB) \\
&= P(B) - P(A) = 0.3 - 0.2 = 0.1.
\end{aligned}
$$

(6) $P(A - B) = P(\varnothing) = 0$.

例 1.6　已知 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0.4$, 求 $P(A \cup B)$, $P(A - B)$, $P\left(A \cup \overline{B}\right)$, $P\left(A \mid \overline{B}\right)$.

解　由 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, 得 $P(\overline{A}) = 0.5$, $P(\overline{B}) = 0.4$;
又 $P(\overline{A}B) = P\left(\overline{A}\right) P(B \mid \overline{A}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$,
而 $P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = 0.2$, 故 $P(AB) = 0.4$.
所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7$, $P(A - B) = 0.1$,

$$
P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}B) = 0.8,
$$

$$
P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(\overline{B})} = \frac{0.5 - 0.4}{0.4} = 0.25.
$$

例 1.7 证明: 对任意事件 A, B 有

$$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B).$$

证明

$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(AB)&=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)\\&\quad+P(AB)P(AB)\\&\leqslant P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)\\&\quad+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)\\&=[P(A-B)+P(AB)][P(B-A)+P(AB)]\\&=P(A)P(B).\end{aligned}$$

所以 $$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B).$$ □

例 1.8 设事件 A 与 B 同时发生必导致 C 发生, 则 (　　).

(A) $P(C)=P(AB)$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(A\cup B)$　　(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

解 由于 $P(C)\geqslant P(AB)$, 而

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

所以选 (B).

例 1.9 袋内放有 2 个伍分,3 个贰分和 5 个壹分的钱币, 任取其中 5 个, 求钱额总数超过壹角的概率.

解 共有 10 个钱币, 任取 5 个, 则基本事件总数为 C_{10}^5, 有利于事件 A(取 5 个钱币金额超壹角) 的情形有以下两种:

(1) 取 2 个 5 分币; 其余 3 个可任取, 其总数为

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3\ (\text{或 } C_2^2C_8^3);$$

(2) 取 1 个 5 分币, 则 2 分币至少要取 2 个, 其总数为

$$C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2.$$

故有利于事件 A 的基本事件总数为

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=126.$$

所以
$$P(A)=\frac{126}{\mathrm{C}_{10}^{5}}=\frac{1}{2}.$$

例 1.10　一袋内装有 7 个球, 其中 4 个白球,3 个黑球. 从中一次抽取 3 个, 求至少有 2 个白球的概率.

解　设事件 A_i 表示 "抽到的 3 个球中有 $i\ (i=2,3)$ 个白球", A_2 与 A_3 互不相容, 由古典概率的定义, 有

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{18}{35},\quad P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{4}{35},$$

故所求概率为
$$P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{22}{35}.$$

例 1.11　设有 r 个人, $r\leqslant 365$. 并设每人的生日在一年的 365 天中的每一天的可能性是均等的, 问此 r 个人生日都不相同的概率是多少?

解　r 个人都以等可能的机会在 365 天中的任一天出生, 故基本事件总数为 365^r, 设 A 为 "r 个人生日都不相同" 的事件, 则 A 所含的基本事件数为 "从 365 个不同元素中任意取出 r 个不同元素的排列个数", 即为 $\mathrm{P}_{365}^{r}=\dfrac{365!}{(365-r)!}$. 于是

$$P(A)=\frac{365!}{(365-r)!365^r}.$$

例 1.12　设有大小相同标号分别为 $1,2,3,4,5$ 的 5 个球, 同时有标号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个盒子, 将 5 个球放入 10 个盒子中, 假设每个球放入任何一个盒子中的可能性相同, 并且每个盒子可以同时容纳 5 个以上的球, 求下列事件的概率:

(1) 某指定的 5 个盒子各有一个球;

(2) 每个盒子中最多只有 1 个球;

(3) 某指定的盒子内不空.

解　5 个球放入 10 盒子中, 因为每个球有 10 种投法, 据乘法原理, 共有 10^5 种不同的投法. 且是等可能的.

(1) 设 A 表示 "某指定的 5 个盒子中各有 1 个球" 的事件.A 包含的基本事件数, 即 5 个不同元素的全排列, 共有 $n_A=5!$, 于是

$$P(A)=\frac{5!}{10^5}=0.0012.$$

(2) 设 B 表示 "每个盒子中最多只有一个球" 的事件.B 包含的基本事件数, 因为不指定哪 5 个盒子有球, 首先从 10 个盒中任取 5 个盒子, 共有 C_{10}^{5} 种取法.

然后再求取出的这 5 个盒子中, 每个盒子有一球包含的基本事件数为 5! 个, 据乘法原理知 $n_B = \mathrm{C}_{10}^5 \times 5!$, 于是

$$P(B) = \frac{\mathrm{C}_{10}^5 \cdot 5!}{10^5} = 0.3024.$$

(3) 设 C 表示 "某指定的盒子内不空" 的事件;$\overline{C}$ 表示 "某指定的盒子是空" 的事件, $\overline{C}$ 包含基本事件数即 5 个球可以向另外 9 个盒子任意投, 共有 9^5 种投法, 于是

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{9^5}{10^5} = 0.40951.$$

例 1.13 掷 5 次骰子, 试求: (1) 恰好有 3 次点数相同的概率; (2) 至少有两次 6 点的概率.

解 (1) 随机试验的样本空间所含的基本事件总数为 6^5, 5 次中恰好有 3 次基本事件是 $\mathrm{C}_5^3 \cdot 5^2$, 恰好有 3 次是 2,3,4,5,6 点的基本事件数也分别是 $\mathrm{C}_5^3 \cdot 5^2$, 设 A 表示 "恰好有 3 次点数相同" 的事件, 则

$$P(A) = \frac{5 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 5^2}{6^5} = \frac{125}{648} = 0.193.$$

(2) 不出现 6 点的基本事件数是 6^5, 只出现一次 6 点的基本事件数 $\mathrm{C}_6^1 \cdot 5^4$, 设 B 表示 "至少有两次 6 点" 的事件, 则

$$P(B) = 1 - \frac{5^5}{6^5} - \frac{\mathrm{C}_6^1 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{1526}{7776} = 0.196.$$

例 1.14 从 5 双不同的手套中任取 4 只, 这 4 只手套中至少有两只手套配成一双的概率是多少?

分析 设 A 表示事件 "取出的 4 只手套至少有两只手套配成一双" , 则 $\overline{A}$ 表示 "4 只手套中没有两只配成一双" , 本题有多种解法.

解法 1 5 双手套中任取 4 只共有 $\mathrm{C}_{10}^4 = 210$ 种取法, 且为等可能的. 先考虑 $\overline{A}$ 包含的基本事件数. 为使取出的 4 只手套中没有两只能配成一双的. 我们先从 5 双手套中任取 4 双, 然后从取出的 4 双手套中各取一只共有 $\mathrm{C}_5^4 \times 2^4 = 80$ 种取法. 于是

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{80}{210} = \frac{13}{21}.$$

解法 2 5 双手套中任取 4 只有 $\mathrm{C}_{10}^4 = 210$ 种取法, 且是等可能的. 为使取出的 4 只中至少有两只能配成一双, 我们先从 5 双手套中任取 1 双, 再从剩下的 4

双中任取 2 只, 共有 $C_5^1C_8^2$ 种取法, 因为有重复, 要减去 C_5^2. 因此 $n_A = C_5^1C_8^2 - C_5^2$, 于是

$$P(A) = \frac{C_5^1C_8^2 - C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

解法 3　设 A_1 表示事件 “取出的 4 只手套恰有两只能配成一双” ,A_2 表示事件 “取出的 4 只手套恰好配成两双” , 于是 $A = A_1 \cup A_2$, 而

$$P(A_1) = \frac{C_5^1\left(C_8^2 - C_4^1\right)}{C_{10}^4}, \quad P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{10}^4}.$$

于是

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_5^1\left(C_8^2 - C_4^1\right)}{C_{10}^4} + \frac{C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}.$$

例 1.15　自 $1,2,3,\cdots,9$ 这 9 个数中随机地取出一个数, 取后放回, 连续取 n 次, 求取到的 n 个数之积能被 10 整除的概率.

分析　如果直接求解, 则很繁琐, 若能求出逆事件的概率, 再利用概率的性质计算就会容易得出. 其他问题也常采用这种方法.

解　试验的每个结果对应一个从 9 个元素中允许重复的 n 个元素的排列, 因此基本事件总数为 9^n.

设 A 表示事件 “取出的 n 个数之积能被 10 整除” , 则 $\overline{A}$ 表示事件 “取出的 n 个数之积不能被 10 整除” , 由于 $10 = 2 \times 5$, 把 $\overline{A}$ 分成两个事件的和.

设 B 表示事件 “取出 n 个数中不含 5” ;C 表示 “取出的 n 个数中必含 5, 但不含 2,4,6,8 中任何一个” . 则 B 与 C 是互不相容的, 且 $\overline{A} = B \cup C$.

B 包含的基本事件, 即 $1,2,3,4,6,7,8,9$, 这 8 个数中允许重复取 n 个的排列, 共有 8^n 个, 因此

$$P(B) = \frac{8^n}{9^n}.$$

C 包含的基本事件是由 $1,3,5,7,9$, 这 5 个数允许重复取 n 个数的排列, 共有 5^n 个, 减去由 $1,3,7,9$ 这 4 个数允许重复取 n 个的排列数 4^n 个, 得 $5^n - 4^n$ 个, 因此 $P(C) = \dfrac{5^n - 4^n}{9^n}$, 故

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}.$$

例 1.16　设 n 个人排成一行, 甲与乙是其中的两人, 求这 n 个人的任意排列中甲与乙之间恰有 $r\,(r < n-1)$ 个人的概率. 若这 n 个人围成一圈, 证明甲与乙之间恰有 r 个人的概率与 r 无关 (在圆排列时仅考虑从甲到乙的顺时针方向).

解 n 个人的任意一种排列都是一个基本事件, 故共有 $n!$ 个基本事件. 令 $A=\{$甲与乙之间恰有 r 个人$\}$, 由于甲、乙中任选 1 人有 C_2^1 种方法, 设甲 (乙) 排在第 i 位时, 则乙 (甲) 必排在第 $i+r+1$ 位上, 且 $i+r+1 \leqslant n$, 即 $i \leqslant n-r-1$. 从而选出的人只有 $n-r-1$ 种排法, 余下的人在 $n-2$ 个位置上有 $(n-2)!$ 种排法. 所以

$$P(A)=\frac{C_2^1\,(n-r-1)\,(n-2)!}{n!}=\frac{2\,(n-r-1)}{n\,(n-1)}.$$

若 n 个人围成一圈, 共有 $(n-1)!$ 种排列方法, 由上计算,n 个人排队使甲、乙之间恰有 r 个人; 且甲在乙前共有 $(n-r-1)\,(n-2)!$ 种排法. 另这样的排队也可分成两步来完成: 先让 n 个排成一圈, 使从甲到乙的顺时针方向上甲与乙之间共有 r 个人, 然后让甲及前面 $n-r-2$ 个人中以任何一个人为首排队, 并保持相对位置不变, 设前者有 X 种排法; 而后者应有 $n-r-1$ 种排法. 由乘法原理, 有 $(n-r-1)\,(n-2)!=X(n-r-1)$, 即 $X=(n-2)!$. 所以事件 A 中包含 $(n-2)!$ 个基本事件, 从而

$$P(A)=\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{1}{n-1}$$

与甲、乙之间人数 r 无关.

例 1.17 在边长为 3 的正方形内, 随机抛入一个半径为 1 的圆环. 设圆环的圆心一定落入正方形内, 求圆环能与正方形的边相交的概率.

解 半径为 1 的圆能与正方形的边相交的充分必要条件是圆环的圆心落入图中阴影部分 G(图 1.1); 故由几何概率的计算公式, 得所求概率为

$$p=\frac{G\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{9-1}{9}=\frac{8}{9}.$$

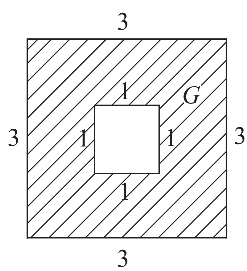

图 1.1

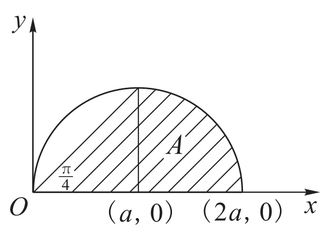

图 1.2

例 1.18 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率.

解　样本空间 Ω 可表示为 $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$ 的上半圆的所有点 (图 1.2), 此时 Ω 的面积为 $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

令 $A=\left\{\text{掷点和原点的连线与 } x \text{ 轴的夹角小于} \dfrac{\pi}{4}\right\}$, 则

$$A\text{的面积}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\mathrm{d}r=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\pi,$$

因此所求概率为

$$P(A)=\frac{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{4}\pi}{\dfrac{\pi}{2}a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

小结　本节的主要内容是概率的概念及古典概率的计算, 这是概率论中最基本的内容. 在计算比较复杂的事件的概率时, 常常先将复杂事件用简单事件通过运算表示, 然后再利用概率的性质计算复杂事件的概率.

四、常见错误类型分析

例 1.19　掷两枚骰子, 试求事件 $A=\{$点数之和为 5$\}$ 的概率.

错误解法　考虑到观察的是两颗骰子出现点数之和, 因而样本空间可构造如下:

$$\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\},$$

而 $A=\{5\}$, 故 $P(A)=\dfrac{1}{11}$.

错因分析　错的原因是样本空间中的 11 个基本事件的出现不是等可能的. 因此, 这种试验不是古典概型, 故用古典定义计算是错误的.

正确解法　考虑掷两颗骰子的所有可能出现的结果. 利用乘法原理, 基本事件总数 $n=6\times6=36$, 而 $A=\{$点数之和等于 5$\}$ 包含的基本事件数 $r=4$. 故所求概率为 $P(A)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

例 1.20 从有 3 件次品的 10 件产品中, 一件一件不放回地任意取出 4 件, 求 4 件中恰有 1 件次品的概率.

错误解法　把 10 件产品一件一件不放回地取出 4 件, 第一次有 10 种取法, 第二次有 9 种取法, 第三次有 8 种取法, 第四次有 7 种取法, 由乘法原理知共有 $10\times9\times8\times7$ 种取法, 样本空间含有 $10\times9\times8\times7$ 个基本事件.

$$A=\{\text{取出的 4 件恰有 1 件次品}\},$$

则 A 含有 $\mathrm{C}_3^1\times\mathrm{C}_7^3$ 个基本事件, 即先从 3 个次品中取 1 件, 再从 7 件正品中取 3 件, 共有 $\mathrm{C}_3^1\times\mathrm{C}_7^3$ 种取法. 故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^1\times\mathrm{C}_7^3}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{48}.$$

错因分析 其错的原因是计算总的基本事件数是用排列的方法, 即考虑了抽取顺序, 而计算事件 A 所含的基本事件数时用的是组合的方法, 即没有考虑抽取的顺序. 这样的两类基本事件数就不属于同一样本空间. 正确的方法是一定要把两类基本事件置于同一样本空间, 即计算都用排列方法或组合方法.

正确解法 **解法 1** 由题意, 总的基本事件数为 $n=\mathrm{P}_{10}^4$. A 含有 $\mathrm{C}_4^1\times\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_7^3$ 个基本事件. 所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_7^3}{\mathrm{P}_{10}^4}=\frac{1}{2}.$$

解法 2 一件一件不放回地抽取 4 件可以看成一次抽取 4 件, 故总的基本事件数为 C_{10}^4,A 中含有 $\mathrm{C}_3^1\times\mathrm{C}_7^3$ 个基本事件. 所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^3}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{1}{2}.$$

五、疑难问题解答

1. 怎样理解互逆事件和互斥事件?

答 若 $AB=\varnothing$, 则称事件 A 与 B 为互不相容或互斥. 从 “事件是由一些基本事件所构成的” 这个观点看, 互斥事件无非是说: 构成这两个事件各自的试验结果中不能有公共的基本事件.

若给定一个事件 A, 则 “A 不发生” 这个事件, 称为 A 的对立事件, 记为 $\overline{A}$.A 和 $\overline{A}$ 称为互逆事件. 例如: 掷一枚骰子, 事件 “出现 1 点” 和 “出现 5 点” 互斥; 事件 “出现点数不小于 4 点” 和 “出现点数小于 4” 互逆.

互逆事件和互斥事件有明显的区别: 当样本空间划分为含所考察的两个事件在内的每个事件时, 这两个事件才可能互斥; 当样本空间仅划分为所考察的两个事件时, 这两个事件才能互逆. 某一试验中, 互斥事件可以都不发生, 互逆事件有且仅有一个发生. 也就是说互逆事件一定互斥, 但互斥事件不一定互逆.

2. 样本空间的选取是否唯一?

答 解决许多古典概型问题有不同的方法, 这往往是由样本空间的不同构造引起的, 也就由基本事件确定的不同而引起的.

例 某次掷两颗骰子, 求出现点数和为偶数的概率.

方法 1　样本空间 Ω={(奇, 奇),(奇, 偶),(偶, 奇),(偶, 偶)},A={(奇, 奇),(偶, 偶)}, $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

方法 2　样本空间 Ω ={(点数和为奇数),(点数和为偶数)},A ={点数和为偶数}, $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

方法 3　若基本空间 $\Omega=\{(i,j)|i,j=1,2,\cdots,6\}$, 样本空间基本事件总数为 $6\times 6=36$; 事件 A 基本事件数 $2\times 3\times 3=18, P(A)=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$.

所以, 样本空间的选取一般不唯一, 在解题过程中, 选取适当的样本空间, 对快速正确的解题有很大作用.

3. 古典概型中易忽略的问题.

答　解决古典概型的问题包括两个步骤:

(1) 选取适当的样本空间, 其中的基本事件数必须是有限的, 而且基本事件的发生是等可能的;

(2) 求样本空间及事件中的基本事件数.

在解决具体问题时往往重视步骤 (2) 而忽视了步骤 (1). 所以在这里特别强调: 基本事件的发生必须是等可能的, 并且要求其概率的事件必须是样本空间的子集. 以下用例子说明.

例　掷两枚骰子, 求出现的点数和为偶数的概率.

取样本空间 Ω={(奇, 奇),(奇, 偶),(偶, 奇),(偶, 偶)},A={(奇, 奇),(偶, 偶)}, 则 $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. 若取样本空间 Ω={(两奇),(一奇, 一偶),(两偶)},A={(两奇),(两偶)}, 则 $P(A)=\dfrac{2}{3}$. 显然后者的结果是错误的, 因为后面所取样本空间中基本事件发生不是等可能的: $P(\text{两奇})=\dfrac{1}{4}, P(\text{一奇, 一偶})=\dfrac{1}{2}$.

总之, 违背“基本事件的发生必须是等可能的, 并且要求其概率的事件必须是样本空间的子集”这一要求而求解古典概型的问题, 会得出错误甚至荒谬的结果.

练习 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 口袋中装有 10 个球, 分别标有 1 ~ 10 号, 从中任取一球, 观察球的号数;

(2) 掷两枚骰子, 分别观察其点数;

(3) 一人射靶三次, 观察其中靶次数;

(4) 将 1 米长的尺子折成三段, 观察各段长度.

2. 在计算机系的学生中任选一个学生, 以 A 表示“被选学生为男生”的事件,B 表示“该生来自少数民族”的事件, C 表示“该生是学生干部”的事件:

(1) 说明 $AB\overline{C}$ 的意义; (2) 什么条件下成立 $ABC=C$?

(3) 何时成立 $C\subset B$? (4) 什么时候 $\overline{A}=B$ 是正确的?

3. 假设 A_1,A_2,A_3 是同一随机试验的三个事件, 试通过它们表示下列各事件:

(1) 只有 A_1 发生; (2) 只有 A_1 和 A_3 发生;

(3) A_1,A_2,A_3 都发生; (4) A_1,A_2,A_3 恰有一个发生;

(5) A_1,A_2,A_3 至少有一个发生; (6) A_1,A_2,A_3 都不发生;

(7) A_1,A_2,A_3 中恰有两个发生; (8) A_1,A_2,A_3 中最多有两个出现.

4. 下列等式是否成立? 若不成立, 写出正确的结果.

(1) $A\cup B=\left(A\overline{B}\right)\cup B$; (2) $A=(AB)\cup\left(A\overline{B}\right)$;

(3) $A-B=A\overline{B}$; (4) $(AB)\left(A\overline{B}\right)=\varnothing$;

(5) $(A-B)\cup B=A$; (6) $(A\cup B)-B=A$.

5. 已知 $P(A)=0.8, P(A-B)=0.1$, 求 $P(\overline{A}B)$.

6. N 件产品中有 N_1 件次品, 从中任取 n 件 (不放回), 其中 $1\leqslant n\leqslant N$.

(1) 求其中恰有 k 件 ($k\leqslant n$ 且 $k\leqslant N_1$) 次品的概率;

(2) 求其中有次品的概率;

(3) 如果 $N_1\geqslant 2, n\geqslant 2$, 求其中至少有两件次品的概率.

7. 某班级有 n 个同学 ($n\leqslant 365$), 求至少有两位同学的生日在同一天的概率 (设一年按 365 天计).

8. 在书架上任意放 20 本不同的书; 求其中指定的两本放在首末的概率.

9. 从 $1\sim 100$ 中任取一个整数, 求取到的整数能被 5 或 9 整除的概率?

10. 在六位电话号码的 6 个数字中, 求恰有 2 个数字相同的概率.

11. 把 4 个颜色分别为黑、白、红、黄的球任意地放入 4 个颜色分别为黑、白、红、黄的盒子中, 每盒放一球, 求球与盒子的颜色都不一致的概率.

12. 设停车场有 12 个位置, 排成一行, 现停着 8 辆车, 求恰有 4 个接连的位置空着的概率.

13. 一辆飞机场的交通车载有 25 名乘客, 途经 9 个站点, 每位乘客都等可能地在 9 个站中任意一站下车, 交通车只有乘客下车时才停车, 求下列事件的概率.

(1) 交通车在第 i 站停车;

(2) 交通车在第 i 站和第 j 站至少有一站停车;

(3) 交通车第 i 站和第 j 站都停车;

(4) 在第 i 站有 3 个人下车.

14. 把 6 个不同的球随机地投入 4 个不同的盒子中, 每个球进入任何一个盒子都是等可能的. 试求:

(1) 第一个盒子中恰有两个球的概率; (2) 没有空盒的概率.

15. 甲、乙两人约定下午 1 时到 2 时之间到某车站乘高速巴士, 这段时间内有 4 个班车, 开车时间分别为 $1:15, 1:30, 1:45, 2:00$. 如果约定:(1) 见车就乘;(2) 最多等一班车, 求甲、乙同乘一车的概率. 假定甲、乙两人到达车站的时刻互不关联, 且每人在 1 时至 2 时内的任何时刻到达车站是等可能的.

16. 任取两个不大于 1 的正数, 求它们的积不大于 $\dfrac{2}{9}$, 且它们的和不大于 1 的概率?

练习 1.1 参考答案与提示

1. (1) $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$;　(2) $\Omega=\{(i,j)|i,j=1,2,\cdots,6\}$;

(3) $\Omega=\{0,1,2,3\}$;　(4) $\Omega=\{(x,y,z)|x,y,z>0,x+y+z=1\}$.

2. (1) $AB\overline{C}$ 表示该生是男生, 来自少数民族, 但不是学生干部;

(2) 在计算机系的学生干部均为来自少数民族男生的条件下成立 $ABC=C$;

(3) 在计算机系的学生干部全部来自少数民族时成立 $C\subset B$;

(4) 当计算机系来自少数民族的学生均为女生, 而来自汉族的学生均为男生的时候成立 $\overline{A}=B$.

3. (1) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;　(2) $A_1\overline{A}_2A_3$;　(3) $A_1A_2A_3$;　(4) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$; (5) $A_1\cup A_2\cup A_3$;　(6) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;　(7) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$;　(8) $\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$.

4. (1) 成立;　(2) 成立;　(3) 成立;　(4) 成立;

(5) 不成立;$(A-B)\cup B=A\cup B$;　(6) 不成立;$(A\cup B)-B=A-B$.

5. 0.3.

6. (1) $\dfrac{\mathrm{C}_{N_1}^k\mathrm{C}_{N-N_1}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}$;　(2) $1-\dfrac{\mathrm{C}_{N-N_1}^n}{\mathrm{C}_N^n}$;　(3) $1-\dfrac{\mathrm{C}_{N-N_1}^n}{\mathrm{C}_N^n}-\dfrac{\mathrm{C}_{N_1}^1\mathrm{C}_{N-N_1}^{n-1}}{\mathrm{C}_N^n}$.

7. $1-\dfrac{\mathrm{P}_{365}^n}{365^n}$.

8. $\dfrac{1}{190}$.

9. 0.29.

10. $\dfrac{10\cdot\mathrm{C}_6^2\cdot\mathrm{A}_9^4}{10^6}=0.4536$.

11. $\dfrac{3}{8}$.

12. $\dfrac{1}{55}$.

13. (1) $1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25}$; (2) $1-\left(\frac{7}{9}\right)^{25}$; (3) $1-2\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{25}+\left(\frac{7}{9}\right)^{25}$;

(4) $\mathrm{C}_{25}^{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{3}\left(\frac{8}{9}\right)^{22}$.

14. (1) $\frac{\mathrm{C}_6^2\cdot 3^4}{4^6}$;

(2) 设 B 表示事件没有空盒子, 它包含的基本事件分两种情况. 其一是 4 个盒子中有两个盒子各有两个球, 另外两个盒子中各有一个球, 有 $\frac{4!\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1}{2!2!}=1080$ 个基本事件. 其二是四个盒子中, 有一个盒子中 3 球, 另外三个盒子中各有一个球, 包含 $\frac{4!\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1}{3!}=480$ 个基本事件, 所以 $P\left(B\right)=\frac{1560}{4^6}=\frac{195}{512}$.

15. (1) $\frac{1}{4}$; (2) $\frac{5}{8}$.

16. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2$.

1.2 计算概率的几个公式

一、主要内容

条件概率的定义, 乘法公式, 全概率公式, 贝叶斯公式, 事件的独立性定义与性质, n 重伯努利试验, 二项概率公式.

二、教学要求

1. 理解条件概率的概念, 掌握概率的乘法公式.
2. 掌握全概率公式和贝叶斯公式, 能利用它们计算复杂事件的概率.
3. 理解事件的独立性概念, 掌握用事件独立性计算概率的方法.
4. 理解独立重复试验的概念, 掌握计算有关事件概率的方法.

三、例题选讲

例 1.21 设 A 与 B 是两个事件, 已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.5$. 在下面两种情况下分别求出 $P(A|B)$ 与 $P(\overline{A}|\overline{B})$.

(1) A 与 B 互不相容;

(2) A 与 B 有包含关系.

解 (1) 由于 A 与 B 互不相容, 故 $P(AB)=0$. 于是

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}=0;$$

$$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{1-P\left(A\cup B\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{1-P\left(A\right)-P\left(B\right)}{1-P\left(B\right)}$$
$$=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}.$$

(2) 当 A 与 B 有包含关系时, 由 $P\left(A\right)=0.4<0.5=P\left(B\right)$, 所以 $A\subset B$, 且 $AB=A,\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}$, 于是

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0.4}{0.5}=\frac{4}{5};$$

$$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{P\left(\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=1.$$

例 1.22　已知事件 A 与 B 相互独立,A 与 C 互不相容,$P\left(A\right)=0.4,P\left(B\right)=0.3,P\left(C\right)=0.4,P\left(C|B\right)=0.2$, 求 $P\left(C|A\cup B\right)$ 及 $P\left(AB|\overline{C}\right)$.

解
$$P\left(C|A\cup B\right)=\frac{P\left[C\left(A\cup B\right)\right]}{P\left(A\cup B\right)}=\frac{P\left(CB\right)}{P\left(A\cup B\right)}$$
$$=\frac{P\left(B\right)P\left(C|B\right)}{P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)}$$
$$=\frac{0.3\times0.2}{0.4+0.3-0.4\times0.3}$$
$$\approx0.103.$$

由于 $AC=\varnothing,A\subset\overline{C},AB\subset\overline{C}$, 所以 $AB\overline{C}=AB$. 故

$$P\left(AB|\overline{C}\right)=\frac{P\left(AB\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{P\left(AB\right)}{1-P\left(C\right)}$$
$$=\frac{P\left(A\right)P\left(B\right)}{1-P\left(C\right)}=\frac{0.4\times0.3}{1-0.4}=0.2.$$

例 1.23　市场上供应的某种商品中, 甲厂产品占 65%, 乙厂占 35%, 甲厂产品的次品率为 3%, 乙厂产品的次品率为 2%, 若用事件 $A,\overline{A}$ 分别表示甲, 乙两厂的产品,B 表示产品为次品. 试分别计算概率 $P(A),P(B\mid A),P(B\mid\overline{A}),P(\overline{B}\mid A)$, $P(\overline{B}\mid\overline{A})$.

解　由题意, 知

$$P(A)=\frac{65}{100};\qquad P(B\mid A)=\frac{3}{100};$$
$$P(B\mid\overline{A})=\frac{2}{100};\qquad P(\overline{B}\mid A)=\frac{97}{100};$$
$$P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{98}{100}.$$

例 1.24 甲、乙两班共有 70 名学生, 其中女同学 40 名, 设甲班有 30 名同学, 而女生 15 名. 问在碰到甲班同学时, 正好碰到一名女同学的概率.

解 A 表示 "碰到甲班同学" 的事件,B 表示 "碰到女同学" 的事件, 因 $P(AB)=\dfrac{15}{70}, P(A)=\dfrac{30}{70}$, 所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}.$$

例 1.25 某厂的产品中有 4% 的废品, 在 100 件合格品中有 75 件一等品, 试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率.

解 A 表示 "任取的一件是合格品" 的事件,B 表示 "任取一件是一等品" 的事件, 此题要求 $P(AB)$. 由于

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=0.96,\ P(B|A)=75\%.$$

所以

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{96}{100}\times\frac{75}{100}=0.72.$$

例 1.26 设 50 件产品中有 5 件是次品, 每次抽 1 件, 不放回地抽取 3 件,A_i 表示第 i 次抽到次品 $(i=1,2,3)$, 求 $P(A_1), P(A_1A_2), P\left(A_1\overline{A}_2A_3\right)$.

解 依题意及乘法公式, 得

$$\begin{aligned}
&P(A_1)=\frac{5}{50}=0.1;\\
&P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{5}{50}\times\frac{4}{49}\approx 0.0082;\\
&P\left(A_1\overline{A}_2A_3\right)=P(A_1)P\left(\overline{A}_2|A_1\right)P\left(A_3|A_1\overline{A}_2\right)\\
&\qquad\qquad\quad=\frac{5}{50}\times\frac{45}{49}\times\frac{4}{48}\approx 0.0077.
\end{aligned}$$

例 1.27 证明:(1) 设 $P(A)=a, P(B)=b$, 则 $P(A|B)\geqslant\dfrac{a+b-1}{b}$;
(2) 若 A,B,C 相互独立, 则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 亦相互独立.

证明 (1) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{b}$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{b}\geqslant\frac{a+b-1}{b}.$$

(2) 由于 A,B,C 相互独立, 所以它们必两两相互独立, 即 A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立,B 与 C 相互独立. 从而 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立,$\overline{A}$ 与 $\overline{C}$ 相互独立,$\overline{B}$ 与 $\overline{C}$ 相互独立, 现只需证明

$$P\left(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{C}\right).$$

事实上

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right) &= P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right) = 1 - P(A\cup B\cup C) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\
&\quad - P(AC) - P(BC) + P(ABC)] \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A)P(B) \\
&\quad + P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\
&= 1 - P(A)(1-P(B)) - P(B)(1-P(C)) \\
&\quad - P(C)(1-P(A)) - P(A)P(B)P(C) \\
&= 1 - P(A)P\left(\overline{B}\right) - P(B)P\left(\overline{C}\right) - P(C)P\left(\overline{A}\right) \\
&\quad - \left(1-P\left(\overline{A}\right)\right)\left(1-P\left(\overline{B}\right)\right)\left(1-P\left(\overline{C}\right)\right) \\
&= P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{C}\right).
\end{aligned}
$$

□

例 1.28　设甲箱中有 a 个白球,b 个红球 $(a>0, b>0)$, 乙箱中有 c 个白球,d 个红球 $(c>0, d>0)$, 从甲箱中任取一球放入乙箱中, 然后再从乙箱中任取一球, 试求从乙箱中取出的球为白球的概率.

解法 1　设 B 表示 “从乙箱中取出的球为白球” 的事件,B 是试验结果, 导致 B 发生的原因是什么呢? 从甲箱中取出了一白球放入乙箱中, 或者从甲箱中取出了一红球放入乙箱中, 而导致 B 发生. 于是我们找到了导致 B 发生的一组原因 A_1, A_2, 其中设 A_1 表示 “从甲箱中取出的球为白球” 的事件,A_2 表示 “从甲箱中取出的球为红球” 的事件, 则由全概率公式, 得

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \\
&= \frac{a}{a+b}\cdot\frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1} \\
&= \frac{a(c+1)+bc}{(a+b)(c+d+1)}.
\end{aligned}
$$

解法 2　找出另一组原因.

设 A_1 表示 “从乙箱中取出的球是甲箱中的” 事件,A_2 表示 “从乙箱中取出的球是原乙箱中的” 事件, 由全概率公式, 得

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \\
&= \frac{1}{c+d+1}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{c+d}{c+d+1}\cdot\frac{c}{c+d} \\
&= \frac{a(c+1)+bc}{(a+b)(c+d+1)}.
\end{aligned}
$$

例 1.29 已知自然人患有癌症的概率为 0.005, 据以往记录, 某种诊断癌症的试验具有如下效果: 被诊断患有癌症试验反映为阳性的概率为 0.95, 被诊断者不患有癌症试验反映为阳性的概率为 0.06, 在普查中发现某人试验反映为阳性, 问他确实患有癌症的概率是多少?

分析 被诊断者无论是否患有癌症, 都有可能在诊断中反映阳性, 若某人试验反映为阳性, 他可能患有癌症, 也可能不是, 这是后验概率问题应该用贝叶斯公式.

解 设 A 表示事件“试验反映为阳性”,B_1 表示事件“被诊断者患有癌症”,B_2 表示事件“被诊断者不患有癌症”, 则 $B_1B_2=\varnothing, B_1\cup B_2=\Omega$. 所求概率为 $P\left(B_1|A\right)$. 由已知

$$P\left(B_1\right)=0.005,\quad P\left(B_2\right)=1-0.005=0.995,$$
$$P\left(A|B_1\right)=0.95,\quad P\left(A|B_2\right)=0.06.$$

根据全概率公式

$$\begin{aligned}P(A)&=P\left(B_1\right)P\left(A|B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A|B_2\right)\\&=0.005\times0.95+0.995\times0.06\\&=0.06445.\end{aligned}$$

根据贝叶斯公式, 所求概率

$$\begin{aligned}P\left(B_1|A\right)&=\frac{P\left(B_1A\right)}{P\left(A\right)}\\&=\frac{P\left(B_1\right)P\left(A|B_1\right)}{P\left(A\right)}\\&=\frac{0.005\times0.95}{0.06445}\\&\approx0.074.\end{aligned}$$

注 $P\left(A|B_1\right)$ 与 $P\left(B_1|A\right)$ 是两个不同概念, 它们之间并没有确定的大小关系.

例 1.30 袋中有 12 个乒乓球, 其中 9 个是没有用过的新球, 第一次比赛时任取 3 个使用, 用毕放回. 第二次比赛时也任取 3 个球, 求此 3 个球都没有用过的概率.

解 设 $B_i\ (i=0,1,2,3)$ 为“第一次取出的 3 个球恰好有 i 个新的”, A 为“第二次取出的 3 个球全是没用过的”. 依题意, 可得

$$P(B_i)=\frac{\mathrm{C}_9^i\mathrm{C}_6^{3-i}}{\mathrm{C}_{12}^3},\quad P(A|B_i)=\frac{\mathrm{C}_{9-i}^3}{\mathrm{C}_{12}^3},\quad i=0,1,2,3.$$

由全概率公式, 得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{\mathrm{C}_9^i\mathrm{C}_6^{3-i}}{\mathrm{C}_{12}^3}\frac{\mathrm{C}_{9-i}^3}{\mathrm{C}_{12}^3}=0.1458.$$

例 1.31　设有 3 门火炮同时对某目标射击, 命中的概率分别为 0.2, 0.3, 0.5, 目标命中 1 发被击毁的概率为 0.2, 命中 2 发被击毁的概率为 0.6,3 发均命中被击毁的概率为 0.9, 求 3 门火炮在一次射击中击毁目标的概率.

解　A 表示 “目标在一次 3 门火炮射击中被击毁” 的事件,B_i 表示 “恰有 i 发击中目标” 的事件,$i=0,1,2,3$, 则

$$P\left(B_0\right)=0.8\times0.7\times0.5=0.28,$$

$$P\left(B_1\right)=0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5+0.8\times0.7\times0.5=0.47,$$

$$P\left(B_2\right)=0.2\times0.3\times0.5+0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5=0.22,$$

$$P\left(B_3\right)=0.2\times0.3\times0.5=0.03,$$

$$P\left(A|B_0\right)=0,\quad P\left(A|B_1\right)=0.2,\quad P\left(A|B_2\right)=0.6,\quad P\left(A|B_3\right)=0.9.$$

由全概率公式, 得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=0}^{3}P\left(B_i\right)P\left(A|B_i\right)\\&=0.47\times0.2+0.22\times0.6+0.03\times0.9\\&=0.253.\end{aligned}$$

例 1.32　设一个口袋中有 6 个球, 令 A_1,A_2,A_3 依次表示这 6 个分别为 4 红 2 白; 3 红 3 白; 2 红 4 白. 设验前概率为 $P\left(A_1\right)=\dfrac{1}{2}$, $P\left(A_2\right)=\dfrac{1}{6}$, $P\left(A_3\right)=\dfrac{1}{3}$, 现从口袋中任取一球, 得到白球, 求相应的后验概率.

解　B 表示 “任取一球为白的” 事件, 由题设

$$P\left(B|A_1\right)=\frac{2}{6},\quad P\left(B|A_2\right)=\frac{3}{6},\quad P\left(B|A_3\right)=\frac{4}{6}.$$

由逆概率公式有

$$\begin{aligned}P\left(A_1|B\right)&=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)}{P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)+P\left(A_3\right)P\left(B|A_3\right)}\\&=\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{6}}{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{6}}=\frac{6}{17}.\end{aligned}$$

同理可得 $P\left(A_2|B\right)=\dfrac{3}{17}, P\left(A_3|B\right)=\dfrac{8}{17}$.

例 1.33 盒内有 12 个大小相同的球, 其中 5 个是红球,4 个是白球,3 个是黑球. 第一次从中任取 2 个球, 第二次从余下的 10 个球中再任取 3 个球 (均为不重复抽取). 如果发现第二次取到的 3 个球中有 2 个是红球, 比较第一次取到几个红球的概率最大?

解 设 A 为 "第二次取到的 3 个球中有 2 个红球", B_i 为 "第一次取到的 2 个球中有 i 个红球" ,$i=0,1,2$. 据题意, 可得

$$P\left(B_i\right)=\frac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_7^{2-i}}{\mathrm{C}_{12}^2},\quad P\left(A|B_i\right)=\frac{\mathrm{C}_{5-i}^2\mathrm{C}_{5+i}^1}{\mathrm{C}_{10}^3}.$$

应用贝叶斯公式

$$P\left(B_k|A\right)=\frac{P(B_i)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)},\quad k=0,1,2.$$

依次得

$$P(B_0|A)=\frac{5}{12};\quad P(B_1|A)=\frac{6}{12};\quad P(B_2|A)=\frac{1}{12},$$

故第一次取到 1 个红球的概率最大.

例 1.34 一工人看管 3 台机床, 在 1 小时内甲、乙、丙 3 台机床需工人照看的概率分别是 0.9, 0.8, 0.85, 求在 1 小时中,

(1) 没有机床需要照看的概率;

(2) 至少有一台机床需要照看的概率;

(3) 至多只有一台机床需要照看的概率.

解 令 A_i 表示事件 "第 i 台机床需要照看" ($i=1,2,3.$);

A 表示事件 "没有机床需要照看" ;

B 表示事件 "至少有一台机床需要照看" ;

C 表示事件 "至多只有一台机床需要照看" .

因为 3 台机床要不要照看是相互独立的, 故

(1) $P\left(A\right)=P\left(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)$

$\qquad=(1-0.9)\times(1-0.8)\times(1-0.85)=0.003.$

(2) $P\left(B\right)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(A_1A_2A_3\right)=1-P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right)$

$\qquad=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388.$