第 1 章　函　　数

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象, 它是微积分学研究的基本对象. 在中学时我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解, 在本章中, 我们将进一步阐明函数的一般定义, 介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念, 这些都是学习这门课程的基础.

1.1　集　　合

集合是现代数学中的基本概念之一, 也是函数概念的基础.

1.1.1　集合的概念

在数学上, 将具有某种确定性质的对象的全体称为**集合**, 组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**.

习惯上, 用大写拉丁字母 $A, B, C, X, Y \cdots$ 表示集合, 用小写拉丁字母 a, b, c, x, $y \cdots$ 表示集合的元素. 对于给定的集合来说, 它的元素是确定的. 如果 a 是集合 A 中的元素, 则用 $a \in A$ 来表示; 如果 a 不是 A 中的元素, 则用 $a \notin A$(或 $a \,\bar{\in}\, A$) 来表示.

含有有限个元素的集合称为**有限集**; 含有无限多个元素的集合称为**无限集**; 不含任何元素的集合称为**空集**, 用 $\varnothing$ 表示.

表示集合的方法主要有两种, 一种是列举法, 就是把集合的所有元素一一列举出来, 写在大括号内. 例如, 把方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解构成的集合表示为 $A = \{-2, 2\}$. 另一种方法是描述法, 就是指出集合的元素所具有的性质. 一般地, 将具有某种性质的对象 x 所构成的集合表示为

$$A = \{x \mid x\text{具有某种性质}\}.$$

例如, 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集也可以表示为 $A = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$.

设 A, B 是两个集合. 若 A 的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A \subset B$(或 $B \supset A$); 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B**相等**, 记作 $A = B$.

如果集合的元素都是数, 则称其为**数集**. 在本课程中涉及的集合都是数集. 常用的数集有:

(1) **自然数集**, 用 $\mathbb{N}$ 表示, 即

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

(2) **整数集**, 用 $\mathbb{Z}$ 表示, 即

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}.$$

(3) **有理数集**, 用 $\mathbb{Q}$ 表示.

(4) **实数集**, 用 $\mathbb{R}$ 表示.

(5) **复数集**, 用 $\mathbb{C}$ 表示.

有时我们在表示数集的字母的右上角添加“+”或者“−”, 来表示该数集中所有正数或者负数构成的特定子集. 例如, $\mathbb{Z}^+$ 表示全体正整数构成的集合, $\mathbb{R}^-$ 表示全体负实数构成的集合等.

1.1.2 集合的运算

集合的基本运算有三种, 即并集、交集与差集.

设有集合 A 与 B, 它们的**并集**记作 $A\bigcup B$, 定义为

$$A\bigcup B=\{x\mid x\in A\text{或 }x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的**交集**记作 $A\bigcap B$(或 AB), 定义为

$$A\bigcap B=\{x\mid x\in A\text{且 }x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的**差集**记作 $A\setminus B$, 定义为

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{但 }x\overline{\in}B\}.$$

从上述定义可以看出, $A\bigcup B$ 就是把 A 与 B 的所有元素放在一起所构成的集合; $A\bigcap B$ 就是把 A 与 B 的公共元素放在一起所构成的集合; $A\setminus B$ 就是在 A 中去掉属于 B 中的元素后, 余下的元素所构成的集合. 显然

$$A\setminus B\subset A\subset A\bigcup B,\quad AB\subset A.$$

集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_i\bigcup\cdots$ 表示集合 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 的所有元素放在一起所构成的集合. 而 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_i\bigcap\cdots$ 表示集合 A_1, $A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 的公共元素所构成的集合.

通常将研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**, 用 Ω 来表示. 将 $\Omega\setminus A$ 称为集合 A 的**补集**或**余集**, 用 $\overline{A}$ 表示.

集合的运算满足如下规律：

(1) $A\bigcup B=B\bigcup A,\ A\bigcap B=B\bigcap A$;

(2) $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C),\ (A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$;

(3) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C),\ A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

(4) $A\bigcup A=A,\ A\bigcap A=A,\ A\bigcup\varnothing=A,\ A\bigcap\varnothing=\varnothing$;

(5) 若$A_i\subset B(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subset B$;

(6) 若$A_i\supset B(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\supset B$;

(7) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

以上结论都可根据集合的概念和运算加以证明, 请读者自己试一试.

1.1.3 区间与邻域

区间是微积分中常用的一类数集, 它们的记号和定义如下 (其中 $a,b\in\mathbb{R}$)：

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

半开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;

无限区间 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$,

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

前四个区间也称为**有限区间**, a, b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**, $b-a$ 称为**区间长度**. $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”, 它们不表示数值, 仅仅是记号. 在不一定要指明区间是开的或闭的, 以及是有限的或无限的场合, 我们就简单地称之为**区间**, 并且常用字母 I 或 X 表示.

区间可以在数轴上表示出来 (如图 1.1 所示).

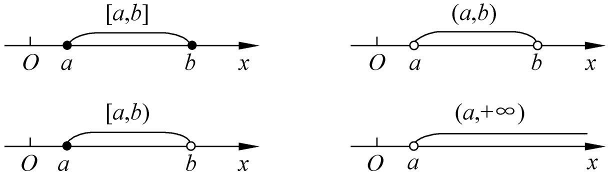

图 1.1

邻域也是微积分中经常用到的数集. 设 $a,\delta\in\mathbb{R}$, 其中 $\delta>0$, 数集

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ**邻域**, 记为 $U(a,\delta)$, 点 a 称为**邻域的中心**, δ 称为**邻域的半径**. 由于

$$U(a,\delta)=\{x \mid -\delta<x-a<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

所以 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$, 见图 1.2.

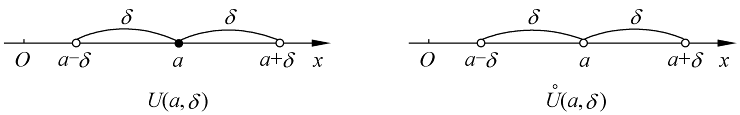

图 1.2

在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 后得到的数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

称为点 a 的**去心 δ 邻域**, 记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 显然

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta),$$

是两个开区间的并集, 见图 1.2.

为了方便, 有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**, 把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

习 题 1.1

1. 用描述法表示下列集合:

(1) 大于 6 的所有实数;

(2) 圆 $x^2+y^2=16$ 内部 (不包含圆周) 一切点的集合;

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

2. 用列举法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2-8x+12=0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;

(3) 集合 $\{x||x-1|\leqslant 5, x\in\mathbb{Z}\}$.

3. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,6\}$, 求:

(1) $A\bigcup B$; (2) $A\bigcap B$; (3) $A\bigcup B\bigcup C$; (4) $A\bigcap B\bigcap C$; (5) $A\backslash B$.

4. 若 $A=\{x|3<x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$, 求:

(1) $A\bigcup B$; (2) $A\bigcap B$; (3) $A\backslash B$.

5. 某专业共有 100 名学生, 其中 70 名数学考试成绩优秀, 用集合 A 表示这些学生; 40 名外语考试成绩优秀, 用集合 B 表示这些学生; 数学考试成绩优秀而

外语考试成绩不是优秀的学生有 55 人. 试用集合关系表示下列各类学生, 并计算出各类学生的数目：

(1) 两门考试成绩都是优秀的学生;

(2) 数学考试成绩不是优秀而外语考试成绩是优秀的学生;

(3) 两门考试中至少有一门成绩达到优秀的学生;

(4) 两门考试成绩均不是优秀的学生.

6. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x| \leqslant 5$; (2) $|x-2| \leqslant 1$; (3) $|x-a| < \varepsilon$ (a为常数, $\varepsilon > 0$);

(4) $|x| \geqslant 3$; (5) $|x+1| > 2$.

7. 用区间表示下列点集, 并在数轴上表示出来：

(1) $A = \{x|\, |x+3| < 2\}$;

(2) $B = \{x|1 < |x-2| < 3\}$.

8. 用不等式或绝对值不等式表示下列各区间：

(1) $(-2, 3)$; (2) $[-2, 2]$; (3) $(-5, +\infty)$.

1.2 函 数

1.2.1 映射

定义 1.2.1 设 X, Y 是两个非空集合, f 是一个对应法则. 如果对于任何一个 $x \in X$, 按照对应法则 f, 都有唯一确定的 $y \in Y$ 和它对应, 则称 f 为 X 到 Y 的**映射**, 记为

$$f : X \to Y.$$

称元素 y 为在映射 f 之下的 x 的**像**, 记为 $f(x)$, 即 $y = f(x)$; 称元素 x 为在映射 f 之下 y 的**原像**; 集合 X 称为映射 f 的**定义域**, 记作 D_f, 即 $D_f = X$; 而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y \mid y \in Y, y = f(x), x \in X\}$$

称为映射 f 的**值域**, 记作 R_f.

例 1.2.1 设集合 X 为某班全体学生, Y 为实数集合 (单位：cm), 我们将每个学生与其身高建立对应关系, 则每个学生均有唯一身高, 即对于集合 X 的每一个元素, 在集合 Y 中都有唯一确定的元素与之对应, 故这样的对应关系构成了从 X 到 Y 的映射.

对于定义 1.2.1, 要注意下面几点：

(1) 应区别 f 和 $f(x)$. 前者是从 X 到 Y 的一种对应关系, 后者是在 f 之下 x 的像, 是 Y 的一个元素.

(2) 对任何一个 $x \in X$, 都有且只有一个像 $y = f(x) \in Y$, 即像是唯一的.

(3) 对于某个 $y \in Y$, 如果在映射 f 之下在 X 中有原像, 则其原像可能不止一个, 即原像不一定是唯一的.

如果原像是唯一的, 即对于 X 中的任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 y_1 和 y_2 也满足 $y_1 \neq y_2$, 则称映射 f 为**单射**. 若映射 $f: X \to Y$ 满足 $R_f = Y$, 则称映射 f 为**满射**. 如果映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 为**一一映射** (**一对一映射**).

例 1.2.2 设 $X = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}, Y = \{1, 3, \cdots, 2n-1, \cdots\}$, 对于任何一个 $n \in X$, 按照对应法则 f 得到 $2n - 1 \in Y$, 则映射 $f: X \to Y$ 是一一映射. 值得注意的是: Y 是 X 的子集, Y 中的元素似乎比 X 中的元素个数"少", 这是无限集合的一个特性.

如果 $f: X \to Y$ 是一一映射, 则对于每一个 $y \in Y$, 在 X 中存在唯一的 x 与 y 对应, 满足 $y = f(x)$, 或记作 $x \xrightarrow{f} y$, 这样就有了一个从 Y 到 X 的映射, 记作 $f^{-1}: Y \to X$, 称为映射 f 的**逆映射**.

设有映射

$$g: X \to Y, \quad f: Y \to Z,$$

则对于每一个 $x \in X$, 有

$$x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} z \quad (y \in Y, z \in Z).$$

这说明, 对于每一个 $x \in X$, 通过 y, 都存在唯一的 $z \in Z$ 与 x 对应, 因此产生了一个从 X 到 Z 的新映射, 记为 $f \circ g: X \to Z$, 称为 g 与 f 的**复合映射**.

1.2.2 函数的概念

有了映射的概念, 就可以在映射的基础上定义函数了.

定义 1.2.2 设非空数集 $X \subset \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$, 称从 X 到 Y 的映射

$$f: X \to Y$$

为定义在 X 上的**函数**, 称集合 X 为函数 f 的**定义域**, 也用 D_f 表示, 称集合 $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ 为函数 f 的**值域**.

函数通常记为

$$y = f(x), \quad x \in D_f,$$

称 x 为**自变量**, 称 y 为**因变量**.

当自变量 x 取数值 $x_0 \in D_f$ 时, 与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为定义在 D_f 上的函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**, 记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, 这时, 我们也说函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

由于经常通过函数值来研究函数, 为了方便, 在以后的叙述中, 将 “定义在 X 上的函数 f” 就说成函数 $y=f(x), x\in X$. 如前所述, 我们应该注意到 f 与 $f(x)$ 是有区别的.

从函数的定义上来看, 确定一个函数的两个基本条件是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 则不论使用什么样的函数记号, 它们都是同一个函数.

在实际问题中, 要根据问题的条件或实际意义确定函数的定义域. 对于用公式形式给出的函数, 如果没有其他附加条件, 则认为函数的定义域是使得公式有意义的一切 x 值. 例如, 由公式

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

给出的函数 $f(x)$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$. 但是, 如果 x 是斜边长为 1 的直角三角形的一条直角边的边长, $f(x)$ 是另一条直角边的边长, 则函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域应为 $(0,1)$.

例 1.2.3 *求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.*

解 要使表示函数 y 的公式有意义, 必须有

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi\quad(n=0,\pm1,\cdots).\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为

$$-4\leqslant x<-\pi\quad\text{或}\quad 0<x<\pi,$$

故函数的定义域为 $[-4,-\pi)\bigcup(0,\pi)$.

表示函数通常的办法是给出解析表示式 (公式) 的形式, 例如, $y=\cos x, y=\ln\left(1+x^2\right)$ 等. 函数也可以用其他方式给出, 如表格法, 图形法等.

在平面直角坐标系 xOy 中, 点的集合

$$\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形** (**或图像**). 一个函数的图形通常是一条曲线 (图 1.3), 称之为**曲线** $y=f(x)$. 函数的图形具有直观性和明显性, 使我们有可能利用几何方法研究函数的有关特性. 相反, 一些几何问题也可借助函数来做理论研究.

在函数的定义中, 对于每一实数 $x \in X$, 对应唯一的实数 y, 这样的函数也称为**单值函数**. 有时也会遇到这样的情况：对于实数集 X 中的某些实数 x, 每一个数 x 可能对应几个甚至无穷多个 y 值. 例如：$y = \pm\sqrt{1-x^2}, y = \arcsin x$ 等. 这种情况不符合上述函数的定义, 但为了方便, 有时也把它们称为**多值函数**. 今后, 如无特别声明, 本书所讨论的函数都是指单值函数.

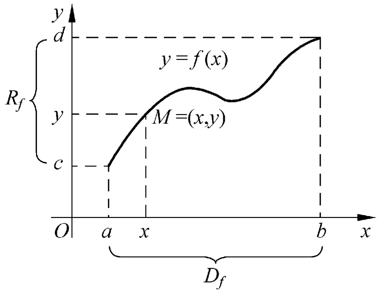

图 1.3

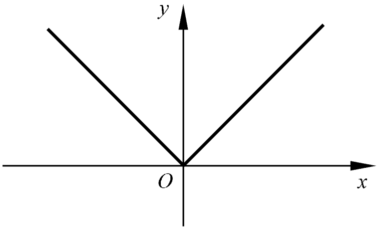

图 1.4

下面给出一些以后经常用到的函数.

例 1.2.4 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 如图 1.4 所示.

例 1.2.5 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$, 如图 1.5 所示. 显然, 对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

例 1.2.6 对于任意实数 x, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如,

$$[2] = 2, \quad \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0, \quad [-\pi] = -4.$$

这个函数可以分段表示如下 (图 1.6):

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\mathbb{Z}=\{$整数$\}$.

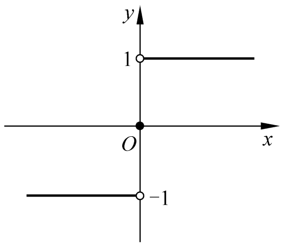

图 1.5

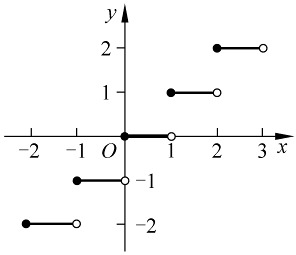

图 1.6

例 1.2.7 公共电话收费对应的函数关系. 在公共电话亭打市内电话, 每 3 分钟收费 0.4 元, 不足 3 分钟按 3 分钟收费, 这样便规定了打电话用时 t 与费用 S 的关系：

$$S=\begin{cases}0.4\left(\left[\dfrac{t}{3}\right]+1\right), & t>0,\quad t\neq 3k,\\ 0.4k, & t=3k,\quad k=1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

例 1.2.8 Dirichlet (狄利克雷) 函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\{0,1\}$.

从例 1.2.4 到例 1.2.8 这几个函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示, 这样的函数称为**分段初等函数**(简称**分段函数**). 它也是自然科学、工程技术和经济学中常用的函数形式.

1.2.3 函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f, 实数集 $X\subset D_f$, 如果存在正数 M, 使得对于任意的 $x\in X$, 都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**; 如果这样的正数 M 不存在, 就说函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

从几何直观上来看, 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 则函数 $y=f(x)$ 的图形位于两条平行直线 $y=M,y=-M$ 之间, 如图 1.7 所示.

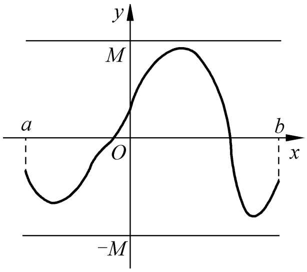

图 1.7

例如, $f(x)=\cos x$, 因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有

$$|\cos x|\leqslant 1,$$

如果取 $M=1$(当然也可以取任何大于 1 的数作为 M), 则函数 $f(x)=\cos x$ 满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

所以函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

应该注意的是, 讨论函数的有界性, 不仅仅要考虑函数的表达式, 还要考虑自变量 x 的取值范围 X. 同一个函数在自变量的不同范围上的有界性可能是不同的.

例 1.2.9 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的, 在 $(0,1)$ 内是无界的.

证明 若取 $M=1$, 则对于任意 $x\in(1,2)$, 都有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1,$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的.

对于任何正数 M(不妨设 $M>1$), 取 $x_0=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$, 则有

$$|f(x_0)|=\left|\frac{1}{x_0}\right|=2M>M,$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的. □

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f, 区间 $X\subset D_f$, 在 X 上任取两点 x_1,x_2. 如果当 $x_1<x_2$ 时, 有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或}f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上是**单调增加函数**(或**单调减少函数**); 如果当 $x_1<x_2$ 时, 有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(\text{或}f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上是**单调不减函数**(或**单调不增函数**). 函数的这些性质统称为**单调性**.

如果 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调函数, 则称区间 I 为函数 $y=f(x)$ 的**单调区间**.

单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向上升的 (图 1.8); 单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向下降的 (图 1.9).

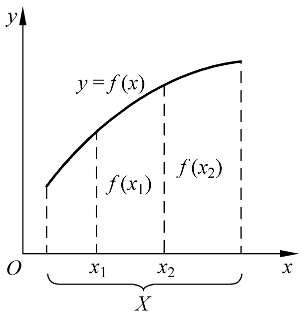

图 1.8

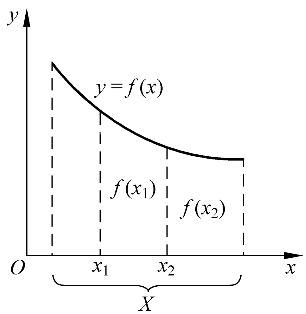

图 1.9

函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加 (或单调减少) 的充分必要条件是 $-f(x)$ 在 X 上单调减少 (或单调增加).

例 1.2.10 确定函数 $f(x)=3\left(x^2-1\right)$ 的单调区间.

解 对于任意的 x_1,x_2, 有

$$f(x_1)-f(x_2)=3\left(x_1^2-1\right)-3\left(x_2^2-1\right)=3\left(x_1^2-x_2^2\right).$$

当 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ 且 $x_1<x_2$ 时, 有 $x_1^2>x_2^2$, 于是 $3\left(x_1^2-x_2^2\right)>0$, 即 $f(x_1)-f(x_2)>0$, 从而

$$f(x_1)>f(x_2),$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少.

当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$ 时, 有 $x_1^2<x_2^2$, 于是 $3\left(x_1^2-x_2^2\right)<0$, 即 $f(x_1)-f(x_2)<0$, 从而

$$f(x_1)<f(x_2),$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

由上述讨论可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数, 它的单调区间为 $(-\infty,0]$ 及 $[0,+\infty)$.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于坐标原点对称, 如果对任何 $x\in D_f$, 有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**; 如果对任何 $x\in D_f$, 有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形关于坐标原点对称. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如, 函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数 (图 1.10), $f(x)=x^2$ 是偶函数 (图 1.11), 而 $f(x)=x^3+x^2$ 既不是奇函数也不是偶函数.

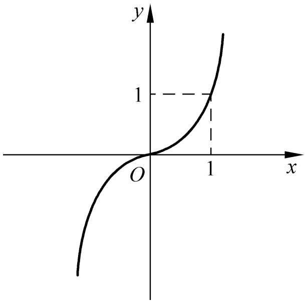

图 1.10

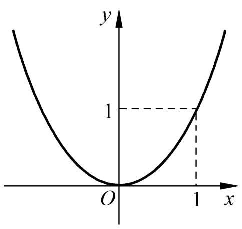

图 1.11

例 1.2.11 判断函数 $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的奇偶性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 对任意实数 x, 由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_2\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\log_2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\\&=\log_2\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\&=-f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 是奇函数.

根据函数奇偶性的定义, 可以得到下面的几个结论：设 I 是关于坐标原点对称的区间, 则在区间 I 上的两个奇函数的和或差仍是奇函数; 两个奇函数的乘积是偶函数; 两个偶函数的和或积是偶函数; 奇函数与偶函数的乘积是奇函数; 奇函数的倒数 (如果存在的话) 是奇函数; 偶函数的倒数 (如果存在的话) 是偶函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f, 如果存在正数 T, 对任何 $x\in D_f$, 有 $x+T\in D_f$, 且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**, T 称为 $y=f(x)$ 的一个**周期**.

显然, 如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期, 则 $2T,3T,\cdots,nT,\cdots(n$ 为正整数) 都是 $f(x)$ 的周期. 通常称使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T 为函数 $f(x)$ 的**周期**. 例如, $f(x)=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

若 $y=f(x),\ x\in D_f$ 是以 T 为周期的周期函数, 则在 D_f 内的每个长度为 T, 左端点相距为 $kT(k\in\mathbb{Z}^+)$ 的区间上, 函数图形有相同的形状 (图 1.12).

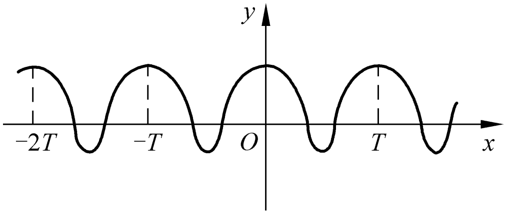

图 1.12

例 1.2.12 设 $y=f(x)$ 是以 ω 为周期的周期函数, 证明函数 $y=f(ax)$ $(a>0)$ 是以 $\dfrac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数.

证明 因为 $f(x)$ 以 ω 为周期, 从而有

$$f(ax)=f(ax+\omega),$$

即
$$f(ax)=f\left[a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right],$$

所以 $f(ax)$ 是以 $\dfrac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数. □

习 题 1.2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$;

(2) $y=\dfrac{1}{2x^2-x}$;

(3) $y=\lg(x+3)$;

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$;

(5) $y=\arccos\dfrac{1-x}{3}$;

(6) $y=\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$;

(7) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(8) $y=\begin{cases}x^2, & -2<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x\leqslant 3.\end{cases}$

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同, 为什么?

(1) $f(x)=\ln x^2,\quad g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=1,\quad g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

3. 判别下列函数的奇偶性:

(1) $y=x^4-2x^2$; (2) $y=x-x^2$;

(3) $y=x\sin x$; (4) $y=\sin x-\cos x$;

(5) $y=\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$; (6) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

(7) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$; (8) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$.

4. 判断下列函数的单调性:

(1) $y=5x-8$; (2) $y=3^{x-1}$;

(3) $y=2x+\ln x$; (4) $y=2+\dfrac{8}{x}$.

5. 判断下列函数的有界性:

(1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; (2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; (3) $y=x\cos x$.

6. 求下列周期函数的周期:

(1) $y=\sin^2 x$; (2) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$; (3) $y=\sqrt{\tan x}$.

1.3 反函数与复合函数

与上节介绍的逆映射与复合映射的概念相对应, 在函数中有反函数与复合函数的概念.

1.3.1 反函数

设函数 f: $D_f\to R_f$ 为一一映射, 其中 D_f 为定义域, R_f 为值域, 则称逆映射 f^{-1}: $R_f\to D_f$ 为函数 f 的**反函数**, 而函数 f 也可称为**直接函数**. f^{-1} 的对应法则由 f 的对应法则所确定, 即对于每个 $y\in R_f$, 如果 $y=f(x)$, 则 $x=f^{-1}(y)$. 由于函数关系与自变量和因变量用什么字母表示无关, 而且习惯上总是用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因此常把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写作 $y=f^{-1}(x)$. 例如, 函数 $y=2x+1$ 是一个自 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一一映射, 故有反函数 $x=\dfrac{y-1}{2}$, $y\in\mathbb{R}$. 互换自变量与因变量的符号, 通常将这个反函数写作 $y=\dfrac{x-1}{2}, x\in\mathbb{R}$.

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在同一平面直角坐标系上是同一条曲线. 如果反函数用 $y=f^{-1}(x)$ 表示, 那么在同一直角坐标系上, 曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称 (如图 1.13). 以后如不作特殊说明, 函数 $y=f(x)$ 的反函数都是指 $y=f^{-1}(x)$.

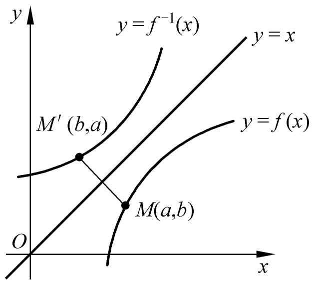

图 1.13

并不是所有的函数都有反函数, 例如, 函数 $y=f(x)=x^2$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$, 值域为 $R_f=[0,+\infty)$. 因为映射

$$f: D_f \to R_f$$

不是一一映射, 所以函数 $y=x^2$ 没有反函数. 如果函数 $y=f(x)$ 是单调函数, 那么相应的映射就是一一映射, 因此有下面的结论：

单调函数 $y=f(x)$ 必存在单调的反函数 $y=f^{-1}(x)$, 且 $y=f^{-1}(x)$ 具有与 $y=f(x)$ 相同的单调性.

例 1.3.1 *求函数* $y=\dfrac{10^x}{10^x+1}$ *的反函数.*

解 函数 $y=\dfrac{10^x}{10^x+1}$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$, 值域为 $R_f=(0,1)$. 由

$$y=\frac{10^x}{10^x+1},$$

可解得
$$x=\lg\frac{y}{1-y}.$$

再将 x 与 y 位置互换, 得反函数

$$y=\lg\frac{x}{1-x} \quad (0<x<1).$$

1.3.2 复合函数

在复合映射的定义中, 如果集合 X,Y,Z 都是实数集, 则相应的复合映射就称为**复合函数**. 为了应用的方便, 我们把复合函数的定义叙述如下：

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ, 值域为 R_φ, 当 $D_f\bigcap R_\varphi$ 非空时, 记 $D=\{x \mid u=\varphi(x), x\in D_\varphi, u\in D_f\}$, 显然有 $D\subset D_\varphi$. 对于任意 $x\in D$ 有 $u=\varphi(x)\in D_f\bigcap R_\varphi$ 与之对应, 进而有 $y=f(u)$ 与之对应. 这样通过 u 得到了以 x 为自变量, y 为因变量的函数, 称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**, 记作

$$y = f[\varphi(x)],$$

并称 u 为**中间变量**.

例如, 函数 $y = \arctan x^2$ 可以看成是由函数 $y = \arctan u$, $u \in D_f = (-\infty, +\infty)$ 及 $u = x^2 (x \in D_\varphi = (-\infty, +\infty)$, 其值域为 $R_\varphi = [0, +\infty))$ 复合而成的, 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$.

例 1.3.2 设 $f(\sin x) = \cos 2x + 1$, 求 $f(x)$ 及 $f(\cos x)$.

解 因为

$$f(\sin x) = \cos 2x + 1 = 1 - 2\sin^2 x + 1 = 2 - 2\sin^2 x,$$

所以

$$\begin{aligned} &f(x) = 2 - 2x^2, \\ &f(\cos x) = 2 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

习 题 1.3

1. 求下列函数的反函数:

(1) $y = 2x + 1$; (2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y = \sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqslant x \leqslant 0)$; (4) $y = 1 + \lg(x+2)$;

(5) $y = 1 + \ln(x+2)$; (6) $y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$

2. 在下列各题中, 写出由所给函数构成的复合函数, 并求这一函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2,\ u = \sin x, \quad x_1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad x_2 = \dfrac{\pi}{2}$;

(2) $y = \mathrm{e}^u,\ u = x^2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$;

(3) $y = u^2,\ u = \mathrm{e}^x, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$.

3. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的:

(1) $y = \sqrt{3x-1}$; (2) $y = a\sqrt[3]{1+x}$;

(3) $y = (1+\ln x)^5$; (4) $y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x^2}}$;

(5) $y = \mathrm{e}^{\tan \frac{x}{2}}$; (6) $y = \arcsin[\lg(2x+1)]$.

4. 设 $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

5. 已知 $f(x) = x^3 - x,\ \varphi(x) = \sin 2x$, 求 $f[\varphi(x)],\ \varphi[f(x)]$.

1.4 基本初等函数与初等函数

1.4.1 基本初等函数

在微积分这门课程中, 常用的函数都是由常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这些函数构成的, 我们将这六类函数统称为基本初等函数.

1. 常函数 $y = C$(C 为常数)

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 无论 x 取何值, y 的取值都是常数 C(图 1.14), 这是最简单的一类函数.

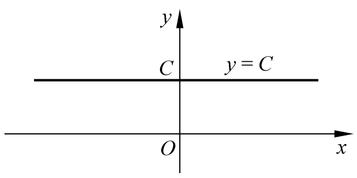

图 1.14

2. 幂函数 $y = x^\mu$(其中 μ 为实常数)

它的定义域随 μ 的不同而不同, 但无论 μ 为何值, 它在 $(0, +\infty)$ 上都有定义, 而且图形都经过点 $(1, 1)$(图 1.15).

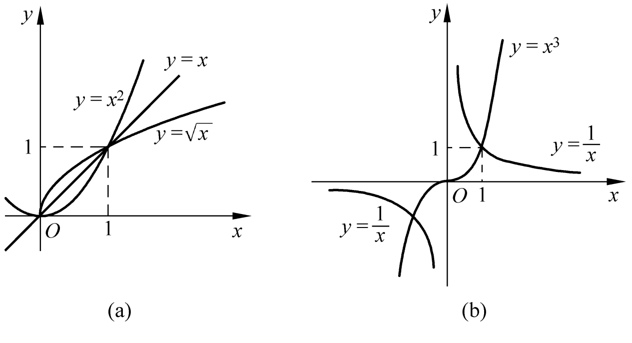

图 1.15

当 μ 为正整数时, $y = x^\mu$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 μ 为偶 (奇) 数时, x^μ 为偶 (奇) 函数.

当 μ 为负整数时, $y = x^\mu$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\bigcup(0, +\infty)$.

当 μ 为分数时, 情况比较复杂, 如 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 和 $y=x^{\frac{3}{5}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$; $y=x^{-\frac{2}{7}}$ 和 $y=x^{-\frac{5}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$; $y=x^{\frac{3}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$. 读者可根据 μ 的分母及符号自行讨论 $y=x^{\mu}$ 的定义域.

当 μ 为无理数时, 规定 $y=x^{\mu}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

3. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1,a$是常数)

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时, 它是单调增加函数; 当 $a<1$ 时, 它是单调减少函数, 但其值域都是 $(0,+\infty)$, 函数的图形都过点 $(0,1)$(图 1.16).

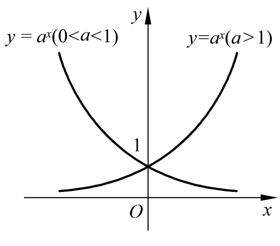

图 1.16

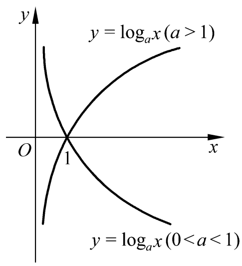

图 1.17

4. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1,a$是常数)

对数函数是指数函数的反函数, 它的定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时, 它是单调增加函数; 当 $a<1$ 时, 它是单调减少函数, 其值域都是 $(-\infty,+\infty)$, 函数的图形都过点 $(1,0)$(图 1.17).

在微积分中, 常用到以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$, 以及以 e 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}} x$, 记作 $y=\ln x$, 称为自然对数, 其中常数 $\mathrm{e}=2.7182818\cdots$, 是一个无理数 (见 2.4 节).

5. 三角函数

三角函数有

正弦函数 $y=\sin x$; 余弦函数 $y=\cos x$;

正切函数 $y=\tan x$; 余切函数 $y=\cot x$;

正割函数 $y=\sec x$; 余割函数 $y=\csc x$.

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$, 都是以 2π 为周期的周期函数, 并且都是有界函数 (图 1.18). $y=\tan x$ 的定义域为除去 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n\in\mathbb{Z})$ 以外的全体实数 (图 1.19). $y=\cot x$ 的定义域为除去 $x=n\pi(n\in\mathbb{Z})$ 的所有实数 (图 1.20). $y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数, 并且在其定义域上是无界函数. $y=\sin x$、$y=\tan x$ 及 $y=\cot x$ 是奇函数, $y=\cos x$ 是偶函数.

正割函数 $y=\sec x$, 余割函数 $y=\csc x$, 其中 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$. 它们都是以 2π 为周期的周期函数, 并且在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数.

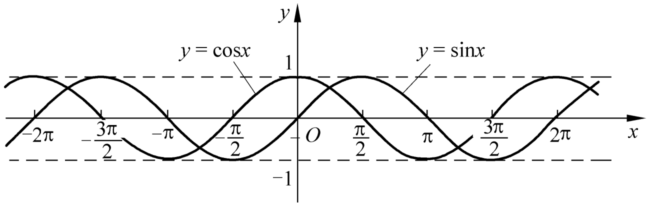

图　1.18

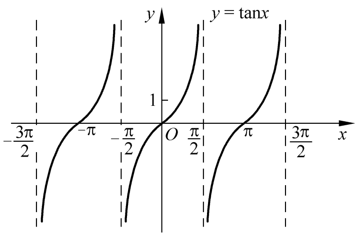

图　1.19

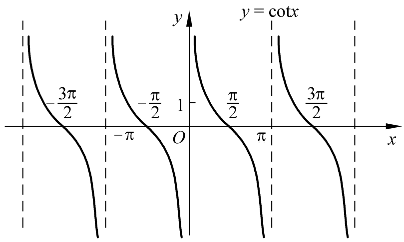

图　1.20

6. 反三角函数

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的反函数分别记作 $y=\mathrm{Arcsin}x, y=\mathrm{Arccos}x, y=\mathrm{Arctan}x$ 和 $y=\mathrm{Arccot}x$. 它们的图形分别如图 1.21、图 1.22、图 1.23 和图 1.24 所示. 它们都是多值函数, 我们按下列区间取其一个单值分支, 称为**主值分支**, 分别记作：

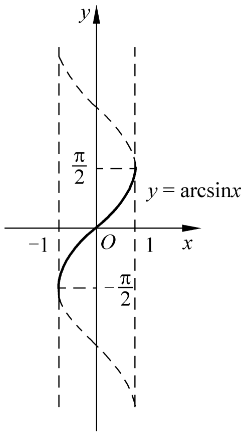

图　1.21

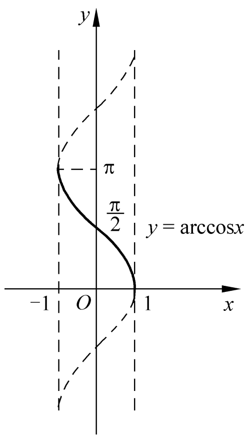

图　1.22

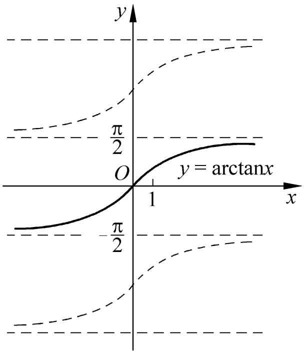

图 1.23

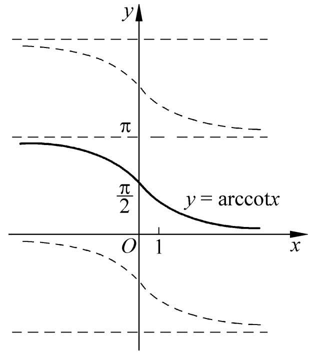

图 1.24

$y=\arcsin x$, 定义域为$[-1,1]$, 值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

$y=\arccos x$, 定义域为$[-1,1]$, 值域为$[0,\pi]$;

$y=\arctan x$, 定义域为$(-\infty,\infty)$, 值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$y=\operatorname{arccot} x$, 定义域为$(-\infty,+\infty)$, 值域为$(0,\pi)$.

如不作说明, 以后所提到的反三角函数都是指主值分支.

1.4.2 初等函数

定义 1.4.1 由基本初等函数经过有限次四则运算以及经过有限次复合运算所构成并可用一个式子表示的函数, 称为**初等函数**.

例如, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{x^2}}}{1+\sin^2 x}$, $y=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\tan^2 2x+\cot^2 x}$ 等都是初等函数.

初等函数是我们讨论的主要对象. 不是初等函数的函数一般叫做**非初等函数**. 某些分段函数就是非初等函数. 例如, 函数 $y=\operatorname{sgn}x, y=[x], y=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 等都不是初等函数. 它们也称为**分段初等函数**.

习 题 1.4

1. 指出下列函数中哪些是初等函数, 哪些不是初等函数:

(1) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}+x^2}{1+x+\sin\sqrt{x}}$; (2) $y=\begin{cases}x-x^2, & x<0,\\ x+x^3, & x\geqslant 0;\end{cases}$